

## بهبود روش ردیابی ترک در تیر اویلر-برنولی بر مبنای اندازه‌گیری فرکانسهای ارتعاشی تیر

انوشیروان فرشیدیانفر<sup>۱</sup>، مهدی راغبی<sup>۲</sup>

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

Farshid@um.ac.ir

### چکیده

در این مقاله روشی برای یافتن موقعیت و اندازه ترکهای یک طرفه در تیر اویلر برنولی با شرایط مرزی مختلف به کمک اندازه‌گیری فرکانس ارائه شده است. برای مدلسازی ارتعاشات عرضی تیر از روش ماتریسهای انتقال (Transfer Matrix Method) استفاده شده و ترک نیز با یک فنر پیچشی مدل شده است. تیر به تعدادی المان تقسیم و به هر بخش یک پارامتر وجود ترک نسبت داده میشود، سپس رابطه ای خطی میان تغییرات فرکانس ارتعاشات تیر و پارامتر وجود ترک بدست می آید. با اندازه‌گیری تغییرات فرکانس ارتعاشات طبیعی تیر به علت وجود ترک و یافتن حلی مناسب برای رابطه خطی ذکرشده، میتوان موقعیت و اندازه ترک را پیش بینی نمود.

واژه‌های کلیدی: روش ماتریس انتقال - ردیابی ترک - مدلسازی ارتعاشی تیر ترکدار

### مقدمه

بازرسی و عیب‌یابی اجزای حساس و بحرانی یک دستگاه یا سازه، امری لازم و ضروری برای ارزیابی عمر آن میباشد. یکی از روشهای ارزیابی عمر باقیمانده یک وسیله توجه پیوسته به تغییرات در رفتار دینامیکی یا استاتیکی آن میباشد. معمولاً با ایجاد ترک در یک وسیله، سفتی سازه تشکیل دهنده دچار تغییراتی محلی شده و در نتیجه رفتار ارتعاشی سازه دستخوش تغییر می‌گردد. اگر ترکی در یک وسیله بوجود آید، هنوز میتوان از آن استفاده نمود؛ اما وجود ترک، مراقبت بیشتری را طلب می‌نماید.

بسیاری از مطالعاتی که در مورد تیرهای شامل چند ترک انجام شده است، مسأله مستقیم یعنی مدلسازی تیر ترکدارو تعیین فرکانسهای ارتعاشی تیر ترکدار را بررسی نموده‌اند. اما مقالاتی نیز [1-4]، مسأله معکوس یعنی ردیابی ترک از روی پاسخ دینامیکی تیر را بررسی نموده‌اند. مسأله ردیابی چند ترک از پیچیدگی بسیار بیشتری نسبت به تعیین موقعیت و اندازه یک ترک در طول تیر برخوردار است. برای حل این مسأله Choy et al. [5]، اثر ترک را به صورت کاهش صلبیت خمشی

۱- استادیار، عضو هیأت علمی دانشگاه

۲- دانشجوی دکتری

تیر ( $EI$ )، در اطراف ترک مدل کرده و حل را به کمک روش ماتریس انتقال بدست آورده اند. محققان دیگری به سرپرستی Zheng et al. [6,7]، از روش سری فوریه اصلاح شده استفاده کرده اند.

روش تشخیص ترک می‌تواند بر اساس بررسی ارتعاشات طولی، ارتعاشات عرضی و یا کوپلینگی از ارتعاشات عرضی، طولی و پیچشی باشد. ولی با توجه به بررسی نتایج، ارتعاشات عرضی تیر پاسخهای دقیقتری را ارائه می‌کند. اکثر محققین در تشخیص ترک این نوع تحلیل را لحاظ می‌کنند [8]. از سوی دیگر عموماً در تحلیلها ترک را از نوع باز (open crack) در نظر می‌گیرند تا از اثرات غیر خطی بودن مسأله که ناشی از بسته شدن ترک می‌باشد صرف‌نظر شود. برخی مطالعات آزمایشگاهی نیز برای بررسی درستی مدلها انجام شده است. در اکثر موارد ترکها با ایجاد یک برش ریز در نمونه ایجاد شده است. برخی از نتایج آزمایشگاهی توسط Cawley et al. [9]، و Ruotolo et al. [2]، برای چند ترک ارائه شده است.

روش ماتریس انتقال که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است دارای مزیت‌های زیادی در مقایسه با روش المان محدود می‌باشد. به طور مشخص می‌توان گفت اندازه دترمینان معادله مشخصه در این روش به طور چشم‌گیری کوچک شده و اندازه دترمینان به  $n + 2$  کاهش می‌یابد که  $n$  تعداد تکیه گاههای صلب در طول دهنه تیر می‌باشد و برخلاف روش المان محدود به تعداد المانهای در نظر گرفته شده برای تیر بستگی ندارد.

در روش ارائه شده توسط Liang et al. [3]، برای ردیابی ترک، تیر به چندین قسمت تقسیم میگردد که هر قسمت میتواند دارای خرابی یا ترک باشد، وجود ترک در هر المان را با کمک یک پارامتر خرابی میتوان نشان داد. در این پژوهش نیز از این روش و مدلسازی ترک با فنر پیچشی استفاده خواهد شد. آنگاه میتوان نشان داد که بین تغییرات در فرکانس ارتعاشات تیر ترکدار با تیر بدون ترک و پارامتر خرابی در المانها رابطه ای خطی وجود دارد. با اندازه گیری فرکانس ارتعاشات تیر بدون ترک و تیر ترکدار و استفاده از رابطه خطی مذکور میتوان پارامترهای خرابی هر المان را محاسبه نمود. آنگاه به کمک روشی که در ادامه توضیح داده میشود، میتوان ترک را ردیابی نمود.

مزیت این پژوهش نسبت به سایر کارهای انجام شده در مراجع [3] و [8] سرعت و دقت بیشتر در ردیابی ترکها می باشد که در بخشهای بعدی با توضیح بیشتری بررسی خواهد شد.

