مجله علوم آماری، بهار ۱۳۸۶
جلد ۱، شماره ۱، ص ۱۹-۴۴

مقایسه دو روش استخراج رکوردها از دیدگاه اطلاع فیشر

مصطفی رزمخواه، جعفر احمدی، بهاره خطیب آستانه
گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۵/۳/۲۹ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۵/۱۲/۲۶

چکیده : رکوردها در یک دنباله از مشاهدات مقادیری هستند که از مشاهدات ماقبل خود بزرگتر (کوچکتر) باشند. اجرای نمونه‌گیری دنباله‌ای تا کسب تعدادی مشخص از داده‌های رکوردی، در مقالات به روش نمونه‌گیری معکوس معروف است. در این حالت امید ریاضی زمان انتظار بین دو رکورد نامتناهی است و تعداد داده‌های رکوردی مستخرج نیز محدود است. یکی از راهکارها برای مقابله با این مشکل، استفاده از طرح نمونه‌گیری تکراری به روش معکوس است. در این طرح با به کار گرفتن روش نمونه‌گیری معکوس ابتدا در مرحله‌ی اول $k_۱$ رکورد را استخراج نموده و نمونه‌گیری را در این مرحله متوقف می‌سازیم. سپس در مرحله‌ی دوم با در نظر گرفتن نمونه‌ای مستقل از نمونه‌ی اول، $k_۲$ رکورد بعدی را استخراج می‌نمائیم و همین روند را تا رسیدن به تعداد رکوردهای مورد نظر ادامه می‌دهیم. در این مقاله حالتی را در نظر می‌گیریم که تعداد رکوردهای مستخرج در هر مرحله ثابت و همگی برابر k باشند. نتایج کلی برای چند رده مختلف از توزیع‌های مهم آماری به دست آمده و برخی از توزیع‌های مهم طول عمر از جمله توزیع نمایی، بر نوع دوازده و وایبول برای تشریح نتایج به دست آمده مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: مصطفی رزمخواه، razmkhah_m@yahoo.com
جعفر احمدی، عضو هسته‌ی قطب علمی آنالیز داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد.

واژه‌های کلیدی : خانواده مقیاسی، خانواده شکل، رکورد بالا (پایین)، توزیع بر.

۱ مقدمه

فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از جامعه‌ای با تابع توزیع $F(x;\theta)$ باشد، در اینصورت گوییم X_j یک رکورد بالا (پایین) است هرگاه از تمام مقادیر ماقبل خود بزرگتر (کوچکتر) باشد. بنابراین $X_۱$ یک رکورد بالا (پایین) است. شماره‌ی سریالی که nامین رکورد بالا (پایین) در آن رخ می‌دهد، خود یک متغیر تصادفی است و به زمان رکورد معروف است. رکوردها در مسائلی از قبیل آزمون طول عمر قطعات الکترونیکی گران‌قیمت و یا آزمون استقامت الوارهای چوب، داده‌های مربوط به مسابقات ورزشی، هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله‌نگاری، تعمیر مینیمال در مسائل قابلیت اعتماد، فرآیند پواسون ناهمگن و مانند آن نقش شایان توجهی ایفا می‌کنند. مطالعات آماری رکوردها در سال ۱۹۵۲ توسط چندلر شروع شد. پس از آن مطالعات قابل ملاحظه‌ای روی رکوردها و آماره‌های مربوطه انجام شده است، بطوری‌که تا کنون بیش از ۶۵۰ مقاله در زمینه رکوردها چاپ شده است. علاقه‌مندان می‌توانند به مقالات مروری گلیک (۱۹۷۸)، نضزوروف (۱۹۸۷) و ناگاراجا (۱۹۸۸) یا به کتاب‌های آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) و نوزوروف (۲۰۰۱) مراجعه نمایند. برای استخراج داده‌های رکوردی در آزمایش‌های دنباله‌ای، اگر آزمایش‌ها را تا آنجایی انجام دهیم که به تعدادی مشخص از رکوردها دست یابیم، به آن روش نمونه‌گیری معکوس می‌گویند (سامانیگو و ویتاکر، ۱۹۸۸) که در این مقاله از آن به عنوان طرح نمونه‌گیری A یاد می‌کنیم. حالت دیگر که در آن حجم نمونه ثابت اما تعداد رکوردها تصادفی است به طرح نمونه‌گیری مستقیم معروف است؛ از جمله کارهای انجام شده در این مورد می‌توان به هافمن و ناگاراجا (۲۰۰۳) اشاره نمود. فرض کنید در مهندسی عمران، هدف بررسی استقامت بلوک‌هایی باشد که در سازه‌های ساختمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای این منظور ابتدا اولین بلوک را به تصادف انتخاب نموده و با اعمال فشار، نقطه‌ی تخریب آن را به دست می‌آوریم. این مقدار به عنوان رکورد اول ثبت

می‌شود. سپس بلوک دوم را نیز به طور تصادفی انتخاب کرده و آن را حداکثر تا مقدار رکورد اول تحت آزمایش قرار می‌دهیم؛ چنانچه تخریب نشود به عنوان نمونه‌ی سالم از آزمایش خارج می‌شود و در غیر این‌صورت به عنوان رکورد پایین دوم ثبت می‌شود. اگر همین روند را ادامه دهیم تا سرانجام n رکورد به دست آید، به آن روش نمونه‌گیری معکوس (طرح A) اطلاق می‌گردد. بنابراین در این آزمایش دنباله‌ای، فقط نقطه‌ی تخریب بلوک‌هایی ثبت می‌شوند که نامقاوم‌تر از نمونه‌های ماقبل خود باشند. بدیهی است که این روش نسبت به نمونه‌گیری تصادفی ساده مقرون به صرفه‌تر است. اما در این طرح تعداد رکوردها ثابت و حجم نمونه‌ی مورد نیاز تصادفی است. در این مقاله روشی دیگر معرفی می‌شود و آن استفاده از طرح نمونه‌های تکراری به روش معکوس است که آن را با نام طرح نمونه‌گیری B می‌شناسیم. در این طرح با به کار گرفتن روش نمونه‌گیری معکوس ابتدا در مرحله‌ی اول k_1 رکورد را استخراج نموده و نمونه‌گیری را در این مرحله متوقف می‌سازیم. سپس در مرحله‌ی دوم با در نظر گرفتن نمونه‌ای مستقل از نمونه‌ی اول، k_2 رکورد بعدی را استخراج می‌نمائیم و همین روند را تا رسیدن به تعداد رکوردهای مورد نظر ادامه می‌دهیم. طرح B در بسیاری از فرآیندهای صنعتی که کالاهای ساخته شده در بازه‌های زمانی منظم با شرایط ثابت تولید می‌شوند، نتایج سودمندی به دست خواهد داد. به عنوان مثال فرض کنید یک کارخانه‌ی بلوک‌سازی دارای دو خط تولید باشد که در شرایط کاملاً یکسانی فعالیت می‌کنند. در این‌صورت می‌توانیم به جای انتخاب یک خط تولید برای دستیابی به نقطه‌ی تخریب k رکورد، k_1 مورد را از خط تولید اول و $k_2 = k - k_1$ نمونه را از خط تولید دوم مشاهده نمائیم. در این مقاله حالتی را در نظر می‌گیریم که تعداد رکوردهای مستخرج در هر مرحله ثابت و همگی برابر k باشند. مثلاً برای استخراج mk رکورد در طرح نمونه‌گیری B، نمونه‌گیری را m مرتبه تکرار می‌کنیم و در هر مرتبه k رکورد استخراج می‌نماییم. اما برای انجام این کار در طرح نمونه‌گیری A، تعداد mk رکورد را به طور متوالی استخراج می‌کنیم. طرح نمونه‌گیری B، به ازای $k = 2$ توسط احمدی و ارقامی (۲۰۰۱) پیشنهاد شد. گولاتی و پاجت (۲۰۰۳) طرح‌نمونه‌گیری B را برای برآورد تابع توزیع و چندک‌های جامعه بر اساس

