



تحلیل فرکانسی سازه های هوایی دارای ترک عرضی

انوشیروان فرشیدیان^۱، محمد حسین زاده^۲

۱- دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

۲- دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، دانشکده فنی و مهندسی

چکیده

در این مقاله یک روش غیر مخرب جهت تعیین فرکانس در سازه های هوایی با استفاده از روش ماتریس انتقال ارائه شده است. سازه مورد نظر به صورت یک تیر دو سر آزاد دارای ترک، مدل شده است. وجود ترک باعث می شود که انعطاف پذیری محلی تغییر یافته و در رفتار دینامیکی سازه تغییراتی به وجود آید و در نتیجه تغییر در فرکانس طبیعی را به دنبال خواهد داشت. در این مقاله از رفتار غیر خطی ترک صرفه نظر شده و ترک به صورت باز مدل شده است. در ادامه، اثر تغییر موقعیت و عمق ترک روی فرکانس طبیعی برای چندین حالت مختلف مورد بررسی قرار می گیرد. در پایان نتایج بدست آمده توسط این روش با نتایج سایر محققان (روشهای تجربی) مقایسه میشود، که نزدیکی نتایج، نشان دهنده ی دقت بالای روش مورد استفاده می باشد.

واژه های کلیدی: ترک-فرکانس طبیعی - ماتریس انتقال

مقدمه

بسیاری از سازه هایی که در صنعت هوا و فضا مورد استفاده قرار می گیرند، ساختاری مانند تیرها دارند. این اعضا در بسیاری از موارد دچار شکست می شوند و گاه صدمات جبران ناپذیری را به دنبال دارند. وجود ترک در ساختار یک عضو موجب انعطاف پذیری موضعی می گردد و بر اساس تئوری ارتعاشات با کاهش سختی، فرکانس طبیعی نیز کاهش می یابد. البته تغییر سختی در سازه با تغییر موقعیت ترک و یا تغییر در عمق ترک، تغییر می کند. به عبارت دیگر تغییر در سختی کل سازه تابعی از مکان و عمق ترک است. افزایش عمق ترک موجب کاهش سختی سازه می شود و در نتیجه کاهش فرکانس طبیعی را به دنبال دارد. محققین زیادی به بررسی این موضوع پرداخته و از روش های مختلفی همچون روش المان محدود [5-1]، روش گلرکین و ریتز [6] و روش ماتریس انتقال [7] جهت تحلیل فرکانس سازه استفاده کرده اند. همچنین برخی از محققین از مدل های مختلفی برای نمایش ترک استفاده کرده اند. یکی از انواع مدلها برای نمایش ترک، مدل فنر پیچشی می باشد که اولین بار این مدل توسط دیماروگوناس (Dimarogonas) و چاندروس (Chondros) [8] پیشنهاد شد و بعداً توسط جیو (Ju) و دیگران [9] مورد استفاده قرار گرفت. در این مقاله نیز از همین مدل برای نمایش ترک استفاده شده است. یکی دیگر از مدلها، استفاده از ماتریس سختی تیر می باشد، که تشکیل ماتریس سختی نیز به روش های متفاوتی صورت می گیرد. یکی از این روش ها استفاده از تئوری مکانیک شکست می باشد که به کمک ضریب تمرکز تنش انجام می شود و توسط نحوی و جباری [10] مورد استفاده قرار گرفته است. ناندوانا (Nandwana) و مایتی (Maiti) [4] و Chaudhari و Maiti [11] از یک روش نیمه تحلیلی به نام تکنیک فروبنیوسی (frobniusi) برای به دست آوردن معادله مشخصه مربوط به فرکانس ها در تیرهای غیر یکنواخت استفاده کردند.

