

تحلیل مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی

مسعود طهانی

استادیار - دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

mtahani@ferdowsi.um.ac.ir

طاها طالبیان

دانشجوی کارشناسی ارشد - دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

taha_talebian@yahoo.com

چکیده

در این مقاله به تحلیل مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند^۱ تحت بارهای مکانیکی و حرارتی به صورت تقارن محوری پرداخته شده است. توزیع خواص مکانیکی مواد در راستای ضخامت پیوسته و به صورت تابع توزیع توانی در نظر گرفته شده است. با نوشتن معادلات موضعی تعادل در مختصات استوانه‌ای، دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر بدست آمده است. با استفاده از امان متقارن محوری ارائه شده، حل اجزاء محدود بدست آمده و در نهایت، این نتایج با حل تحلیلی بدست آمده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: مواد FG - مخزن استوانه‌ای - اجزاء محدود

مقدمه

مواد هدفمند مواد مرکب غیر همگنی هستند که از دو یا چند ماده مختلف تشکیل شده و ترکیب یا درصد حجمی اجزاء تشکیل دهنده به طور پیوسته و به عنوان تابع موقعیت در امتداد یک یا دو بعد خاص متغیر است. در نتیجه خواص و ساختار آنها به طور پیوسته در امتداد همان ابعاد تغییر خواهد کرد. تغییرات تدریجی و پیوسته این مواد، آنها را برای محیط‌ها و کاربردهای متفاوت قابل استفاده می‌سازد. لذا در سالهای اخیر استفاده از مواد هدفمند در محیط‌های با دمای بسیار بالا مانند راکتورهای هسته‌ای، کارخانجات شیمیایی و نیز در ساخت سفینه‌های فضایی با سرعت بالا، اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده است.

در اینجا فرض شده است که خواص ماده به طور پیوسته در راستای ضخامت مخزن تحت تابع توزیع توانی که در زیر آمده است، تغییر می‌کند:

$$v = (v_{out} - v_{in}) \left(\frac{r - r_{in}}{r_{out} - r_{in}} \right)^n + v_{in} \quad (1)$$

در این رابطه v_{out} خاصیت ماده در سطح خارجی، v_{in} خاصیت ماده در سطح داخلی و v خاصیت ماده در موقعیت r است. به n ضریب یا فاکتور توان گفته می‌شود. به عنوان مثال، با انتخاب مقدار $n=1$ خواص ماده بطور خطی در راستای ضخامت تغییر می‌کند.

مسائل مواد نا همگن، منجر به معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب متغیر می‌شوند که در حالت کلی نمی‌توان برای آنها حل تحلیلی پیدا نمود.

بنابراین از انواع روشهای تحلیلی و عددی برای حل این گونه مسائل استفاده می‌شود. به عنوان چند نمونه، Ozturk و Tutuncu [۱] حل تحلیلی تنش و تغییر شکل مخازن استوانه‌ای و کروی FGM تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. Chan و Horgan [۲] سیلندرها و دیسک‌های تو خالی FGM با طول محدود تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. Jabbari و همکارانش [۳] تحلیل کلی مسائل تنش حرارتی حالت پایدار و تک بعدی را برای سیلندرها FGM جدار ضخیم مورد بررسی قرار دادند. آنها تنش‌های حرارتی و مکانیکی را با حل مستقیم معادلات بدست آوردند. در اکثر پژوهش‌هایی که در این زمینه صورت گرفته است، تحلیل بر اساس تئوری‌های مهندسی مانند تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد. در این مقاله، مخزن استوانه‌ای FGM با طول و ضخامت دلخواه تحت بارگذاری متقارن محوری در نظر گرفته شده و معادلات تعادل الاستیسته بدون هیچ فرض ساده کننده‌ای استفاده شده و حل اجزاء محدود برای آنها ارائه شده است. در انتها، نتایج با حل تحلیلی بدست آمده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مقایسه شده است.

استخراج معادلات

استوانه FGM جدار ضخیم با طول محدود را در نظر بگیرید. بارگذاری مخزن به صورت بارهای مکانیکی و حرارتی با تقارن محوری می‌باشد. در نتیجه می‌توان از عبارات مشتق نسبت به θ در روابط صرف نظر کرد. به این ترتیب، معادلات موضعی تعادل به صورت زیر ساده می‌شوند:

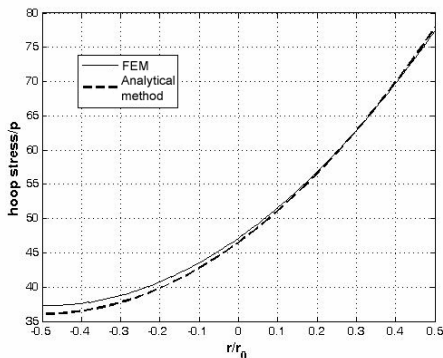
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

روابط کرنش - تغییر مکان نیز در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