رکوردها به کار برده‌اند. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ باشد. در این‌صورت میزان اطلاع فیشر نهفته در X در خصوص پارامتر θ بصورت $I_X(\theta) = E\big(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\big)^{۲}$ تعریف می‌شود. تحت شرایطی (که به شرایط نظم معروفند) برابری زیر را داریم:

$$I_X(\theta) = -E\big(\frac{\partial^{۲}}{\partial\theta^{۲}}\log f(X;\theta)\big).$$

اطلاع فیشر که موضوع اصلی این مقاله می‌باشد، در نامساوی کرامر-رائو برای به‌دست آوردن کران پایین واریانس برآوردگرها و همچنین در واریانس توزیع حدی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی ظاهر می‌شود. اخیراً بررسی اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته است. در ایران می‌توان به احمدی (۲۰۰۰)، احمدی و ارقامی (۲۰۰۱ و ۲۰۰۳) و رزمخواه (۱۳۸۳) اشاره نمود. همچنین احمدی و رزمخواه (۱۳۸۱) اطلاع فیشر نهفته درمشاهدات مستقل و هم‌توزیع (*i.i.d.*) از توزیع بر نوع دوازده را برای پارامتر شکل و رزمخواه و همکاران (۱۳۸۲) اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی همان توزیع را مورد بررسی قرار داده‌اند. در خارج از ایران مقالاتی توسط هافمن و ناگاراجا (۲۰۰۳)، هافمن و همکاران (۲۰۰۵) و بالاکریشنان و استپانوف (۲۰۰۶) در این راستا چاپ شده است.

در این مقاله گوئیم توزیع $F(x;\theta)$ دارای خاصیت **UBGA** (**LBGA**)، **UBEA** (**LBEA**) یا **UBLA** (**LBLA**) است، هرگاه اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا (پایین) در خصوص پارامتر θ در طرح B به ترتیب بیشتر، مساوی یا کمتر از طرح A باشد. در ادامه، ابتدا در بخش دوم ابزار و نتایج کمکی بیان می‌شوند و سپس در بخش سوم، نتایج کلی برای محاسبه‌ی میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا (پایین) در رده‌های مختلف از توزیع‌ها ارائه می‌گردند. در بخش چهارم، میزان اطلاع فیشر نهفته در توزیع‌های نمایی، بر نوع دوازده و وایبول، در هر دو طرح نمونه‌گیری مقایسه و چند خانواده‌ی یک‌پارامتری بر این اساس دسته‌بندی می‌شوند.

۲ نتایج کمکی

با توجه به تعریف دو طرح نمونه‌گیری A و B که در بخش مقدمه ذکر شد، بدیهی است که اطلاع فیشر نهفته در رکوردها و زمان بین آنها در طرح A بیشتر از یا مساوی با طرح B می‌باشد، زیرا در طرح B عملاً اطلاعات مربوط به زمان آخرین رکورد در هر مرتبه‌ی تکرار از دست می‌رود ولی در طرح A چنین اتفاقی نمی‌افتد. بنابراین در این مقاله فقط به بررسی رکوردها بدون در نظر گرفتن زمان آنها می‌پردازیم. در این بخش سعی شده است تا ابزار لازم برای حصول نتایج بخش‌های بعدی ارائه شوند.

لم ۱ : فرض کنید X_1، X_2، $\cdots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ با تابع توزیع $F_X(x;\theta)$ و تابع چگالی $f_X(x;\theta)$ باشند. در این‌صورت در طرح نمونه‌گیری A،

الف: تابع چگالی احتمال نخستین mk رکورد بالا عبارت است از

$$f_{\underline{R}}(\underline{r};\theta) = f_X(r_{mk};\theta)\prod_{i=1}^{mk-1}\frac{f_X(r_i;\theta)}{\bar{F}_X(r_i;\theta)},$$

که در آن $\underline{R} = (R_1,\ldots,R_{mk})$ معرف نخستین mk رکورد بالا و $\underline{r} = (r_1,\ldots,r_{mk})$ نشان‌دهنده‌ی مقادیر مشاهده شده‌ی آنها می‌باشد.

ب: تابع چگالی احتمال نخستین mk رکورد پایین به صورت زیر است

$$f_{\underline{R}'}(\underline{r}';\theta) = f_X(r'_{mk};\theta)\prod_{i=1}^{mk-1}\frac{f_X(r'_i;\theta)}{F_X(r'_i;\theta)},$$

که در آن $\underline{R}' = (R'_1,\ldots,R'_{mk})$ معرف نخستین mk رکورد پایین و $\underline{r}' = (r'_1,\ldots,r'_{mk})$ نشان‌دهنده‌ی مقادیر مشاهده شده‌ی آنهاست.

ج: تابع چگالی احتمال jامین رکورد بالا R_j، عبارت است از

$$f_{R_j}(r;\theta) = \frac{\big(-\log\bar{F}_X(r;\theta)\big)^{j-1}}{(j-1)!}f_X(r;\theta).$$

د: تابع چگالی احتمال jامین رکورد پایین R'_j، به صورت زیر است

$$f_{R'_j}(r';\theta) = \frac{\big(-\log F_X(r';\theta)\big)^{j-1}}{(j-1)!}f_X(r';\theta).$$

برهان : برای جزئیات برهان به کتاب آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه شود.

لم ۲ : تحت مفروضات لم ۱، در طرح نمونه‌گیری B، روابط زیر برقرار هستند:
الف: تابع چگالی احتمال نخستین mk رکورد بالا عبارت است از

$$f_{\underline{R}_1,\dots,\underline{R}_m}(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_m;\theta)=\prod_{i=1}^{m} f_X(r_{ik};\theta)\prod_{j=1}^{k-1}\frac{f_X(r_{ij};\theta)}{\bar{F}_X(r_{ij};\theta)}, \qquad (1)$$

که در آن به ازای $i=1,\dots,m$، $\underline{R}_i=(R_{i1},\dots,R_{ik})$ معرف k رکورد بالای استخراج شده در مرحله‌ی iام طرح نمونه‌گیری B و $\underline{r}_i=(r_{i1},\dots,r_{ik})$ نشان دهنده‌ی مقادیر مشاهده شده‌ی آنهاست.