برخی از محققین نیز از روش های تجربی برای بررسی این مساله استفاده کرده اند. سیلوا (Silva) و گمز (Gomes) [12] با استفاده از روش تجربی، تیرهای مستقیم دو سر آزاد با سطح مقطع مستطیل شکل را که دارای ترک بودند مورد بررسی قرار دادند. سطح ترک ها با استفاده ماشین تراش با یک ابزار برش خیلی باریک، شبیه سازی شده بود. ترک ها در این آزمایش به صورت برش هایی عمود بر محور طولی تیرها با یک عمق کنترل شده شبیه سازی شده بودند، به گونه ای که لبه های آن ها در هنگام خمش دینامیکی تیر با یکدیگر تماس نداشته باشند. از طرفی ضخامت ترک ها در محدوده ای انتخاب شده بود که رفتار دینامیکی تیرها را تحت تاثیر قرار ندهد. به این دلیل ضخامت ترک ها کمتر از ۰/۵ میلیمتر انتخاب شد تا نتایج فرکانسی، مشابه باشد. لازم به ذکر است که تیری از جنس CK45 مورد استفاده قرار گرفته بود. شکل ۱ نشان دهنده بخشی از مراحل آزمایش می باشد و در شکل ۲ نحوه ارتباط اجزای مختلف مجموعه مونتاژ شده جهت اندازه گیری و سنجش فرکانس طبیعی را نشان می دهد.

در این مقاله تحلیل فرکانسی تیر دو سر آزاد به کمک روش ماتریس انتقال بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصله با نتایج روش تحلیلی برای حالت بدون ترک و نیز نتایج حاصل از مرجع [12] برای دو حالت ترکدار و بدون ترک، مقایسه

۱- دانشیار، farshid@um.ac.ir (نویسنده مخاطب)

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد

$$V = EI \frac{d^3 Z}{dx^3}, M = EI \frac{d^2 Z}{dx^2}, \theta = \frac{dZ}{dx}, Z$$

گردیده است .

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & \frac{C_i}{EI} & \frac{D_i}{EI} \\ p^4 D_i & A_i & \frac{B_i}{EI} & \frac{C_i}{EI} \\ EI p^4 C_i & EI p^4 D_i & A_i & B_i \\ EI p^4 B_i & EI p^4 C_i & p^4 D_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1}$$

یا

$$Z_i = R_i Z_L \quad (7)$$

در معادله (7)، R_i ، ماتریس انتقال برای المان i نامیده می شود و

$$A_i = \frac{\cos(pL_i) + \cosh(pL_i)}{2} \quad B_i = \frac{\sin(pL_i) + \sinh(pL_i)}{2p}$$

$$C_i = \frac{-\cos(pL_i) + \cosh(pL_i)}{2p^2} \quad D_i = \frac{-\sin(pL_i) + \sinh(pL_i)}{2p^3}$$

$$C_1 = \frac{Z_{i-1}}{2} \quad C_2 = -\frac{M_{i-1}}{2EI p^3} \quad C_3 = \frac{\theta_{i-1}}{2p} \quad C_4 = -\frac{V_{i-1}}{2EI p^3} \quad (9)$$

و L_i طول المان i ام می باشد .

در موقعیت ترک ، در مقادیر Z ، M و V پیوستگی و در مقدار یک پرش داریم . با توجه به این مطلب می توان متغیرها را روی دو طرف ترک به وسیله رابطه زیر با یکدیگر ارتباط داد :

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1}$$

$$Z_R = S_i Z_L \quad (10)$$

در این رابطه S_i ماتریس انتقال و k_i سختی فنر پیچشی می باشد که مقدار آن در معادله (1) داده شده است . برای تیری که دارای تکیه گاه میانی می باشد ، پیوستگی مطرح شده ، برای نیروی برشی وجود ندارد و در واقع مقدار نیروی برشی دارای ناپیوستگی ای برابر همان نیروی تکیه گاه میانی می باشد . حال به کمک معادله مشخصه تیر، فرکانس های آن را می توان محاسبه نمود. در صورتی که تیر دارای چندین ترک باشد ، باید با توجه به شکل ۳ ماتریس های انتقال متناظر با هر المان و هر ترک را به صورت حاصل ضرب ماتریس های انتقال بنویسیم تا این که ماتریس انتقال متناظر با کل تیر دارای ترک به دست آید. بنابراین رابطه زیر، از ضرب ساده ماتریس های انتقال میانی به دست می آید :

$$[H] = [R_n]_{4*4} [S_{n-1}]_{4*4} \dots [R_2]_{4*4} [S_1]_{4*4} [R_1]_{4*4} \quad (11)$$