### مدلسازی ارتعاشی تیر ترکدار

تیری پیوسته و همگن با  $n$  ترک در طول تیر را مطابق شکل ۱ در نظر می‌گیریم. ترکها در طول تیر در موقعیتهای  $\xi = x/l = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  قرار گرفته‌اند که در این رابطه  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < 1$  می‌باشد. میتوان ترکها را با فنرهای پیچشی مدل نمود. سختی هر یک از فنرها از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد: (اثبات روابط ۱ و ۲ در ضمیمه آمده است) [10]

$$K_i = \frac{Ebh^2}{72\pi f(\eta_i)} \quad (1)$$

که در این رابطه  $\eta_i = a_i/h$ ، اندازه بدون بعد شده ترک،  $a_i$  اندازه ترک،  $b$  ضخامت تیر،  $h$  عرض تیر و  $E$  مدول الاستیسیته ماده سازنده تیر می‌باشد و تابع انعطاف پذیری  $f(\eta_i)$  نیز توسط رابطه ذیل بیان میشود:

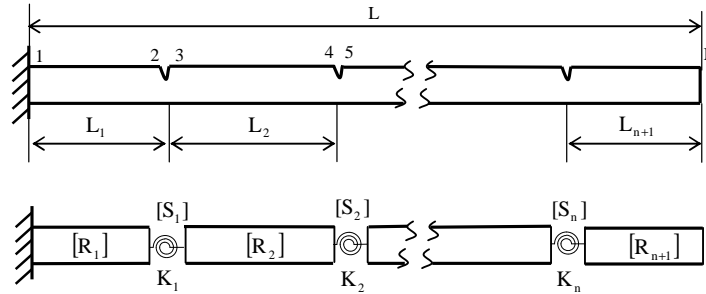
$$f(\eta_i) = 0.6384(\eta_i)^2 - 1.035(\eta_i)^3 + 3.7201(\eta_i)^4 - 5.1774(\eta_i)^5 + 7.553(\eta_i)^6 - 7.3324(\eta_i)^7 + 2.4909(\eta_i)^8 \quad (2)$$

این رابطه به ازای  $\eta_i \leq 0.6$  دارای دقت بسیار خوبی می باشد. [11]

معادله ارتعاشی تیر اویلر- برنولی به صورت زیر بیان میشود:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

براساس روش جداسازی متغیرها پاسخ معادله فوق را میتوان به صورت:  $y(x,t) = Z(x)\cos(\omega t)$  در نظر گرفت که در آن شکل مد  $Z(x)$  را میتوان از رابطه ذیل بدست آورد:



شکل ۱- مدل‌سازی ترک با فنر پیچشی

$$Z(x) = C_1[\cos(px) + \cosh(px)] + C_2[\cos(px) - \cosh(px)] + C_3[\sin(px) + \sinh(px)] + C_4[\sin(px) - \sinh(px)] \quad (۴)$$

که در رابطه فوق  $p^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$  می باشد. به کمک رابطه فوق میتوان جابجایی  $Z$ ، شیب  $\theta = \frac{dZ}{dx}$ ، ممان خمشی  $M = EI \frac{d^2Z}{dx^2}$  و نیروی برشی  $V = EI \frac{d^3Z}{dx^3}$  در دو انتهای  $i$  و  $i-1$  از یک المان دلخواه را به فرم زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} A_i & B_i & C_i/EI & D_i/EI \\ p^4 D_i & A_i & B_i/EI & C_i/EI \\ EI p^4 C_i & EI p^4 D_i & A_i & B_i \\ EI p^4 B_i & EI p^4 C_i & p^4 D_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_L \quad \text{یا} \quad Z_R = [R_i] Z_L \quad (۵)$$

در رابطه فوق  $[R_i]$  ماتریس انتقال برای المان  $i$ ام تیر نامیده میشود و

$$A_i = \frac{\cos(pl_i) + \cosh(pl_i)}{2}, \quad B_i = \frac{\sin(pl_i) + \sinh(pl_i)}{2p} \quad (۶)$$

$$C_i = \frac{-[\cos(pl_i) - \cosh(pl_i)]}{2p^2}, \quad D_i = \frac{-[\sin(pl_i) - \sinh(pl_i)]}{2p^3}$$

در رابطه بالا  $l_i$  طول المان  $i$ ام تیر میباشد.

درمحل ترک  $Z, M, V$  پیوسته هستند و تنها  $\theta$  یا شیب تیر دارای ناپیوستگی است. در نتیجه میتوان پارامترهای دو سمت ترک را به صورت زیر به هم مربوط ساخت:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/K_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad \text{یا} \quad Z_R = [S_i] Z_L \quad (۷)$$

در رابطه فوق  $K_i$  سختی فنر پیچشی است که توسط رابطه (۱) قابل محاسبه می باشد. همچنین در صورت وجود تکیه‌گاه میانی، در نیروی برشی تیر  $V$ ، ناپیوستگی به وقوع می پیوندد.

برای یک تیر مشخص ماتریس انتقال کلی یعنی ماتریسی که مشخصات گره  $N$ ام را به گره اول ربط میدهد، (شکل ۱)

$$[Z]_N = [\bar{H}][Z]_1 \quad \text{با ضرب کردن ماتریسهای انتقال میانی قابل محاسبه است. یعنی:}$$

$$[\bar{H}] = [R_{n+1}]_{4 \times 4} [S_n]_{4 \times 4} [R_n]_{4 \times 4} [S_{n-1}]_{4 \times 4} \dots [R_2]_{4 \times 4} [S_1]_{4 \times 4} [R_1]_{4 \times 4} \quad (۸)$$