ب: تابع چگالی احتمال نخستین mk رکورد پایین به صورت زیر است

$$f_{\underline{R}'_1,\dots,\underline{R}'_k}(\underline{r}'_1,\dots,\underline{r}'_k;\theta)=\prod_{i=1}^{m} f_X(r'_{ik};\theta)\prod_{j=1}^{k-1}\frac{f_X(r'_{ij};\theta)}{F_X(r'_{ij};\theta)}. \qquad (2)$$

که در آن به ازای $i=1,\dots,m$، $\underline{R}'_i=(R'_{i1},\dots,R'_{ik})$ معرف k رکورد پایین استخراج شده در مرحله‌ی iام طرح نمونه‌گیری B و $\underline{r}'_i=(r'_{i1},\dots,r'_{ik})$ نشان دهنده‌ی مقادیر مشاهده شده‌ی آنهاست.

ج: برای $j=1,\dots,k$، jامین رکورد بالا (پایین) در تکرارهای مختلف طرح B هم‌توزیع است با jامین رکورد بالا (پایین) در طرح A. به عبارتی، به ازای $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,k$، $R_{ij}\overset{d}{=}R_j$ و $R'_{ij}\overset{d}{=}R'_j$.

برهان : با توجه به اینکه تکرارها در m مرحله به طور مستقل از هم انجام می‌شوند، توابع چگالی احتمال توأم k رکورد مستخرج از هر مرحله بایستی در هم ضرب شوند. یعنی، برای رکوردهای بالا داریم

$$f(\underline{r}_1,\cdots,\underline{r}_k;\theta)=\prod_{i=1}^{m} f(\underline{r}_i;\theta).$$

برای رکوردهای پایین نیز به طور مشابه است. بنابراین با استفاده از لم ۱ قسمت‌های **الف** و **ب**، روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شوند. قسمت **ج** نیز با توجه به نحوه‌ی

استخراج رکوردها در طرح‌های A و B بدیهی است.

لم ۳ : تحت مفروضات لم ۱، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا در طرح نمونه‌گیری B عبارت است از

$$I^B_{\underline{R}}(\theta) = -m\sum_{j=1}^{k} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(R_j;\theta)\right) + m\sum_{j=1}^{k-1} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log \bar{F}_X(R_j;\theta)\right). \quad (۳)$$

برهان : از رابطه‌ی (۱)، تساوی زیر را داریم

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_{\underline{R}}(\underline{r};\theta) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(R_{ij};\theta) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log \bar{F}_X(R_{ij};\theta).$$

با توجه به تعریف اطلاع فیشر و لم ۲ قسمت **ج**، برهان کامل است.

تذکر ۱ : مشابه فرمول (۳)، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا در طرح A عبارت است از

$$I^A_{\underline{R}}(\theta) = -\sum_{j=1}^{mk} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(R_j;\theta)\right) + \sum_{j=1}^{mk-1} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log \bar{F}_X(R_j;\theta)\right). \quad (۴)$$

لم ۴ : تحت مفروضات لم ۱، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد پایین در طرح نمونه‌گیری B عبارت است از

$$I^B_{\underline{R}'}(\theta) = -m\sum_{j=1}^{k} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(R'_j;\theta)\right) + m\sum_{j=1}^{k-1} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log F_X(R'_j;\theta)\right). \quad (۵)$$

برهان با استفاده از رابطه‌ی (۲)، مشابه لم ۳ ثابت می‌شود.

تذکر ۲ : مشابه فرمول (۵)، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد پایین در طرح A عبارت است از

$$I^{A}_{\underline{R}'}(\theta) = -\sum_{i=1}^{mk} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(R_i';\theta)\right) + \sum_{i=1}^{mk-1} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log F_X(R_i';\theta)\right). \quad (6)$$

لم ۵ : (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع احتمال $F_X(x;\theta)$ باشد و $\theta = h(\eta)$ که h تابعی مشتق‌پذیر است. در این‌صورت

$$I^*_X(\eta) = I_X\big(h(\eta)\big)\big[\frac{\partial}{\partial\eta}h(\eta)\big]^2,$$

که در آن $I^*_X(\eta)$ میزان اطلاع فیشر نهفته در X در خصوص پارامتر η می‌باشد.

لم ۶ : اگر X دارای تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ باشد و $Y = g(X)$ که g تابعی یک به یک، مشتق‌پذیر و مستقل از θ باشد، آنگاه،

$$I_X(\theta) = I_Y(\theta).$$

لم ۷ : فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند به طوری که با احتمال یک $X \le Y$ و ϕ یک تابع افزایشی باشد. در این‌صورت با احتمال یک داریم

$$E[\phi(X)] \le E[\phi(Y)].$$

لم‌های ۶ و ۷ به سادگی ثابت می‌شوند.

۳ نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی برای مقایسه‌ی دو طرح نمونه‌گیری A و B از دیدگاه اطلاع فیشر ارائه می‌شوند. برای این منظور ابتدا چند رده از توزیع‌های مهم آماری

را به شرح ذیل معرفی می‌کنیم.

الف: C_1 را رده توزیع‌های F در نظر می‌گیریم طوری که

$$\bar{F}(x;\theta) = e^{-\alpha(\theta)a(x)},$$

که در آن $\alpha(\cdot)$ فقط تابعی از θ و $a(\cdot)$ فقط تابعی از x و هر دو مثبت هستند.

ب: C_2 را رده توزیع‌های F در نظر می‌گیریم طوری که

$$F(x;\theta) = e^{-\beta(\theta)b(x)},$$

که در آن $\beta(\cdot)$ فقط تابعی از θ و $b(\cdot)$ فقط تابعی از x و هر دو مثبت هستند.
لازم به ذکر است که C_1 و C_2 شامل بسیاری از توزیع‌های معروف طول عمر از جمله نمایی، وایبول، پارتو، بر نوع دوازده، توزیع توانی، توزیع مقادیر فرین و ... می‌باشند.

ج: C_3 را خانواده‌ی نمایی با تابع چگالی (جرم) احتمال زیر در نظر می‌گیریم

$$f(x;\theta) = A(x)B(\theta)e^{C(\theta)D(x)}.$$

د: C_4 را خانواده‌ی توزیع‌های مکانی F در نظر می‌گیریم طوری که

$$F(x;\theta) = F_0(x-\theta).$$

ه: C_5 را خانواده‌ی توزیع‌های مقیاسی F در نظر می‌گیریم. به عبارتی

$$C_5 = \{F : F(x;\theta) = F_0(\theta x),\ \theta > 0\}.$$

و: C_6 را خانواده‌ی توزیع‌های شکل F در نظر می‌گیریم طوری که

$$F(x;\theta) = F_0(x^{\theta}),\ \theta > 0.$$

در بندهای **د** تا **و**، F_0 به θ بستگی ندارد.

قضیه ۱ : فرض کنید F متعلق به کلاس C_1 باشد. در این صورت این توزیع دارای خواص $UBEA$ و $LBGA$ می‌باشد.