روش ماتریس انتقال

تیر یکنواخت با n ترک ، که در موقعیت های مختلف قرار دارند را مطابق شکل (۱) و بر اساس رابطه زیر در نظر می گیریم

$$\xi = x/L = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \quad (0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < 1)$$

در این روش هر ترک با یک فنر پیچشی مدل شده که سختی آن [13] از رابطه زیر به دست می آید:

$$k_i = \frac{Eb h^2}{72\pi f(r_i)} \quad (1)$$

که ، k_i سختی فنر معادل با ترک i ، h ارتفاع و b عرض سطح مقطع، r_i اندازه بی بعد ترک ($r_i = a_i/h$) و a_i اندازه ترک می باشد .
 $f(r_i)$ که تابع انعطاف پذیری نامیده می شود ، به صورت زیر بیان می گردد :

$$f(r_i) = 0.6384(r_i)^2 - 1.035(r_i)^3 + 3.7201(r_i)^4 - 5.1773(r_i)^5 + 7.553(r_i)^6 - 7.3324(r_i)^7 + 2.4909(r_i)^8 \quad (2)$$

برای تیر اولر- برنولی معادله حاکم بر حرکت به صورت زیر است :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

با حل این معادله، رابطه مد شیب به صورت زیر به دست می آید :

$$EI \frac{d^4 Z}{dx^4} - \rho A \omega_i^2 Z = 0 \quad (4)$$

که ρ دانسیته جرمی (kg/m^3) ، A سطح مقطع (m^2) ، ω_i فرکانس طبیعی مد i ام (rad/s) ، E مدول الاستیسیته (N/m^2) ، I ممان اینرسی سطح (m^4) و

$$p = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (5)$$

می باشد .

پاسخ عمومی معادله (4) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$Z(x) = C_1 [\cos(px) + \cosh(px)] + C_2 [\cos(px) - \cosh(px)] + C_3 [\sin(px) + \sinh(px)] + C_4 [\sin(px) - \sinh(px)] \quad (6)$$

با استفاده از این رابطه می توان ارتباطی بین دو انتهای i و $i-1$ یک المان دلخواه برای خیز، شیب ، ممان و نیروی برشی به دست آورد که به ترتیب عبارتند از :

این ماتریس ها از معادلات (7) و (10) به دست می آیند . با اعمال شرایط مرزی ابتدا و انتهای تیر داریم:

$$[H][Z]=0$$

با توجه به این که معمولا دو شرط از چهار شرط مرزی صفر می باشد ، لذا به یک ماتریس 2×2 می رسیم که برای دست یافتن به جواب های غیر بدیهی ، باید دترمینان ضرایب ماتریس 2×2 برابر صفر باشد . یعنی داریم :

$$\det[H(\omega, \beta_1, \beta_2, \dots, k_1, k_2, \dots)]_{2 \times 2} = 0 \quad (12)$$

که در آن ω فرکانس طبیعی می باشد . برای تیر دو سر آزاد با یک ترک ، دترمینان مورد نظر به صورت زیر به دست می آید :

$$\begin{vmatrix} H_{11}^1 + \frac{H_{11}^2}{k} & H_{12}^1 + \frac{H_{12}^2}{k} \\ H_{21}^1 + \frac{H_{21}^2}{k} & H_{22}^1 + \frac{H_{22}^2}{k} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} H_{11}^1 &= C_2 A_1 + C_1 A_2 + B_1 B_2 + p^4 D_1 D_2 \\ H_{12}^1 &= C_2 B_1 + C_1 B_2 + A_1 D_2 + D_1 A_2 \\ H_{21}^1 &= B_2 A_1 + B_1 A_2 + p^4 D_1 C_2 + p^4 D_2 C_1 \\ H_{22}^1 &= C_2 A_1 + C_1 A_2 + B_1 B_2 + p^4 D_1 D_2 \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن پارامترهای A_i, B_i, C_i و D_i ($i=1,2$) به کمک روابط (8) به دست می آیند. حال به کمک رابطه (13) معادله مشخصه یک تیر دو سر آزاد ترکدار را می توان به صورت ذیل نوشت :

$$4(\cos\gamma\cosh\gamma-1)+\gamma/k \{2\cos\gamma(\beta-1) \sinh\gamma(\beta-1)-2\cosh\gamma(\beta-1) \sin\gamma(\beta-1)+2\cosh\gamma\beta \sin\gamma\beta-2\cos\gamma\beta\sinh\gamma\beta-\sin\gamma[\cosh\gamma e-\cosh\gamma]+\sinh\gamma[\cos\gamma+\cos\gamma e]\} \quad (14)$$