که ماتریسهای انتقال  $[R]$  و  $[S]$  در روابط (۵) و (۷) تعریف شده اند. با اعمال شرایط مرزی مشخص در انتهای تیر میتوان معادله ای به فرم  $[H][Z] = 0$  به دست آورد. معمولاً دو پارامتر از چهار پارامتر در انتهای تیر صفر است و این باعث میشود که ماتریس مشخصه  $[H]$  به یک ماتریس  $2 \times 2$  بدل شود. بنابراین معادله مشخصه ارتعاشات سیستم به صورت ذیل خواهد بود:

$$\det[H(\omega, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, k_1, k_2, k_3, \dots)]_{2 \times 2} = 0 \quad (۹)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی است. برای یک تیر یکسرگیردار با یک ترک معادله مشخصه به صورت زیر می باشد:

$$\begin{vmatrix} H_{11}^1 + \frac{H_{11}^2}{K} & H_{12}^1 + \frac{H_{12}^2}{K} \\ H_{21}^1 + \frac{H_{21}^2}{K} & H_{22}^1 + \frac{H_{22}^2}{K} \end{vmatrix} = 0 \quad (۱۰)$$

$$H_{11}^1 = p^4 C_1 C_2 + p^4 B_1 D_2 + A_1 A_2 + p^4 D_1 B_2, \quad H_{11}^2 = EI p^4 A_1 D_2 \quad \text{که در آن:}$$

$$H_{12}^1 = p^4 D_1 C_2 + p^4 C_1 D_2 + B_1 A_2 + A_1 B_2, \quad H_{12}^2 = EI p^4 B_1 D_2$$

$$H_{21}^1 = p^4 C_1 B_2 + p^4 B_1 C_2 + p^4 A_1 D_2 + p^4 D_1 A_2, \quad H_{21}^2 = EI p^4 A_1 C_2$$

$$H_{22}^1 = p^4 D_1 B_2 + p^4 C_1 C_2 + p^4 B_1 D_2 + A_1 A_2, \quad H_{22}^2 = EI p^4 B_1 C_2$$

در روابط بالا  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i = 1, 2$ ) توسط رابطه (۶) محاسبه می شوند. همچنین  $L_i$  جایگزین  $l_i$  شده که در آن  $L_2 = (1 - \beta)L$  و  $L_1 = \beta L$  بوده که  $\beta$  موقعیت بدون بعد ترک را در طول تیر نشان می دهد.

برای تیر یکسر گیردار با یک ترک در طول دهنه میتوان معادله مشخصه را به صورت زیر بدست آورد:

$$4(1 + \cosh \lambda \cos \lambda) + \frac{\lambda}{K} \{ \sinh \lambda (\cos \lambda + \cos \lambda e) - \sin \lambda (\cosh \lambda + \cosh \lambda e) + 2 \cosh(\lambda \beta) \sin(\lambda \beta) - 2 \cos(\lambda \beta) \sinh(\lambda \beta) - 2 \sin[\lambda(1 - \beta)] \cosh[\lambda(1 - \beta)] + 2 \cos[\lambda(1 - \beta)] \sinh[\lambda(1 - \beta)] \} = 0 \quad (۱۱)$$

همچنین با روندی مشابه در مورد تیر با تکیه گاههای ساده نیز میتوان نوشت:

$$4 \sin \lambda \sinh \lambda + \frac{\lambda}{K} \{ \sinh \lambda (\cos \lambda - \cos \lambda e) + \sin \lambda (\cosh \lambda - \cosh \lambda e) \} = 0 \quad (۱۲)$$

که در روابط فوق  $\bar{K} = KL/(EI)$ ،  $e = 2\beta - 1$ ،  $\beta = L_1/L$ ،  $\lambda = pL$  و  $L$  طول تیر می باشد. اگر در روابط فوق، انعطاف پذیری  $(1/\bar{K})$  صفر در نظر گرفته شود، معادلات مشخصه تیر بدون ترک در حالت یکسر گیردار و با تکیه گاه ساده به ترتیب بدست خواهند آمد. با حل کردن معادلات (۱۱) و (۱۲) میتوان مسأله مستقیم را حل کرده و فرکانسهای تیر ترکدار را محاسبه نمود. همچنین شکل مدهای مربوط را میتوان از معادله (۴) بدست آورد.

## ردیابی کردن ترک

برای ردیابی کردن یک ترک در یک تیر تک دهنه یکسر گیردار یا تیر با تکیه گاه ساده به ترتیب معادلات (۱۱) و (۱۲) معادلات اصلی ما خواهند بود. اما برای ردیابی کردن چند ترک نمیتوان مستقیماً از این معادلات استفاده نمود. در اینجا از روش تقریبی که توسط [4] Hu et al. ارائه شده است، استفاده می نماییم. نسبت رایلی به کمک رابطه زیر تعریف میشود:

$$\omega^2 = \mu = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{d^2 Z}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^L \rho A Z^2 dx} = \frac{U}{V} \quad (۱۳ \text{ الف})$$

که در آن

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{d^2 Z}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \psi dx, \quad \psi = EI \left( \frac{d^2 Z}{dx^2} \right)^2 \quad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳) انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر و  $V$  انرژی جنبشی تیر می‌باشد.

برای تغییرات کوچک در فرکانس تیر میتوان نوشت:

$$\frac{\Delta \mu}{\mu} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta V}{V} \quad (۱۴)$$

اگر ترک موجود در تیر عمود بر محور تیر باشد، در ارتعاشات عرضی تیر اثری بر میزان انرژی جنبشی تیر نخواهد داشت و میزان تغییرات انرژی جنبشی تیر ترکدار ( $\Delta V$ ) صفر است. میتوان اثر محلی ترک بر روی شکل مد تیر را با پارامتر خرابی  $S$  نشان داد.  $S$  شاخص عیب و نقصان در تیر نامیده میشود. در واقع این شاخص نشان دهنده بزرگی انرژی کرنشی ذخیره شده در فتر پیچشی است.  $S = 0$  نشان دهنده عدم وجود ترک و  $S = 1$  نشان دهنده ترک کامل و شکست تیر می باشد. حال تغییر در انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر به علت وجود ترک را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^L S \psi dx \quad (۱۵)$$