برهان : با استفاده از لم‌های ۵ و ۶، می‌توان بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض نمود $\alpha(\theta)=\theta$ و $a(x)=x$. بنابراین می‌توان توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال $f(x)=\theta e^{-\theta x}$ از کلاس $C_۱$ را در نظر گرفت. در این‌حالت تساوی‌های زیر را داریم:

$$\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log f(x;\theta)=-\frac{۱}{\theta^۲}, \tag{۷}$$

$$\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log \bar{F}(x;\theta)=۰, \tag{۸}$$

و

$$\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log F(x;\theta)=-\frac{x^۲e^{-\theta x}}{(۱-e^{-\theta x})^۲}. \tag{۹}$$

بنابراین با توجه به روابط (۳)، (۴)، (۷) و (۸) داریم

$$I^B_{\underline{R}}(\theta)=I^A_{\underline{R}}(\theta)=\frac{mk}{\theta^۲}.$$

در نتیجه خاصیت $UBEA$ برای کلاس $C_۱$ بر اساس رکوردهای بالا برقرار است. برای اثبات خاصیت $LBGA$ برای این رده، با توجه به روابط (۵)، (۶)، (۷) و (۹) داریم

$$I^B_{\underline{R}'}(\theta)=\frac{mk}{\theta^۲}-m\sum_{j=۱}^{k-۱}E\big[g(R'_j)\big]$$

و

$$I^A_{\underline{R}'}(\theta)=\frac{mk}{\theta^۲}-\sum_{j=۱}^{mk-۱}E\big[g(R'_j)\big],$$

که در آن

$$g(R'_j)=\frac{R_j'^۲e^{-\theta R'_j}}{(۱-e^{-\theta R'_j})^۲}.$$

از طرفی به ازای $j\geq ۱$، با احتمال یک $R'_j>R'_{j+۱}$ و تابع $g(x)$ برای $x>۰$ یک تابع نزولی بر حسب x است. لذا با احتمال یک داریم $g(R'_j)<g(R'_{j+۱})$. در این صورت با توجه به لم ۷،

$$m\sum_{j=۱}^{k-۱}E\big[g(R'_j)\big]<\sum_{j=۱}^{mk-۱}E\big[g(R'_j)\big].$$

در نتیجه

$$I^B_{\underline{R}'}(\theta) > I^A_{\underline{R}'}(\theta).$$

با توجه به نامساوی فوق اثبات کامل است.

قضیه ۲ : فرض کنید F متعلق به رده $C_۲$ باشد. در این صورت این توزیع دارای خواص $LBEA$ و $UBGA$ می‌باشد.
برهان مشابه قضیه‌ی ۱ ثابت می‌شود، با این تفاوت که در این حالت $b(x)$ باید تابعی کاهشی از x باشد.

قضیه ۳ : فرض کنید F متعلق به رده $C_۳$ باشد. قرار دهید

$$L(x;\theta) = \frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log \bar{F}_X(x;\theta),$$

در این صورت موارد زیر را داریم:
الف: اگر به ازای مقدار ثابت c داشته باشیم $L(x;\theta) = c$، آنگاه F دارای خاصیت $UBLA$، $UBEA$ یا $UBGA$ است هر گاه c به ترتیب مثبت، صفر یا منفی باشد.
ب: اگر $L(x;\theta)$ یک تابع افزایشی از x باشد، آنگاه F دارای خاصیت $UBLA$ می‌باشد.
برهان با استفاده از لم (۵)، می‌توان بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض نمود $C(\theta) = \theta$. در این صورت

$$\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log f(x;\theta) = \frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log B(\theta).$$

در نتیجه با توجه به روابط (۳) و (۴) تساوی‌های زیر را داریم

$$I^B_{\underline{R}}(\theta) = -mk\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log B(\theta) + m\sum_{j=۱}^{k-۱} E\left(\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log \bar{F}_X(R_j;\theta)\right),$$

$$I^A_{\underline{R}}(\theta) = -mk\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log B(\theta) + \sum_{j=۱}^{mk-۱} E\left(\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}\log \bar{F}_X(R_j;\theta)\right).$$

با استفاده از روابط فوق قسمت **الف** نتیجه می‌شود. قسمت **ب** نیز به طور مشابه و با توجه به اینکه با احتمال یک $R_j < R_{j+1}$، ثابت می‌شود.

قضیه ۴ : فرض کنید F متعلق به رده C_3 باشد. قرار دهید

$$K(x;\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log F(x;\theta).$$

در این صورت موارد زیر را داریم:
الف: اگر به ازای مقدار ثابت c داشته باشیم $K(x;\theta) = c$، آنگاه F دارای خواص $LBLA$، $LBEA$ یا $LBGA$ است هر گاه c به ترتیب مثبت، صفر یا منفی باشد.
ب: اگر $K(x;\theta)$ یک تابع کاهشی از x باشد، آنگاه F دارای خاصیت $LBLA$ می‌باشد.

برهان قسمت **الف** مشابه برهان قضیه‌ی ۳ قسمت **الف** می‌باشد. برای برهان قسمت **ب** باید از این خاصیت استفاده شود که برای رکوردهای پایین با احتمال یک رابطه‌ی $R'_j > R'_{j+1}$ برقرار است.

قضیه ۵ : فرض کنید F متعلق به رده C_4 باشد. در این صورت روابط زیر برقرار هستند:
الف: اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا از این رده در طرح نمونه‌گیری B عبارت است از

$$I^B_{\underline{R}}(\theta) = m\sum_{j=1}^{k}\Psi_1(j,0|\bar{F}_0) + m\sum_{j=1}^{k-1}\Psi_2(j,0|\bar{F}_0),$$

که در آن

$$\Psi_1(j,t|F_0) = \int_{-\infty}^{\infty} y^t\big[f_0'^2(y) - f_0''(y)f_0(y)\big]\frac{\big[-\log F_0(y)\big]^{j-1}}{f_0(y)(j-1)!}\,dy \qquad (10)$$

و

$$\Psi_2(j,t|F_0) = \int_{-\infty}^{\infty} y^t f_0(y)\big[F_0''(y)F_0(y) - F_0'^2(y)\big]\frac{\big[-\log F_0(y)\big]^{j-1}}{[F_0(y)]^2(j-1)!}\,dy. \qquad (11)$$

ب: اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد پایین از این رده در طرح نمونه‌گیری B به صورت زیر است

$$I^B_{\underline{R}'}(\theta) = m\sum_{j=۱}^{k}\Psi_۱(j,\circ|F_\circ) + m\sum_{j=۱}^{k-۱}\Psi_۲(j,\circ|F_\circ),$$

که در آن $\Psi_۱$ و $\Psi_۲$ به ترتیب در روابط (۱۰) و (۱۱) تعریف شده‌اند.

قضیه ۶ : فرض کنید F متعلق به رده $C_۵$ باشد. در این صورت روابط زیر نتیجه می‌شوند:

الف: اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا از این کلاس در طرح نمونه‌گیری B به صورت زیر است

$$\theta^۲ I^B_{\underline{R}}(\theta) = mk + m\sum_{j=۱}^{k}\Psi_۱(j,۲|\bar{F}_\circ) + m\sum_{j=۱}^{k-۱}\Psi_۲(j,۲|\bar{F}_\circ),$$

که در آن $\Psi_۱$ و $\Psi_۲$ در روابط (۱۰) و (۱۱) تعریف شده‌اند.