که در رابطه بالا $\beta=L_1/L, e=2\beta-1, \gamma=pL$. در صورتی که $l/k=0$ ، به معادله مشخصه تیر دو سر آزاد بدون ترک می رسیم . با حل معادله (14) می توان فرکانس های طبیعی سازه را به دست آورد .

مطالعه موردی و بحث

به منظور بررسی تاثیر ترک در تیرهای با سطح مقطع مستطیلی، تیری با مشخصات زیر را در نظر می گیریم: تیر فولادی با سطح مقطع مستطیل شکل ، دارای ابعاد $(m^2) 0.032 \times 0.016$ و طول $(m) 0.72$ که دارای مدول الاستیسیته $E=206 \text{ Gpa}$ و ضریب پواسان $\nu=0.29$ و دانسیته $\rho=7650(\text{kg}/\text{m}^3)$ می باشد .

تحلیل فرکانسی تیر مورد نظر برای دو نوع ترک ، یکی در صفحه افقی و دیگری در صفحه عمودی ، مطابق شکل ۴، بررسی شده است .

برای حالت ترک در صفحه افقی از نماد H و برای حالت ترک در صفحه عمودی از نماد V استفاده شده است .

در ادامه نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی تیر دو سر آزاد بدون ترک و یا دارای یک ترک به صورت H و V ارائه شده است . در جداول ۱ و ۶ به ترتیب تیر دو سر آزاد دارای یک ترک به صورت H و V مورد بررسی قرار گرفته و نتایج تجربی برای این دو نوع ترک در جداول ۲ و ۷ ذکر گردیده که توسط سیلوا (Silva) و گمز (Gomse) [13] به دست آمده است . همچنین تحلیل فرکانسی تیر دو سر آزاد بدون ترک به دو روش ماتریس انتقال و نیز به صورت تحلیلی در دو حالت H و V ارائه شده و نتایج تجربی که به ازای تعداد آزمایشات مختلف برای تیر دارای ترک ، مورد بررسی قرار گرفته ، مقایسه گردیده است . این نتایج در جداول ۴ و ۵ قابل مشاهده است .

نتیجه گیری

در این مقاله آنالیز فرکانسی یک سازه هوایی که به صورت تیر دو سر آزاد، بدون ترک و نیز با یک ترک مدل شده است ، ارائه شد . فرکانس های طبیعی تیر ترکدار به روش ماتریس انتقال بر پایه تحلیل نرمی محلی برای ترک محاسبه گردید . مقایسه نتایج حاصل از این روش با نتایج تجربی، نشان دهنده کارایی قابل قبول این روش می باشد.

جدول ۱- فرکانس های طبیعی تیر دو سر آزاد با یک ترک به روش ماتریس انتقال (H)

Crack Case	Actual Crack		Mode1	Mode 2	Mode 3
	Location β	Size α			
1	0.125	0.125	164.609	453.466	887.906
2	0.125	0.250	164.537	452.418	882.667
3	0.125	0.375	164.400	450.373	872.470
4	0.125	0.500	164.160	446.768	854.800
5	0.250	0.125	164.408	452.095	886.650
6	0.250	0.250	163.754	447.106	878.277
7	0.250	0.375	162.470	437.970	864.121
8	0.250	0.500	160.286	423.634	844.590
9	0.375	0.125	164.059	452.593	889.555
10	0.375	0.250	162.384	449.111	889.247
11	0.375	0.375	159.266	442.975	888.696
12	0.375	0.500	154.210	433.895	878.637
13	0.500	0.125	163.878	453.817	886.489
14	0.500	0.250	161.697	453.817	877.528
15	0.500	0.375	157.708	453.817	861.963
16	0.500	0.500	151.425	453.817	839.466

جدول ۲- فرکانس های طبیعی تیر دو سر آزاد با یک ترک به روش تجربی (H)