در نتیجه میتوان معادله (۱۴) را به فرم زیر نوشت:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^L S \psi dx}{\int_0^L \psi dx} \quad (۱۶)$$

اگر تیر به  $m$  المان تقسیم شده باشد و المان  $i$ ام دارای پارامتر نقص  $S_i$  باشد، میتوان نوشت:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = 2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{I_0} \int_{L_i} \psi dx S_i \quad (۱۷)$$

که در این رابطه:  $I_0 = 4 \int_L \psi dx$  و  $L_i$  طول المان  $i$ ام می باشد. در مورد فرکانس  $n$ ام تیر میتوان نوشت:

$$\frac{\Delta \omega_n}{\omega_n} = 2 \sum_{i=1}^m \int_L g_n(\xi) L d\xi S_i, \quad g_n(\xi) = \psi_n / I_{0n} \quad (۱۸)$$

که در رابطه بالا  $I_{0n}$ ,  $\psi_n$ ,  $g_n(\xi)$  مقادیر مربوط به شکل مد  $n$ ام می‌باشند. رابطه (۱۸) در واقع رابطه‌ای خطی میان تغییرات فرکانس ارتعاشات تیر و پارامتر وجود ترک،  $S_i$  بوجود می آورد. در رابطه فوق:  $\Delta \omega_n = \omega_n - \omega_{nc}$  است که  $\omega_n$  و  $\omega_{nc}$  به ترتیب فرکانس ارتعاشی درمد  $n$ ام برای تیر بدون ترک و تیر ترکدار می باشد.

بنابراین برای تیری که به  $m$  المان تقسیم شده است و تعداد فرکانسهای اندازه گیری شده آن  $q$  است، میتوان معادله (۱۸) را به فرم زیر نوشت:

$$\left\{ \frac{\Delta \omega}{\omega} \right\}_{q \times 1} = 2 [H]_{q \times m} \{S\}_{m \times 1} \quad (۱۹)$$

عناصر ماتریس  $[H]$  را میتوان به صورت روبرو نوشت:

$$h_{ij} = \int_{L_j} g_i(\xi) L_j d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad \& \quad j = 1, 2, \dots, m$$

در این رابطه  $i$  شماره مد و  $j$  شماره المان تیر میباشد. به عنوان مثال برای یک تیر با تکیه‌گاه ساده در دو طرف، شکل مد  $n$ ام به صورت روبرو محاسبه میشود:

$$Z_n(\xi) = \sin(n\pi\xi), \quad Z'_n(\xi) = n\pi \cos(n\pi\xi), \quad Z''_n(\xi) = -n^2\pi^2 \sin(n\pi\xi)$$

از اینرو میتوان نوشت:

$$g_n(\xi) = \frac{[-n^2\pi^2 \sin(n\pi\xi)]^2}{4 \int_0^1 [-n^2\pi^2 \sin(n\pi\xi)]^2 d\xi} = \frac{1}{2} \sin^2(n\pi\xi)$$

$$h_{nj} = \int_{L_j} \frac{1}{2} \sin^2(n\pi\xi) L d\xi = \frac{L_j}{4} \left[ (\xi_2 - \xi_1) - \frac{1}{2n\pi} [\sin(2n\pi\xi_2) - \sin(2n\pi\xi_1)] \right] \quad (20)$$

بنابراین برای ردیابی کردن ترک پس از حل معادله (۱۹) و یافتن مقادیر شاخص عیب  $S_i$  میتوان در مورد خرابی و داشتن ترک المانهای تیر اظهار نظر نمود.

### حل مثال عددی:

#### مثال اول: الف - محاسبه فرکانس تیر ترکدار

در این بخش فرکانسهای طبیعی تیری ترکدار با تکیه‌گاههای ساده را محاسبه می‌نماییم. برای اطمینان از درستی محاسبات از مشخصات تیر داده شده در مرجع [4] استفاده می‌کنیم. مشخصات تیر و همچنین موقعیت دو ترک در طول تیر در جدول شماره ۱ آمده است. در سطر اول فرکانسهای طبیعی تیر بدون ترک از رابطه  $\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$  محاسبه شده است. در سطر دوم فرکانسهای طبیعی تیر دارای ترک از مرجع [4] آورده شده است، که به کمک نرم افزار SAP84 که اساس آن روشهای المان محدود می‌باشد، محاسبه شده است. در سطر سوم به کمک روش ماتریسهای انتقال که در رابطه (۹) توضیح داده شد، پنج فرکانس اول تیر ترکدار محاسبه شده است. همانطور که مشاهده میشود جوابهای حاصل از دو روش با دقت خوبی برهم منطبق می‌باشند.

جدول ۱: فرکانسهای طبیعی تیر دوسر مفصل دارای دو ترک

موقعیت و اندازه ترک				روش حل	فرکانس طبیعی تیر rad/sec.				
$\beta_1$	$a_1/h$	$\beta_2$	$a_2/h$		$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
تیر بدون ترک				حل کلاسیک	59.007	236.029	531.065	944.116	1475.182
				مرجع [4]	58.625	235.142	528.096	942.515	1469.103
0.25	0.07971	0.45	0.0986	روش TMM	58.531	234.928	527.368	942.124	1467.620

$$E = 2.8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \rho = 2350 \text{ kg/m}^3, L = 10 \text{ m}, h = 0.6 \text{ m}, B = 0.2 \text{ m}$$

#### ب - ردیابی کردن ترک

با محاسبه مقادیر عددی  $S_i$  از معادله (۱۹) اطلاعاتی راجع به مقدار عیب و خرابی در المانهای مختلف تیر بدست می‌آید. اگر  $q$  یعنی تعداد فرکانسهای اندازه‌گیری شده از تعداد المانهای تیر  $m$  کمتر باشد، پارامترهای خرابی مجهول را میتوان به کمک روش معکوس ساختگی<sup>۱</sup> که در ادامه توضیح داده میشود محاسبه نمود. [3] طرفین رابطه (۱۹) را در ترانهاده ماتریس  $[H]$  ضرب می‌کنیم:

$$[H]_{m \times q}^T \left\{ \frac{\Delta \omega}{\omega} \right\}_{q \times 1} = 2 [H]_{m \times q}^T [H]_{q \times m} \{S\}_{m \times 1} = 2 [HH]_{m \times m} \{S\}_{m \times 1} \quad (21)$$