ب: اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد پایین از این رده در طرح نمونه‌گیری B به صورت زیر است

$$\theta^۲ I^B_{\underline{R}'}(\theta) = mk + m\sum_{j=۱}^{k}\Psi_۱(j,۲|F_\circ) + m\sum_{j=۱}^{k-۱}\Psi_۲(j,۲|F_\circ).$$

قضیه ۷ : فرض کنید F متعلق به رده $C_٦$ باشد. در این صورت روابط زیر را داریم:

الف: اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا از این رده در طرح نمونه‌گیری B به صورت زیر است

$$\theta^۲ I^B_{\underline{R}}(\theta) = mk - m\sum_{j=۱}^{k}\phi_۱(j|\bar{F}_\circ) + m\sum_{j=۱}^{k-۱}\phi_۲(j|\bar{F}_\circ),$$

که در آن

$$\begin{aligned}\phi_{۱}(j|F_{\circ}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\log^{۲}(y)}{f_{\circ}(y)}\Big\{f_{\circ}(y)[yf_{\circ}^{''}(y)+f_{\circ}^{'}(y)] - yf_{\circ}^{'۲}(y)\Big\} \\ &\quad \times \frac{\big[-\log F_{\circ}(y)\big]^{j-۱}}{(j-۱)!}\; dy \qquad (۱۲)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\phi_{۲}(j|F_{\circ}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\log^{۲}(y)}{[F_{\circ}(y)]^{۲}}\Big\{F_{\circ}(y)[yF_{\circ}^{''}(y)+F_{\circ}^{'}(y)] - yF_{\circ}^{'۲}(y)\Big\} \\ &\quad \times \frac{\big[-\log F_{\circ}(y)\big]^{j-۱}}{(j-۱)!} f_{\circ}(y)\; dy. \qquad (۱۳)\end{aligned}$$

ب: اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد پایین از این رده در طرح نمونه‌گیری B به صورت زیر است

$$\theta^{۲} I_{\underline{R}'}^{B}(\theta) = mk - m\sum_{j=۱}^{k}\phi_{۱}(j|F_{\circ}) + m\sum_{j=۱}^{k-۱}\phi_{۲}(j|F_{\circ}),$$

که در آن $\phi_{۱}$ و $\phi_{۲}$ به ترتیب در روابط (۱۲) و (۱۳) تعریف شده‌اند.

تذکر ۳ : برهان قضیه‌های ۵، ۶ و ۷ به علت محاسبات جبری طولانی و به منظور کاستن از حجم مقاله حذف شده‌اند.

۴ مثال‌ها

در این بخش، سعی می‌کنیم تا با استفاده از لم‌ها و قضایای ارائه‌شده در بخش ۳، توزیع‌های خاص را مورد بررسی قرار داده و در هر مورد تعیین کنیم که کدامیک از طرح‌های نمونه‌گیری A یا B حاوی اطلاع فیشر بیشتری درباره‌ی پارامتر جامعه می‌باشند.

۱.۴ توزیع نمایی

فرض کنید $X_{۱}$، $X_{۲}$، … دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ با تابع توزیع زیر باشد

$$F_X(x;\theta) = ۱ - e^{-\theta x},\; x > \circ,\; \theta > \circ.$$

در این‌صورت با توجه به قضیه‌ی ۱ این توزیع دارای خواص $UBEA$ و $LBGA$ می‌باشد. در نتیجه اگر طول عمر یک قطعه‌ی الکترونیکی از توزیع نمایی پیروی کند، با توجه به اینکه در انجام آزمایش‌های مربوط به طول عمر رکوردهای پایین حائز اهمیت هستند، بهتر است که طرح نمونه‌گیری B مورد استفاده قرار گیرد.

در توزیع نمایی برای رکوردهای پایین با استفاده از قضیه‌ی ۶ می‌توان نشان داد

$$\theta^2 I^B_{\underline{R}'}(\theta) = mk - m\sum_{j=1}^{k-1}\varphi(j), \qquad (14)$$

که در آن

$$\varphi(j) = \frac{1}{(j-1)!}\int_0^1 \frac{y}{(1-y)^2}\log^2(y)\big(-\log(1-y)\big)^{j-1}dy.$$

همچنین

$$\theta^2 I^A_{\underline{R}'}(\theta) = mk - \sum_{j=1}^{mk-1}\varphi(j). \qquad (15)$$

در جدول ۱، نتایج عددی مربوط به اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای پایین مستخرج از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ در خصوص پارامتر θ آمده است. با توجه به روابط(۱۴) و (۱۵) و جدول ۱، نتایج زیر در مورد رکوردهای پایین مستخرج از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ در خصوص پارامتر θ عاید می‌گردند:

۱. در طرح A، مقدار $\theta^2 I^A_{\underline{R}'}(\theta)$ از بالا کراندار و تقریباً برابر با ۱/۱۴۴ می‌باشد.

۲. به ازای m (k) ثابت، $\theta^2 I^B_{\underline{R}'}(\theta)$ بر حسب k (m) افزایشی است.

۳. به ازای $mk = c_0$ ثابت، با افزایش m، $\theta^2 I^B_{\underline{R}'}(\theta)$ افزایش می‌یابد. مثلاً اطلاع فیشر نهفته در نخستین ۱۰ رکورد پایین درطرح B با مرتبه‌ی تکرار ۲ برابر ۲/۲۸۹ ولی با مرتبه‌ی تکرار ۵ برابر ۵/۵۷۱ می‌باشد.

۲.۴ توزیع توانی

فرض کنید X_1، X_2، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ با تابع توزیع زیر باشد

$$F_X(x;\theta) = x^\theta,\ 0 < x < 1,\ \theta > 0.$$

در این‌صورت می‌توان نوشت $F_X(x;\theta) = e^{-\theta \log(\frac{1}{x})}$. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۲ این توزیع دارای خواص $LBEA$ و $UBGA$ می‌باشد.

۳.۴ توزیع بِر نوع دوازده

خانواده توزیع‌های بِر در سال ۱۹۴۲ توسط بر معرفی شد، توزیع بِر نوع دوازده معروف‌ترین عضو این خانواده می‌باشد. صورت تابعی توزیع بِر نوع دوازده برای پارامترهای مثبت α و β عبارت است از:

$$F(x;\theta) = 1 - \left(1 + x^{\alpha}\right)^{-\beta}, \quad x \geq 0 \tag{16}$$

است (جزئیات بیشتر را می‌توانید در تیم (۱۹۹۳) ببینید). این توزیع در عمل بسیار پرکاربرد است که از جمله می‌توان به نقش آن در بخش‌هایی از کنترل کیفیت، طول عمر یا مدل‌بندی زمان نقص و درآمد اشاره نمود. در این مقاله نماد $B12(\alpha,\beta)$ را برای توزیع (۱۶) بکار برده و دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

الف: α معلوم باشد

در این‌صورت با در نظر گرفتن $\beta = \theta$، این توزیع متعلق به رده C_1 می‌باشد که طبق قضیه‌ی ۱، دارای خواص $UBEA$ و $LBGA$ است.

ب: اگر β معلوم باشد

در این‌حالت با فرض $\beta = 1$ و $\alpha = \theta$، به مقایسه‌ی دو طرح A و B در توزیع $B12(\theta, 1)$ می‌پردازیم.