Crack Case	Actual Crack		Mode 1	Mode 2	Mode 3
	Location β	Size a	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.125	0.125	159.70	438.0	852.6
2	0.125	0.250	160.45	439.4	857.6
3	0.125	0.375	160.80	439.5	854.6
4	0.125	0.500	157.90	431.4	835.4
5	0.250	0.125	158.40	435.0	849.6
6	0.250	0.250	158.35	433.4	846.6
7	0.250	0.375	157.55	428.9	839.4
8	0.250	0.500	157.95	426.5	836.4
9	0.375	0.125	157.60	433.8	850.0
10	0.375	0.250	157.65	433.4	850.4
11	0.375	0.375	158.25	435.6	860.0
12	0.375	0.500	156.65	433.1	860.6
13	0.500	0.125	160.00	440.4	859.6
14	0.500	0.250	156.90	434.9	843.6
15	0.500	0.375	154.85	432.5	834.0
16	0.500	0.500	154.95	441.0	840.4

جدول ۵- فرکانس های طبیعی تیر دو سر آزاد بدون ترک بر حسب هر تیز به روش تجربی (V)

Crack Case	Actual Crack		Mode 1	Mode 2	Mode 3
	Location β	Size a	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.125	0.125	315.9	860.2	1654.5
2	0.125	0.250	316.3	862.6	1659.0
3	0.125	0.375	317.6	864.6	1663.0
4	0.125	0.500	314.7	856.8	1647.0
5	0.250	0.125	316.8	861.6	1657.5
6	0.250	0.250	317.7	864.4	1662.0
7	0.250	0.375	317.8	864.8	1662.5
8	0.250	0.500	323.8	878.8	1689.5
9	0.375	0.125	313.5	855.0	1646.0
10	0.375	0.250	315.4	858.6	1653.0
11	0.375	0.375	316.6	862.4	1659.5
12	0.375	0.500	328.8	873.4	1679.5
13	0.500	0.125	316.7	862.8	1658.0
14	0.500	0.250	315.6	859.4	1652.0
15	0.500	0.375	317.8	865.8	1664.5
16	0.500	0.500	320.6	873.0	1678.0

جدول ۳- فرکانس های طبیعی تیر دو سر آزاد بدون ترک بر حسب هر تیز

Methods	Type	Mode 1	Mode 2	Mode 3
		ω_1	ω_2	ω_3
تحلیلی	(H)	164.613	453.761	889.553
ماتریس انتقال	(H)	164.597	453.665	889.572
تحلیلی	(V)	329.263	907.628	1779.313
ماتریس انتقال	(V)	329.263	907.623	1779.319

جدول ۶- فرکانس های طبیعی تیر دو سر آزاد با یک ترک به روش ماتریس انتقال (V)

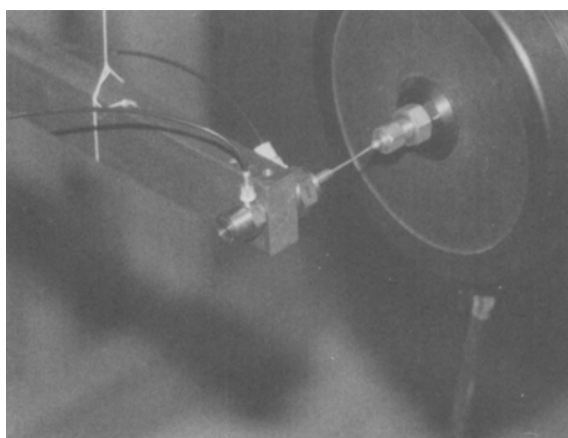
Crack Case	Actual Crack		Mode 1	Mode 2	Mode 3
	Location β	Size a	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.125	0.125	329.0	904.8	1765.2
2	0.125	0.250	328.5	896.2	1722.9
3	0.125	0.375	327.3	879.2	1643.3
4	0.125	0.500	325.4	845.5	1525.9
5	0.250	0.125	327.4	894.1	1756.3
6	0.250	0.250	322.2	857.7	1702.7
7	0.250	0.375	312.3	801.2	637.31
8	0.250	0.500	296.2	734.0	1578.9
9	0.375	0.125	324.7	898.1	1778.4
10	0.375	0.250	312.1	874.2	1776.3
11	0.375	0.375	291.0	840.9	1773.1
12	0.375	0.500	262.2	805.6	1769.5
13	0.500	0.125	323.3	907.6	1754.8
14	0.500	0.250	307.4	907.6	1694.8
15	0.500	0.375	282.2	907.6	1614.5
16	0.500	0.500	249.9	907.6	1533.76