اکنون با ضرب کردن طرفین رابطه (۲۱) در معکوس ماتریس  $[HH]$ ، میتوان بردار  $\{S\}_{m \times 1}$  را که میزان وجود ترک در هر المان را نشان میدهد، بدست آورد.

$$\{S\}_{m \times 1} = 0.5 [HH]_{m \times m}^{-1} [H]_{m \times q}^T \left\{ \frac{\Delta \omega}{\omega} \right\}_{q \times 1} \quad (22)$$

ممکن است برخی از  $S_i$ های بدست آمده در رابطه (۲۲) مقادیری منفی باشند. از آنجا که مقادیر مثبت  $S_i$  نشان دهنده کاهش سطح مقطع تیر به دلیل وجود ترک می‌باشند، میتوان گفت یک مقدار منفی به معنای افزایش سطح مقطع تیر است. از

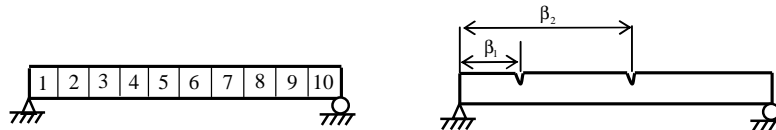
<sup>1</sup> Pseudo-inverse

نظر فیزیکی این مفهوم غیر واقعی است. برای حل کردن این مشکل میتوان فرض کرد که المان مورد نظر دارای هیچگونه ترکی نیست و در نتیجه پارامتر خرابی مربوط را برابر صفر در نظر گرفت. این فرایند تا آنجا ادامه می‌یابد که تمام پارامترهای عیب و خرابی حاصل همگی مثبت باشند.

برای ردیابی کردن ترک به این صورت عمل میشود که در ابتدا پارامتر خرابی مربوط به المان  $i$ ام را در نظر گرفته و بقیه پارامترهای مربوط به سایر المانها صفر می‌شوند. با توجه به معادله (۱۹) میتوان تغییر در فرکانسهای طبیعی تیر  $\Delta\omega_n$  را محاسبه نمود. سپس از رابطه  $\omega_{nc} = \omega_n - \Delta\omega_n$  میتوان  $\omega_{nc}$  یعنی فرکانس ارتعاشی تیر ترکدار را محاسبه نمود. اکنون با توجه به معادلات (۱۱) و (۱۲) میتوان تغییرات  $\bar{K}$  را بر حسب  $\beta$  یعنی موقعیت ترک در طول تیر رسم نمود. اگر اینکار را برای سه مد یا تعداد بیشتری از مدها انجام دهیم از آنجا که سختی فنر پیچشی معادل ترک، مستقل از مد فرکانسی تیر میباشد، نقطه برخورد این منحنیها، موقعیت ترک و سختی فنر معادل را خواهد داد. با بدست آمدن  $\bar{K}$  اندازه ترک را میتوان به کمک رابطه (۲) محاسبه نمود.

برای ردیابی کردن ترک فرکانسهای طبیعی تیر ترکدار و همچنین تیر بدون ترک لازم است، که این فرکانسها در قسمت الف بدست آمد. مطابق شکل ۲، ده المان در طول تیر با شرایط مرزی دو سرمفصل در نظر می‌گیریم. از پنج فرکانس ارتعاشی اول تیر (جدول ۱) برای بدست آوردن دستگاه معادلات خطی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\omega \\ \omega \end{Bmatrix}_{5 \times 1} = 2[H]_{5 \times 10} \{S\}_{10 \times 1} \quad (23)$$



شکل ۲ الف: تیر دو سر مفصل دارای دو ترک      ب: نحوه المان بندی تیر برای ردیابی کردن ترکها

حال میتوان ده پارامتر خرابی مجهول را به کمک روش معکوس ساختگی محاسبه نمود.

با حل کردن معادله (۲۳) مقادیر زیر برای بردار  $S$  بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \{S\} &= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}^T \\ &= \{0.4760, 0.0748, 0.1482, 0.5388, 0.2012, -0.4282, -0.6158, -0.0022, -0.0411, -0.8502\}^T \\ &S_5, S_6, S_7, S_8 \text{ و } S_9 \text{ دارای مقادیر منفی هستند، بنابراین آنها را مساوی صفر قرار داده و مسأله دوباره حل می‌گردد:} \\ &\text{مرحله دوم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{S\} &= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}^T \\ &= \{0.00075, -0.00430, 0.04844, -0.00872, 0.06635\}^T \end{aligned}$$

اگر مقادیر منفی را صفر نموده و عمل تکرار شود، نتایج زیر بدست می‌آید:  
مرحله سوم:

$$\begin{aligned} \{S\} &= \{S_1, S_3, S_5\}^T \\ &= \{-0.00899, 0.04295, 0.06309\}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{S\} &= \{S_3, S_5\}^T \\ &= \{0.04153, 0.06108\}^T \end{aligned} \quad \text{مرحله چهارم:}$$

در مرحله چهارم تمام مقادیر بردار  $S$  مثبت هستند. در نتیجه میتوان گفت که تیر دارای دو ترک در المانهای سوم و پنجم میباشد. برای پیش بینی موقعیت ترک در المان سوم بردار  $S$  به صورت زیر در نظر گرفته میشود:

$$\{S_3, S_5\} = \{0.04153, 0\}$$

آنگاه به کمک رابطه (۲۳) تغییرات فرکانسهای ارتعاشی تیر محاسبه می‌گردد:

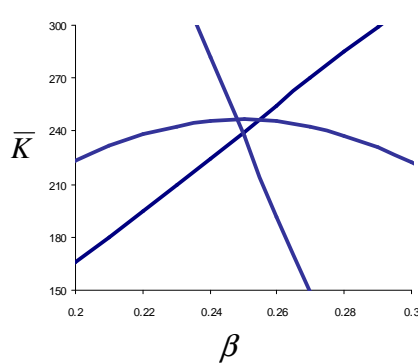
$$(i) \frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = 0.20763\%, \quad \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = 0.40186\%, \quad \frac{\Delta\omega_3}{\omega_3} = 0.20763\%,$$

این تغییرات قابل ملاحظه هستند و نشان می‌دهند که در المان سوم ترک وجود دارد. در نهایت برای پیش بینی موقعیت ترک در المان پنجم المانهای بردار  $S$  به صورت روبرو در نظر گرفته میشود:  $\{S_3, S_5\} = \{0, 0.06108\}$  و به کمک رابطه (۲۳) تغییرات فرکانسهای ارتعاشی تیر محاسبه می‌گردد:

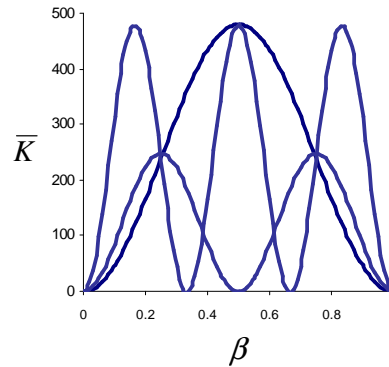
$$(ii) \frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = 0.591107\%, \quad \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = 0.074266\%, \quad \frac{\Delta\omega_3}{\omega_3} = 0.459497\%,$$

این تغییرات نیز وجود ترک را در المان ششم نشان می‌دهند.

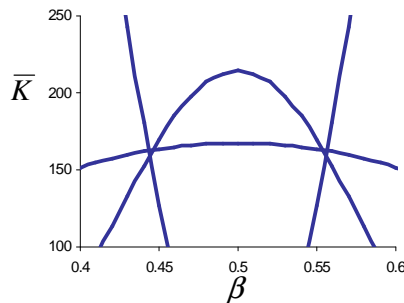
به منظور پیش بینی موقعیت دقیق ترک در المان سوم، تغییرات فرکانسی داده شده در مجموعه (i) برای رسم منحنی تغییرات سختی فنر بر حسب موقعیت ترک  $\beta$  در طول تیر و با فرض وجود تنها یک ترک به کمک معادله (۱۲) رسم میشود. تغییرات سختی برای سه فرکانس اول در یک شکل رسم میشود. همین کار برای مجموعه (ii) مربوط به المان پنجم نیز تکرار میشود. نمودارهای حاصله در شکل ۳ آمده است. موقعیت ترک از روی محل برخورد منحنی‌ها بدست می‌آید. برای محاسبه اندازه ترک نیز میتوان از معادله (۲) استفاده نمود. نتایج حاصل در جدول ۲ آمده است. در این جدول همچنین اعداد داده شده در مرجع [8]، برای مقایسه داده شده است. همانطور که مشاهده میشود، دقت روش ارائه شده در این مقاله از دقت روش مرجع ذکر شده بیشتر است. مهمترین دلیل این موضوع تفاوت در نحوه حل کردن دستگاه معادلات خطی (۱۹) می باشد. پتیل و همکارش [8]، برای حل این معادله از تابع `pinv` در نرم افزار MATLAB استفاده نموده اند و نتایج زیر در مورد حل مثال بالا گزارش شده است:



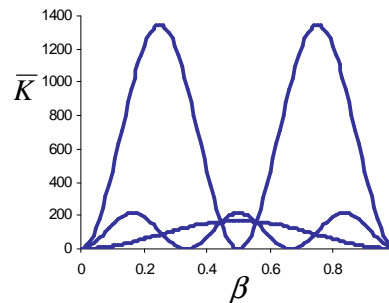
۳ب: بزرگنمایی منحنی الف روی المان سوم



۳ الف: ترک در المان سوم  $\beta = 0.25, a/h = 0.07971$



۳د: بزرگنمایی منحنی ج روی المان چهارم تا ششم



۳ ج: ترک در المان پنجم  $\beta = 0.45, a/h = 0.0986$

شکل ۳ - منحنی سختی بر حسب موقعیت ترک



جدول ۲: مقایسه موقعیت و اندازه ترک پیش بینی شده با مقدار واقعی برای تیر دوسرهمفصل جدول ۱

مقادیر واقعی		فرکانس طبیعی تیر $rad/sec$ .			مقدار پیش بینی شده						
موقعیت	$a/h$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	موقعیت	% خطا	سختی	$a/h$	% خطا		
تیر بدون ترک		59.007	236.029	531.065							
ترک المان سوم		0.25	0.07971	58.884	235.080	529.962	0.25	0.0	243.8	0.079	0.6
	مرجع [8]	58.915	235.314	530.233	0.25	0.0	320.7	0.069	13.4		
ترک المان پنجم		0.45	0.0986	58.658	235.854	528.625	0.444	1.3	161.5	0.098	0.5
	مرجع [8]	58.719	235.884	529.051	0.443	1.6	195.6	0.089	9.7		

$$\{S\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}^T$$

$$= \{0.00066, 0, 0, 0, 0, 0.05317, -0.00699, 0.03901, -0.00343, 0\}^T$$

$S_7$  و  $S_9$  دارای مقادیر منفی هستند، بنابراین آنها را مساوی صفر قرار داده و مسأله دوباره حل می‌گردد:

$$\{S\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_{10}\}^T$$

$$= \{0.00066, -0.00343, 0, -0.00699, 0, 0.05317, 0.03901, 0\}^T$$

اگر مقادیر منفی را صفر نموده و عمل تکرار شود، خواهیم داشت:

$$\{S\} = \{S_1, S_3, S_5, S_6, S_8, S_{10}\}^T$$

$$= 10^3 \times \{1.23876, 0.78202, 0, 0.00006, -0.78198, -1.23879\}^T$$

مرحله سوم:

$$\{S\} = \{S_1, S_3, S_5, S_6\}^T$$

$$= 10^3 \times \{0.00001, 0.00003, -5.37444, 5.37447\}^T$$

مرحله چهارم:

$$\{S\} = \{S_1, S_3, S_6\}^T$$

$$= \{0.00941, 0.031318, 0.050402\}^T$$

مرحله پنجم:

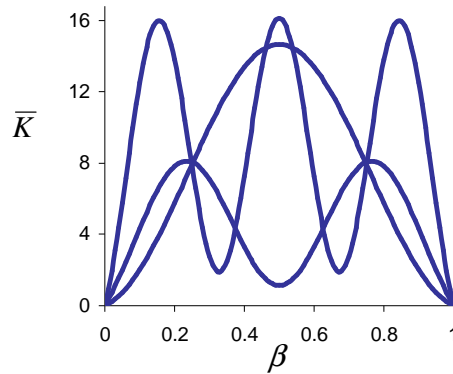
در مرحله پنجم تمام مقادیر بردار  $S$  مثبت هستند. در نتیجه میتوان گفت که تیر دارای سه ترک در المانهای اول، سوم و ششم میباشد. همانطور که مشاهده میشود پس از ۵ مرحله تمام مقادیر مثبت بوده و یک ترک اضافی نیز در المان اول پیش بینی شده است که با مدل اولیه ناسازگار است.

با بررسی دقیقتر اعداد گزارش شده در مرجع [8] و اعداد بدست آمده در این پژوهش باید گفت دلیل اصلی خطا آنست که به هنگام حل معادله (۱۹) با صفر نمودن مقادیر منفی در هر مرحله، در واقع تعداد مجهولات را کاهش میدهیم تا زمانیکه تعداد مجهولات برابر و یا کمتر از تعداد معادلات گردد. پتیل و همکارش در مراحل نهایی جستجو از مرحله چهارم به بعد هنگامیکه تعداد مجهولات از معادلات کمتر میشود، معادلات مربوط به فرکانسهای بالاتر را نادیده گرفته و تنها معادلات بدست آمده از تغییرات چند فرکانس اولیه را لحاظ می کنند و در نتیجه این خطا ایجاد می گردد. در حالیکه در روش حل ارائه شده، در مراحل پایانی یعنی از مرحله سوم به بعد که تعداد مجهولات از معادلات کمتر است باز هم تمامی معادلات حفظ شده و در واقع حلی که موسوم به حل کمترین مجموع مربعات است بدست می آید. این حل اگر چه به دلیل کمبود مجهولات از معادلات هیچ یک از معادلات را به طور دقیق ارضا نمی نماید اما دارای دقت بهتری است. زیرا اثر فرکانسهای بالاتر یعنی فرکانس چهارم و پنجم نیز در آن لحاظ شده است.

### مثال دوم: ردیابی ترک عمیق در طول تیر

به منظور اطمینان بیشتر از درستی روش ارائه شده، در تیر مثال قبل ترکی به ضخامت  $a/h=0.5$  و در موقعیت  $\beta=0.25$  قرار می‌دهیم و به ردیابی این ترک می‌پردازیم. اعداد این مثال از مرجع [3]، انتخاب شده است. در مرجع [3]، در مورد ردیابی این ترک به دلیل در نظر نگرفتن تمامی فرکانسها در مراحل پایانی جستجو، به جای یک ترک وجود سه ترک در المانهای دوم، سوم و پنجم پیش بینی شده است. نتایج مرجع [3] در شکل شماره ۴ نشان داده شده است. به کمک روش بهبود یافته ای که در این مقاله توضیح داده شد میتوان با دقت خوبی محل و اندازه این ترک را پیش بینی نمود. نتایج حاصل در شکل ۵ و جدول شماره ۳ آمده است.

شکل ۴ - مقایسه مقادیر پیش بینی شده با مقدار واقعی [3]



شکل ۵ - منحنی سختی بر حسب موقعیت ترک

جدول ۳: مقایسه موقعیت و اندازه ترک پیش بینی شده با مقدار واقعی برای تیر دوسرهمفصل مثال دوم

مقادیر واقعی		فرکانس طبیعی تیر. $rad/sec$			مقدار پیش بینی شده				
موقعیت	$a/h$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	موقعیت	% خطا	سختی	$a/h$	% خطا
تیر بدون ترک									
0.25	0.5	59.007	236.029	531.065	0.25	0.0	7.996	0.4194	16

همانطور که مشاهده میشود در این مثال نیز با وجود همق زیاد ترک، موقعیت آن با دقت بسیار بالایی پیش بینی شد و میزان خطا برای پیش بینی اندازه آن نیز قابل قبول است. نکته مهم در این مثال آنست که بر خلاف مرجع [3]، در این مثال تنها یک ترک و نه سه ترک، در طول تیر پیش بینی شده است.

## نتیجه‌گیری

در این پژوهش با بهره‌گیری از روش ماتریس انتقال و مدل‌سازی ترک با فنر پیچشی، به ردیابی چند ترک در طول تیر پرداختیم. معادلات مربوط برای دو شرط مرزی تیر با تکیه‌گاه ساده و همچنین تیر یکسرگیردار بدست آمدند. در این روش به دلیل استفاده از روش ماتریس انتقال، ابعاد ماتریس معادله مشخصه به مقدار زیادی کاهش می‌یابد. در این روش از آنجا که به هر المان یک شاخص عیب نسبت داده میشود در نتیجه تعداد ترکهای قابل ردیابی  $n$ ، همواره از تعداد المانهای در برگیرنده تیر  $m$  کوچکتر است  $n \leq m$ .