لم ۸ : فرض کنید X_1، X_2، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ با توزیع $B12(\theta, 1)$ باشند، در این‌صورت اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا در توزیع $B12(\theta, 1)$ به صورت زیر است:

الف: در طرح نمونه‌گیری B،

$$\theta^2 I_{\underline{R}}^{B}(\theta) = mk + m\sum_{j=1}^{k-1} \xi(j) + 2m\xi(k). \tag{17}$$

که در آن به ازای $j = 1, \dots, k$،

$$\xi(j) = \frac{1}{(j-1)!} \int_0^\infty \frac{y \log^2(y)}{(1+y)^4} \big(\log(1+y) \big)^{j-1} dy. \qquad (18)$$

ب: در طرح نمونه‌گیری A،

$$\theta^2 I_{\underline{R}}^A(\theta) = mk + \sum_{j=1}^{mk-1} \xi(j) + 2\xi(mk), \qquad (19)$$

که در آن $\xi(j)$ در رابطه‌ی (۱۸) تعریف شده است.

برهان با استفاده از قضیه‌ی ۷ قسمت **الف** و با توجه به اینکه در این توزیع $F_0(y) = 1 - (1+y)^{-1}$، می‌توان با انجام محاسبات جبری به نتیجه‌ی مورد نظر دست یافت.

لم ۹ : تحت مفروضات لم ۸، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد پایین در توزیع $B12(\theta, 1)$ به صورت زیر است:

الف: در طرح نمونه‌گیری B، داریم

$$\theta^2 I_{\underline{R}'}^B(\theta) = mk + m \sum_{j=1}^{k-1} \psi(j) + 2m\psi(k).$$

که در آن به ازای $j = 1, \dots, k$،

$$\psi(j) = \frac{1}{(j-1)!} \int_0^\infty \frac{y \log^2(y)}{(1+y)^4} \big(\log(1+\frac{1}{y}) \big)^{j-1} dy. \qquad (20)$$

ب: در طرح نمونه‌گیری A،

$$\theta^2 I_{\underline{R}'}^A(\theta) = mk + \sum_{j=1}^{mk-1} \psi(j) + 2\psi(mk),$$

که در آن $\psi(j)$ در رابطه‌ی (۲۰) تعریف شده است.

برهان با استفاده از قضیه‌ی ۷ قسمت **ب** و انجام محاسبات جبری، نتیجه‌ی مورد نظر عاید می‌گردد.

هرگاه توزیع جامعه متقارن باشد، با توجه به نتایج ارائه‌شده در احمدی و ارقامی (۲۰۰۱)، میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا و پایین با هم برابر است.

علیرغم اینکه توزیع $B۱۲(\theta,۱)$ نامتقارن است، در لم ۱۰ نشان خواهیم داد که عکس مطلب فوق برقرار نیست.

لم ۱۰ : تحت مفروضات لم ۸، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا در هر دو طرح نمونه‌گیری A و B برابر با mk رکورد پایین است. به عبارتی

$$I^A_{\underline{R}}(\theta)=I^A_{\underline{R}'}(\theta),$$
$$I^B_{\underline{R}}(\theta)=I^B_{\underline{R}'}(\theta).$$

برهان مشابه برهان ارائه شده در رزمخواه و همکاران (۱۳۸۲).

قضیه ۸ : تحت مفروضات لم ۸، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا (پایین) توزیع $B۱۲(\theta,۱)$ در طرح نمونه‌گیری B بیشتر از طرح A می‌باشد. یعنی این توزیع دارای خواص $UBGA$ و $LBGA$ می‌باشد.
برهان برهان را برای رکوردهای بالا ارائه می‌دهیم؛ با توجه به لم ۱۰، نتیجه برای رکوردهای پایین نیز برقرار خواهد بود. با توجه به (۱۷) و (۱۹) باید ثابت کنیم

$$m\sum_{j=۱}^{k-۱}\xi(j)+۲m\xi(k)>\sum_{j=۱}^{mk-۱}\xi(j)+۲\xi(mk). \qquad (۲۱)$$

از طرفی با استفاده از رابطه‌ی (۱۸) و محاسبات عددی، نتیجه می‌شود که $\xi(j)$ به ازای $j\geq ۳$، یک تابع نزولی از j می‌باشد. مقادیر $\xi(j)$ به ازای $j=۱,\ldots,۷$ در جدول ۲ آمده است. با توجه به جدول ۲، ملاحظه می‌شود که $\xi(۱)<\xi(۲)<\xi(۳)>\xi(۴)>\xi(۵)>\cdots$. همچنین $\xi(۱)>\xi(۵)>\cdots$ و $\xi(۲)>\xi(۵)>\cdots$.

رابطه‌ی (۲۱) به ازای مقادیر مختلف k، به صورت زیر ثابت می‌شود.

الف: به ازای $k=۲$، نامساوی (۲۱) به صورت زیر تغییر می‌یابد.

$$m\xi(۱)+۲m\xi(۲)>\sum_{j=۱}^{۲m-۱}\xi(j)+۲\xi(۲m). \qquad (۲۲)$$

اکنون به روش استقرا نسبت به m نشان می‌دهیم که (۲۲) برقرار است.
گام اول: فرض کنید $m = ۲$، در این صورت کافیست رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$\xi(۱) + ۳\xi(۲) > \xi(۳) + ۲\xi(۴).$$

درستی رابطه‌ی فوق از جدول ۲ نتیجه می‌شود.
گام دوم: فرض کنید (۲۲) به ازای $m = m_۰$ برقرار باشد. با فرض $m = m_۰ + ۱$ و بعد از ساده نمودن عبارات جبری کافیست رابطه‌ی زیر ثابت شود.

$$\xi(۱) + ۲\xi(۲) > \xi(۲m_۰ + ۱) + ۲\xi(۲m_۰ + ۲) - \xi(۲m_۰).$$

نابرابری اخیر با توجه به اینکه $\xi(۱) > \xi(۲m_۰ + ۱)$، $\xi(۲) > \xi(۲m_۰ + ۲)$ و $\xi(۲m_۰) > ۰$ بدیهی است.
ب: در حالت $k = ۳$، برقراری رابطه‌ی (۲۱) مشابه **الف** به روش استقرا ثابت می‌شود.
ج: با فرض $k \geq ۴$ و با توجه به رفتار تابع $\xi(\cdot)$، نابرابری‌های $m\xi(k) > \sum_{j=mk-m+۱}^{mk} \xi(j)$ و $m\sum_{j=۱}^{k-۱} \xi(j) > \sum_{j=۱}^{mk-m} \xi(j)$ نتیجه می‌شوند. بنابراین

$$m\sum_{j=۱}^{k-۱} \xi(j) + ۲m\xi(k) > \sum_{j=۱}^{mk-m} \xi(j) + ۲\sum_{j=mk-m+۱}^{mk-۱} \xi(j) + ۲\xi(mk).$$

نابرابری اخیر، رابطه‌ی (۲۱) را به طور قوی تأیید می‌کند.