جدول ۴- فرکانس های طبیعی تیر دو سر آزاد بدون ترک بر حسب هر تیز به روش تجربی (H)

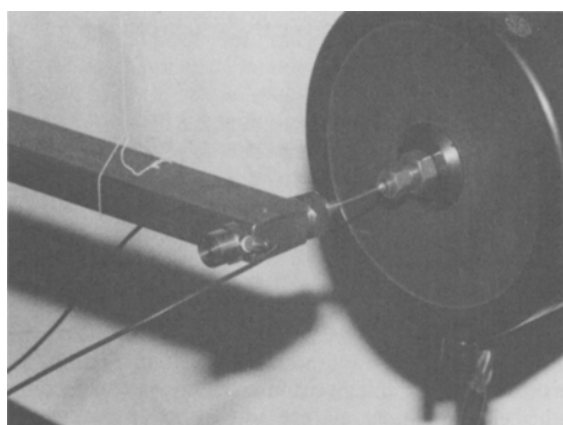
Crack Case	Actual Crack		Mode 1	Mode 2	Mode 3
	Location β	Size a	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.125	0.125	159.65	437.8	852.8
2	0.125	0.250	160.40	440.7	861.6
3	0.125	0.375	160.75	441.0	862.6
4	0.125	0.500	158.00	433.9	847.0
5	0.250	0.125	158.60	435.9	850.8
6	0.250	0.250	158.80	436.3	851.8
7	0.250	0.375	158.60	435.7	850.4
8	0.250	0.500	159.60	438.4	855.0
9	0.375	0.125	157.85	433.6	849.6
10	0.375	0.250	158.9	434.9	850.0
11	0.375	0.375	160.45	439.9	859.8
12	0.375	0.500	160.80	440.9	861.4
13	0.500	0.125	160.45	440.3	860.6
14	0.500	0.250	158.40	434.7	848.8
15	0.500	0.375	157.70	432.4	845.4
16	0.500	0.500	160.85	440.8	861.4

- [10] H. Nahvi, M. Jabbari, Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1477–1497.
- [11] T. D. Chaudhari and S. K. Maiti. A study of vibration of geometrically segmented beams with and without crack. *International Journal of Solids and Structures* 37, 761–779 (2000)
- [12] J.M. Silva, A.J.L. Gomes, Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams, *Experimental Mechanics* 30 (1) (1990) 20–2.
- [13] Ostachowicz WM, Krawczuk M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *J Sound Vib*, 1991;150:191–201.

شکل ها و نمودار



(الف) پیکربندی داخلی سطحی



(ب) پیکر بندی خارج سطحی

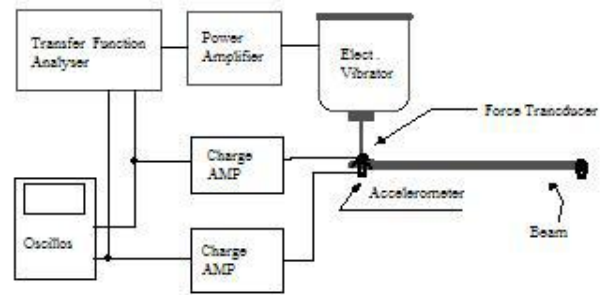
شکل ۱- نصب آزمایشی تیر دو سر آزاد [13]

جدول ۷- فرکانس های طبیعی تیر دو سر آزاد با یک ترک بر حسب هر تیز به روش تجربی (V)