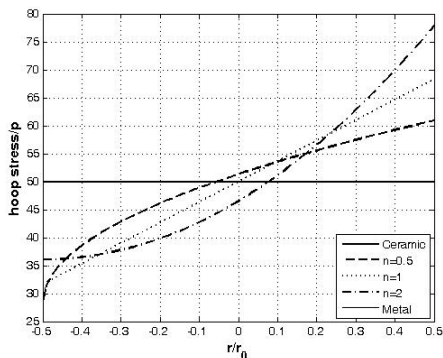
$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{du_r}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{du_z}{dz} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

همچنین روابط تنش - کرنش در حالت سه بعدی برای یک ماده ایزوتروپیک عبارت است از:

ضریب توان $n=2$ رسم شده و با حل تحلیلی مقایسه شده است. اختلاف کوچک موجود بین نتایج، به دلیل اختلاف در تئوری‌ها و فرضیات ساده کننده در حل تحلیلی می‌باشد. در شکل (۲) نیز مقادیر بی بعد تنش محیطی در راستای ضخامت به ازای ضرایب توان مختلف رسم شده است.



شکل ۱: مقایسه توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت حل عددی و تحلیلی برای ضریب توان $n=2$



شکل ۲: توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت برای ضرایب توان مختلف

نتیجه گیری

با توجه به مطالب ارائه شده ملاحظه می‌شود که توزیع تنش در مخزن استوانه‌ای ساخته شده از فلز یا سرامیک خالص فقط تابع بار و هندسه مخزن می‌باشد؛ در حالی که توزیع تنش و دما در مخزن استوانه‌ای ساخته شده از مواد FG، علاوه بر اینکه تابع بار و هندسه مخزن است، به نوع ماده و خواص آن نیز وابسته است. این وابستگی جهت کنترل توزیع تنش و دما مفید است. همچنین استفاده از مواد FG در ساخت مخازن استوانه‌ای، باعث کاهش تنش‌های طولی و محیطی در سطح داخلی می‌شود.

مراجع

1. Tutuncu, N. and Ozturk, M., 2001, Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, composites: Part B, **32**, 683-686.
2. Horgan, C.O. and Chan, A.M, 1999, The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, *J. Elasticity*, **55**, 43-59.
3. Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M.R., 2002, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, **79**, 493-497.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix} \Delta T \quad (4)$$

$$\sigma_{r\theta} = C_{66} \gamma_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = C_{66} \gamma_{rz}, \quad \sigma_{z\theta} = C_{66} \gamma_{z\theta}$$

که در آن

$$C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2 \quad (5)$$

با توجه به تقارن محوری در شرایط هندسی و بارگذاری، می‌توان u_θ را صفر در نظر گرفت و مسئله را بصورت دو بعدی در صفحه r و z حل کرد. با جایگذاری روابط (۳) در (۴) و جایگذاری نتیجه حاصله در معادلات تعادل الاستیسیته (۲)، دو معادله دیفرانسیل کوپل با مشتقات جزئی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) + \frac{C_{12} - C_{11}}{r} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + C_{66} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(C_{66} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right) + \frac{C_{66}}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \quad (6)$$

$$+ C_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + C_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} \right) = 0$$

برای حل معادلات فوق، المان چهارگوش با چهار گره و دو درجه آزادی برای هر گره ارائه شده است. به منظور افزایش دقت در نتایج بدست آمده، از حل تحلیلی انتگرال‌های در جهت ضخامت در برنامه اجزاء محدود استفاده شده است. لازم به ذکر است که در بارگذاری‌های حرارتی، ابتدا باید توزیع دما در راستای ضخامت را از حل معادله انتقال حرارت پایدار یک‌بعدی در راستای ضخامت بدست آورد و سپس معادلات تعادل را حل نمود. این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$-\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (7)$$

نتایج عددی

به منظور بررسی دقت و صحت نتایج برنامه اجزاء محدود و المان تعریف شده، در اینجا فقط یک مثال عددی ارائه شده است. مخزن استوانه‌ای که سطح داخلی آن از جنس فلز آلومینیوم با مدول الاستیسیته 70GPa و ضریب پواسون 0.3 و سطح خارجی آن از جنس سرامیک زیرکونیا با مدول الاستیسیته 151GPa و ضریب پواسون 0.3 است را در نظر بگیرد. ضخامت جداره مخزن 1cm، شعاع داخلی آن 50cm و طول آن 5m در نظر گرفته شده است. فرض می‌شود که مخزن تحت بار مکانیکی به صورت فشار داخلی p قرار گرفته باشد.

در حل تحلیلی این مسئله از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. فرض‌های استفاده شده در این تحلیل عبارتند از: صفحه‌ای بودن تنش‌ها (صرف نظر کردن از تنش عمودی در جهت شعاعی) و فرض Love-Timoshenko برای تحلیل مخازن جدار نازک.

در شکل (۱) مقادیر بی بعد تنش محیطی در راستای ضخامت به ازای