۴.۴ توزیع وایبول

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبول با تابع توزیع

$$F(x;\alpha,\lambda) = ۱ - e^{-\lambda x^{\alpha}}, \quad x > ۰ \qquad (۲۳)$$

باشد. در این توزیع اگر پارامتر شکل α معلوم باشد، آنگاه F متعلق به رده $C_۱$ می‌باشد که خواص آن قبلاً بررسی شده است. اکنون با فرض معلوم بودن پارامتر λ،

بدون از دست دادن کلیت مسأله قرار می‌دهیم $\lambda = ۱$ و $\alpha = \theta$. در این حالت رابطه‌ی (۲۲) به صورت زیر خواهد بود

$$F(x;\theta) = ۱ - e^{-x^{\theta}}, \quad x > ۰. \qquad (۲۴)$$

لم ۱۱ : فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، $\cdots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ با تابع توزیع (۲۳) باشد، در این‌صورت اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد بالا به صورت زیر است:

الف: در طرح نمونه‌گیری B،

$$\theta^۲ I_{\underline{R}}^{B}(\theta) = mk + m\frac{\Gamma''(k+۱)}{(k-۱)!}.$$

ب: در طرح نمونه‌گیری A،

$$\theta^۲ I_{\underline{R}}^{A}(\theta) = mk + \frac{\Gamma''(mk+۱)}{(mk-۱)!}.$$

در قسمت‌های **الف** و **ب**، $\Gamma''(\cdot)$ مشتق مرتبه‌ی دوم تابع گامای کامل می‌باشد.

برهان با توجه به قضیه‌ی ۷ قسمت **الف** و با توجه به اینکه در این توزیع $F_۰(y) = ۱ - e^{-y}$، می‌توان با به‌کارگرفتن محاسبات جبری نتیجه‌ی مورد نظر را به دست آورد.

در جدول ۳ نتایج عددی مربوط به $\theta^۲ I_{\underline{R}}^{A}(\theta)$ و $\theta^۲ I_{\underline{R}}^{B}(\theta)$ برای توزیع وایبول در خصوص پارامتر شکل آمده است. با توجه به جدول ۳، در مورد رکوردهای بالای توزیع وایبول در خصوص پارامتر شکل نتایج زیر عاید می‌شوند:

۱. توزیع وایبول نسبت به پارامتر شکل خود، دارای خاصیت $UBLA$ می‌باشد.

۲. با افزایش مرتبه‌ی تکرار m، اطلاع فیشر نهفته در یک تعداد مشخص از رکوردهای بالا در طرح B، کاهش می‌یابد. مثلاً اطلاع فیشر نهفته در نخستین ۸ رکورد بالا با مرتبه‌ی تکرار ۲ برابر ۲۷/۹۲ ولی با مرتبه‌ی تکرار ۴ برابر ۱۷/۹۷ می‌باشد.

جدول ۱: مقادیر عددی $\theta^{۲} I_{\underline{R}'}^{A}(\theta)$ و $\theta^{۲} I_{\underline{R}'}^{B}(\theta)$ برای توزیع نمایی (پارامتر مقیاس).

m	k=۲		k=۳		k=۵	
	طرح A	طرح B	طرح A	طرح B	طرح A	طرح B
۲	۱/۱۴۲	۲/۲۲۸	۱/۱۴۴	۲/۲۷۴	۱/۱۴۴	**۲/۲۸۹**
۳	۱/۱۴۴	۳/۳۴۳	۱/۱۴۴	۳/۴۱۱	۱/۱۴۴	۳/۴۳۳
۴	۱/۱۴۴	۴/۴۵۷	۱/۱۴۴	۴/۵۴۸	۱/۱۴۴	۴/۵۷۷
۵	۱/۱۴۴	**۵/۵۷۱**	۱/۱۴۴	۵/۶۸۵	۱/۱۴۴	۵/۷۲۱
۸	۱/۱۴۴	۸/۹۱۴	۱/۱۴۴	۹/۰۹۶	۱/۱۴۴	۹/۱۵۴
۱۰	۱/۱۴۴	۱۱/۱۴۲	۱/۱۴۴	۱۱/۳۷۱	۱/۱۴۴	۱۱/۴۴۳

جدول ۲: مقادیر $\xi(j)$ به ازای $j = ۱, \dots, ۷$.

j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$\xi(j)$	۰/۲۱۵	۰/۲۴۷	۰/۲۸۰	۰/۲۶۰	۰/۲۰۹	۰/۱۵۳	۰/۱۰۵

جدول ۳: مقادیر عددی $\theta^{۲} I_{\underline{R}}^{A}(\theta)$ و $\theta^{۲} I_{\underline{R}}^{B}(\theta)$ برای توزیع وایبول (پارامتر شکل).

m	k=۲		k=۳		k=۴	
	طرح A	طرح B	طرح A	طرح B	طرح A	طرح B
۲	۱۳/۹۶	۸/۹۹	۲۷/۹۷	۱۷/۱۷	۴۵/۶۰	**۲۷/۹۲**
۳	۲۷/۹۷	۱۳/۴۸	۵۵/۵۸	۲۵/۷۶	۸۹/۵۳	۴۱/۸۸
۴	۴۵/۶۰	**۱۷/۹۷**	۸۹/۵۳	۳۴/۳۴	۱۴۲/۷۲	۵۵/۸۴
۵	۶۶/۲۶۰	۲۲/۴۷	۱۲۸/۶۷	۴۲/۹۳	۲۰۳/۴۵	۶۹/۷۹
۸	۱۴۲/۷۲	۳۵/۹۴	۲۷۰/۵۵	۶۸/۶۸	۴۲۰/۸۰	۱۱۱/۶۷
۱۰	۲۰۳/۴۵	۴۴/۹۳	۳۸۱/۴۲	۸۵/۸۵	۵۸۸/۹۸	۱۳۹/۵۹

لم ۱۲ : تحت مفروضات لم ۱۰، اطلاع فیشر نهفته در نخستین mk رکورد پایین در توزیع وایبول دربارهٔ پارامتر شکل به صورت زیر است:

الف: در طرح نمونه‌گیری B،

$$\theta^{2} I^{B}_{\underline{R}'}(\theta) = mk - m\sum_{j=1}^{k}\beta_{1}(j) + m\sum_{j=1}^{k-1}\beta_{2}(j),$$

که در آن

$$\beta_{1}(j) = \frac{1}{(j-1)!}\int_{0}^{\infty} ye^{-y}\log^{2}(y)\big[-\log(1-e^{-y})\big]^{j-1}dy \qquad (25)$$

و

$$\beta_{2}(j) = \frac{1}{(j-1)!}\int_{0}^{\infty} ye^{-2y}\log^{2}(y)\big[-\log(1-e^{-y})\big]^{j-1}\frac{1-y-e^{-y}}{\big(1-e^{-y}\big)^{2}}dy. \qquad (26)$$

ب: در طرح نمونه‌گیری A،

$$\theta^{2} I^{A}_{\underline{R}'}(\theta) = mk - \sum_{j=1}^{mk}\beta_{1}(j) + \sum_{j=1}^{mk-1}\beta_{2}(j),$$

که در آن $\beta_1(j)$ و $\beta_2(j)$ به ترتیب در روابط (۲۳) و (۲۴) معرفی شده‌اند.

برهان با توجه به قضیه‌ی ۷ قسمت **ب** و انجام محاسبات جبری، نتیجه‌ی مورد نظر عاید می‌گردد.