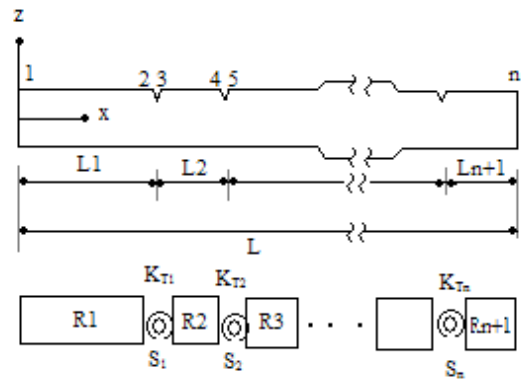
crack Case	Actual Crack		Model	Mode 2	Mode 3
	Location β	Size α	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.125	0.125	316.0	859.4	1649.0
2	0.125	0.250	316.1	857.8	1632.5
3	0.125	0.375	316.6	851.4	1593.5
4	0.125	0.500	313.0	826.6	1515.0
5	0.250	0.125	315.9	855.2	1674.5
6	0.250	0.250	314.1	840.6	1626.5
7	0.250	0.375	308.8	805.2	1580.5
8	0.250	0.500	305.4	870.4	1534.0
9	0.375	0.125	311.7	853.8	1646.5
10	0.375	0.250	307.1	842.4	1651.5
11	0.375	0.375	296.2	825.0	1655.5
12	0.375	0.500	279.0	805.2	1672.5
13	0.500	0.125	313.0	863.2	1645.5
14	0.500	0.250	303.0	859.8	1606.5
15	0.500	0.375	291.5	866.0	1574.0
16	0.500	0.500	265.1	873.2	1498.0

مراجع

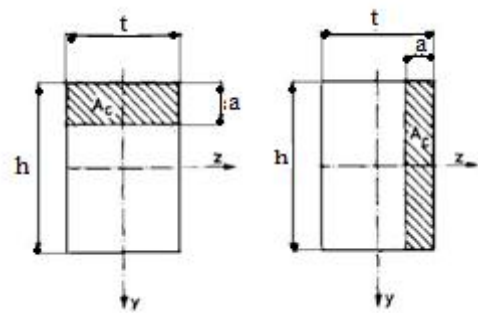
- [1] Dimarogonas A.D., 1996, Vibration of cracked structures: a state of the art review, *Engineering Fracture Mechanics* 55(5) 831–857.
- [2] Cawley P., Adams R.D., 1979, Structures from measurements of natural frequencies, *Journal of Strain Analysis* 14 49–57.
- [3] Krawczuk M., Ostachowicz W.M., 1995, Modeling and vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack, *Journal of Sound and Vibration* 183 (1) 69–89.
- [4] Nandwana B.P., Maiti S.K., 1997, Detection of the location and size of a crack in stepped cantilever beams based on measurements of natural frequencies, *Journal of Sound and Vibration* 203 (3) 435–446.
- [5] S. Chinchalkar, Determination of crack location in beams using natural frequencies, *Journal of Sound and Vibration* (2001) 247(3), 417–429
- [6] Shen M.H.H., Pierre C., 1994, Free vibration of beams with a single-edge crack, *Journal of Sound and Vibration* 170 (2) 237–259.
- [7] D.P. Patil, S.K. Maiti, Detection of multiple cracks using frequency measurements, *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003) 1553–1572.
- [8] Dimarogonas, A.D. and Chondros, T.G., "Identification of Cracks in Welded Joints of Complex Structures," *J. Sound and Vib.*, 69 (4), (1980).
- [9] Ju, ED., Wong, E.T. and Paez, T.L., "Modal Method in Diagnosis of Fracture Damage in Simple Structures," *Productive Applications of Mechanical Vibrations*, ASME Publications (1982).



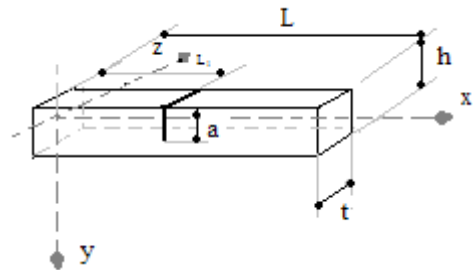
شکل ۲- شمانیک ابزار اندازه گیری [13]



شکل ۳- مدل تیر دارای ترک



(ب) ترک به صورت V (الف) ترک به صورت H



(ج) تعریف موقعیت ترک

شکل ۴- تیر دو سر آزاد دارای ترک