در مثال عددی، تیری با شرایط مرزی دو سرمفصل همراه با دو ترک بررسی گردید. در این مثال به دلیل تقارن شرایط مرزی تیر، هر یک از ترکها میتوانند نسبت به وسط تیر در دو موقعیت مختلف و به فاصله مساوی از وسط تیر قرار بگیرند. به همین دلیل در شکل ۳ مربوط به موقعیت ترک دوم این ترک میتواند در هر یک از موقعیتهای  $\beta = 0.5 + 0.06 = 0.56$  یا  $\beta = 0.5 - 0.06 = 0.44$  قرار داشته باشد. در مورد تیر یکسرگیردار به دلیل عدم تقارن هندسه با مشکل کمتری برای ردیابی موقعیت ترک مواجه خواهیم بود.

با مقایسه روش حل ارائه شده و روش حل در مرجع [8]، میتوان نتیجه گرفت که روش ارائه شده دارای سرعت همگرایی بیشتر و همچنین دقت بالاتری است؛ تا آنجا که نتایج حاصل در مورد ردیابی موقعیت دو ترک دارای خطایی کمتر از 2% و در مورد پیش بینی اندازه ترکها نیز دارای خطای کمتر از 1% می باشد. حال آنکه میزان خطای مرجع [8]، در مورد ردیابی موقعیت دو ترک کمتر از 2% و در مورد پیش بینی اندازه ترکها بیش از 13% است. در ضمن در این مثال تنها دو ترک وجود دارد که در روش حل ارائه شده توسط پتیل و همکارش وجود سه ترک پیش بینی شده و یک ترک ریز در المان اول نیز در نتایج آمده است.

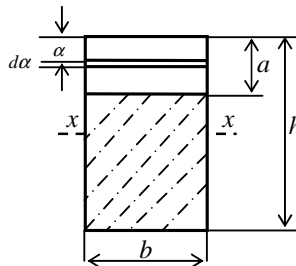
## مراجع

1. Sekhar AS. "Vibration characteristics of a cracked rotor with two open cracks", Journal of Sound and Vibration, v. 223(4), pp.497-512, 1999.
2. Ruotolo R, Surace C. "Damage assessment of multiple cracked beams: numerical results and experimental validation", J. Sound and Vibration, v.206(4), pp.567-88, 1997.
3. R.Y. Liang, J. Hu, F.K. Choy, "Quantitative NDE technique for assessing damage in beam structures", Journal of Engineering Mechanics, v.118 (7), pp.1468-1487,1992.
4. Hu J, Liang RY. "An integrated approach to detection of cracks using vibration characteristics", J Franklin Inst, v. 330(5), pp.841-53, 1993.
5. Choy FK, Liang R, Xu P. "Fault identification in beams on elastic foundation", Comput Geotech, v. 17(2), pp.157-76, 1995.
6. Zheng DY, Fan SC. "Natural frequencies of a non-uniform beam with multiple cracks via modified Fourier series", Journal of Sound and Vibration, v.242(4), pp.701-17, 2001.
7. Zheng DY, Fan SC., "Natural frequency changes of a cracked Timoshenko beam by modified Fourier series", Journal of Sound and Vibration, v. 246(2), pp.297-317, 2001.
8. Patil, D.P., Maiti S.K., "Detection of Multiple cracks using frequency measurements", Engineering Fracture Mechanics, v.70, pp. 1553-1572, 2003.
9. Cawley P, Adams RD. "The location of defects in structures from measurements of natural frequencies" J Strain Anal, v. 14(2). pp. 49-57, 1979.

10. Ostachowicz WM, Krawczuk M., "Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam", J. Sound & Vibration, v.150, pp.191-201, 1991.
11. H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, "The Stress Analysis of Cracks Handbook", third ed., ASME Press, Professional Engineering Publishing, New York, 2000.
12. S. N. ATLURI, "Computational Methods in the Mechanics of Fracture", Amsterdam, North-Holland, 1986,
13. N. ANIFANTIS and A. D. DIMAROCNAS, "Stability of columns with a single crack subjected to follower and vertical loads", International Journal of solids Structures, v. 19(3), pp.281-291, 1983.

### ضمیمه: محاسبه سفتی فنر پیچشی معادل برای ترک یکطرفه

ترک باز یکطرفه در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ض ۱ - ترک یکطرفه

میتوان کاهش انرژی الاستیک ذخیره شده در تیر را به علت وجود ترک در حالت تنش صفحه‌ای به صورت زیر نمایش داد: [12]

$$\Delta U = \frac{1}{E} \int_0^A K_I^2 dA \quad (\text{ض } ۱)$$

که در این رابطه  $K_I$  ضریب تمرکز تنش،  $E$  مدول الاستیسیته ماده سازنده تیر و  $A$  سطح ترک می باشد. ضریب تمرکز تنش به صورت زیر محاسبه میشود: [12]

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a g(a/h)} \quad (\text{ض } ۲)$$

در رابطه فوق  $\sigma$  تنش در محل ترک،  $a$  عمق ترک و  $h$  ارتفاع تیر میباشد.

با پذیرفتن تابع تصحیح ارائه شده توسط Anifantis et al. [13] به صورت زیر:

$$g(a/h) = 1.13 - 1.374(a/h) + 5.749(a/h)^2 - 4.464(a/h)^3 \quad (\text{ض } ۳)$$

و روابط:  $\Delta U = M_i^2 / 2K_i$  و  $\sigma = 6M/bh^2$  و  $dA = bd\alpha$  و با کمی محاسبات و با تعریف  $\eta = a/h$  میتوان نشان داد که  $K_i$  یا سختی فنر پیچشی معادل ترک از رابطه مقابل قابل محاسبه است:  $K_i = Ebh^2 / 72\pi f(\eta)$ . که در این رابطه  $f(\eta)$  به صورت زیر تعریف میشود:

$$f(\eta) = 0.6384(\eta)^2 - 1.035(\eta)^3 + 3.7201(\eta)^4 - 5.1774(\eta)^5 + 7.553(\eta)^6 - 7.3324(\eta)^7 + 2.4909(\eta)^8 \quad (\text{ض } ۴)$$