در جدول ۴ نتایج عددی مربوط به $\theta^{2} I^{A}_{\underline{R}'}(\theta)$ و $\theta^{2} I^{B}_{\underline{R}'}(\theta)$ برای توزیع وایبول در خصوص پارامتر شکل آمده است. با توجه به جدول ۴ در مورد رکوردهای پایین مستخرج از توزیع وایبول نتایج زیر عاید می‌گردند:

۱. توزیع وایبول نسبت به پارامتر شکل خود، دارای خاصیت $LBGA$ می‌باشد.

۲. با افزایش مرتبه‌ی تکرار m، اطلاع فیشر نهفته در یک تعداد مشخص از رکوردها در طرح B افزایش می‌یابد. مثلاً اطلاع فیشر نهفته در نخستین ۶ رکورد پایین با مرتبه‌ی تکرار ۲ برابر ۸/۴۹ ولی با مرتبه‌ی تکرار ۳ برابر ۹/۱۴ می‌باشد.

فرع ۱ : با توجه به جدول ۳ و جدول ۴ در مورد رکوردهای بالا و پایین مستخرج از توزیع وایبول ملاحظه می‌شود که اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا در هر دو طرح بیشتر از اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای پایین است.

جدول ۴: مقادیر عددی $\theta^2 I^A_{\underline{R}'}(\theta)$ و $\theta^2 I^B_{\underline{R}'}(\theta)$ برای توزیع وایبول (پارامتر شکل).

	k=۲		k=۳		k=۴	
m	طرح A	طرح B	طرح A	طرح B	طرح A	طرح B
۲	۵/۳۸	۶/۰۹	۷/۵۲	**۸/۴۹**	۹/۵۶	۱۰/۷۶
۳	۷/۵۲	**۹/۱۴**	۱۰/۵۷	۱۲/۷۴	۱۳/۵۸	۱۶/۱۵
۴	۹/۵۶	۱۲/۱۹	۱۳/۵۸	۱۶/۹۸	۱۷/۵۸	۲۱/۵۳
۵	۱۱/۵۸	۱۵/۲۳	۱۶/۵۸	۲۱/۲۳		۲۶/۹۱
۸	۱۷/۸۵	۲۴/۳۷		۳۳/۹۶		۴۳/۰۶

جدول ۵: دسته‌بندی چند توزیع یک‌پارامتری از منظر طرح A و B.

نام یا تابع توزیع	رکوردهای بالا	رکوردهای پایین
$F \in C_1$	$UBEA$	$LBGA$
$F \in C_2$	$UBGA$	$LBEA$
$\Gamma(\alpha,\beta)$, معلوم α $\alpha = 1$ $0 < \alpha < 1$ $\alpha > 1$	 $UBEA$ $UBLA$ $UBGA$	 $LBGA$ $LBLA$ $LBGA$
$B12(\theta, 1)$	$UBGA$	$LBGA$
$1 - exp(-\alpha x^{\theta}), x > 0$ معلوم α معلوم θ	 $UBLA$ $UBEA$	 $LBGA$ $LBGA$
$exp(-x^{-\theta}), x > 0$	$UBGA$	$LBLA$
$exp(-e^{-\theta(x-\mu)})$ معلوم μ معلوم θ	 $UBGA$ $UBGA$	 $LBLA$ $LBEA$
$(1 + e^{-\beta(x-\alpha)})^{-1}$ معلوم α معلوم β	 $UBGA$ $UBGA$	 $LBGA$ $LBGA$

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله دو نوع طرح نمونه‌گیری استخراج داده‌های رکوردی از دیدگاه اطلاع فیشر مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. نتایج برای چند مدل معروف از توزیع‌های طول عمر در بخش ۴ ارائه شد. به طور مشابه می‌توان خواص توزیع‌های بیشتری را بررسی نمود. در جدول ۵ چند توزیع مهم آماری یک‌پارامتری از منظر دو طرح A و B دسته‌بندی شده‌اند. همانطوری‌که از جدول ۵ مشاهده می‌شود، اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی در دو نوع طرح بستگی به توزیع جامعه دارد. مثلاً برای رکوردهای بالا، در توزیع نمایی (پارامتر مقیاس) میزان اطلاع در هر دو طرح مساوی، در توزیع بر نوع دوازده (پارامتر شکل) در طرح B بیشتر از طرح A و در توزیع وایبول (پارامتر شکل) در طرح A بیشتر از طرح B می‌باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده‌ی داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده‌ای در این مقاله شد، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند.

مراجع

احمدی، ج.، رزمخواه، م. (۱۳۸۱)، اطلاع در توزیع $BURR\ XII$، مجموعهٔ مقالات ششمین کنفرانس آمار، جلد ۱، ۴۰–۲۶.

رزمخواه، م. (۱۳۸۳)، اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد.

رزمخواه، م.، خطیب، ب. و احمدی، ج. (۱۳۸۲)، اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی توزیع $BURR\ XII$، اندیشهٔ آماری، سال هشتم، شماره‌ی دوم، ۲۵–۱۷.

Ahmadi, J. (2000), *Record Values, Theory and Applications*, Ph.D. Thesis Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

Ahmadi, J. and Arghami, N.R. (2001), *On the Fisher Information in Record Values*, Metrika **53**, 195–206.

Ahmadi, J. and Arghami, N.R. (2003), *Comparing the Fisher Information in Record Values and iid Observations*, Statistics **37(5)**, 435-441.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley & Sons, New York.

Balakrishnan, N. and Stepanov, A. (2006), *On the Fisher Information in Record Data*, Statistics and Probability Letters, **76**, 537-545.

Burr, I. W. (1942), *Cumulative Frequency Functions*, Annals Math. Statist., **13**, 215-232.

Chandler, K. N. (1952), *The Distribution and Ferquency of Record Values*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. **B 14**, 220-228.

Glick, N. (1978), *Breaking Record and Breaking Boards*, American Mathematical Monthly, **85**, 2-26.

Gulati, S. and Padgett, W. J. (2003), *Parametric and Nonparametric Inference from Record-breaking Data*, Lecture Note in Statistics, V. **172**, Springer, New York.

Hofmann, G., Balakrishnan, N. and Ahmadi, J. (2005), *Characterization of Hazard Function Factorization by Fisher Information in Minima and Upper Record Values*, Statistics and Probability Letters, **72**, 51-57.

Hofmann, G., Nagaraja, H. N. (2003), *Fisher Information in Record Data*, Metrika, **57**, 177-193.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), *Theory of Point Estimstion - 2nd Edition*, Springer, New York.

Nagaraja, H. N. (1988), *Record Value and Related Statistics a Review*, Comm. Statist. Theory Methods **17**, 2223-2238.

Nevzorov, V. B. (1987), *Records*, Theory Probab. Appl. **32**, 201-228.

Nevzorov, V. B. (2001), *Records: Mathematical Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Samaniego, F. J. and Whitaker L. R. (1988), *On Estimating Population Characteristics from Record-breaking Observations*, II: Nonparametric Results, Naval Research Logistics Quarterly, **35**, 221-236.

Tim, R. L. Fry (1993), *Univariate and Multivariate Burr Distributions*, Pakistan J. Statist., **A**, 1-24.