بررسی و مقایسه مفاهیم قابلیت اعتماد در توزیع های طول عمر گسسته و پیوسته

عبدالحمید رضایی رکن آبادی [۱] غلامرضا محتشمی برزادران [۱] محمد خراشادیزاده[۱]

[۱] گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: ادبیات قابلیت اعتماد، مطالعه بر روی توزیع های طول عمر گسسته نسبت به طول عمر پیوسته کمتر مورد توجه محققین بوده است. اخیراً نویسندگانی مانند ابراهیمی[۱] (۱۹۸۶)، برگیومند و گودین[۲] (۲۰۰۳)، کمپ[۳] (۲۰۰۴) و لای و ایکسای[۴] (۲۰۰۶) و ... در مورد برخی مفاهیم و شاخص های قابلیت اعتماد در توزیع های طول عمر گسسته مطالعاتی را انجام داده اند.

در این مقاله، ضمن تعریف و بیان ارتباط بین برخی از مهمترین مفاهیم و شاخص های توزیع های طول عمر در حالت های پیوسته و گسسته به بررسی نکات مشابه و تمایز آنها با ارائه مثال های نقض پرداخته ایم.

این مثال های نقض کاربردهای خاص شاخص های قابلیت اعتماد در توزیع های طول عمر گسسته را که تاکنون غالباً در حالت پیوسته در ابعاد گوناگون مورد بررسی قرار گرفته است، نمایان می سازد.

واژه های کلیدی: دنباله نرخ شکست، دنباله های IFR(DFR)، دنباله های IFRA(DFRA)، دنباله های NBU(NWU)، دنباله های NBUE(NWUE)، دنباله های IMRL(DMRL)، دنباله های محدب، دنباله های پولیا مرتبه ۲.

۱ مقدمه

فرض کنید طول عمر T متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع توزیع F و چگالی f باشد. تابع نرخ شکست آن به صورت $h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}$ تعریف می شود که در آن $R(t)=P(T\geq t)$ تابع بقاء نام دارد. تابع نرخ شکست در توزیع طول عمر گسسته که نیز کمیتی نامنفی اما همواره کمتر از یک است، اولین بار توسط بارلو[۵] و همکاران (۱۹۶۳) به صورت $h(k)=P(T=k|T\geq k)=\frac{P(T=k)}{P(T\geq k)}=\frac{p(k)}{R(k)}$ معرفی شد.

[۱] Ebrahimi
[۲] Bracquemond and Gaudoin
[۳] Kemp
[۴] Lai and Xie
[۵] Barlow

در حقیقت در حالت گسسته می توان تابع نرخ شکست را به صورت دنباله $\{h(k)\}_{k\geq ۰}$ در نظر گرفت. نویسندگان زیادی از جمله بارلو و پورشن[۶] (۱۹۶۵،۱۹۸۱)، اسمیت[۷] (۲۰۰۲) و ... در حالت پیوسته و گوپتا[۸] و همکاران (۱۹۹۷) وناندا و سنگوپتا[۹] (۲۰۰۵) و ... در حالت گسسته خواص زیادی از قابلیت اعتماد را مورد بررسی قرار داده اند.

در این مقاله ما ابتدا برخی خواص و ویژگی های مفاهیم قابلیت اعتماد در رده توزیع های دارای خاصیت نرخ شکست صعودی (IFR) و نزولی (DFR)، متوسط نرخ شکست صعودی (IFRA) و نزولی (DFRA)، نو بهتر از کهنه (NBU) و نو بدتر از کهنه (NWU) و امید نو بهتر از کهنه (NBUE) و امید نو بدتر از کهنه (NWUE)، میانگین باقیمانده عمر صعودی (IMRL) و نزولی (DMRL) را معرفی و سپس با ارائه مثال های نقض شرط لازم و کافی را برای برقراری روابط بیان شده مورد بررسی قرار می دهیم.

۲ خاصیت IFR (DFR) در توزیع های طول عمر پیوسته و گسسته

چگونگی تغییرات نرخ شکست نیز از اهمیت ویژه ای برخوردار است چرا که صعودی بودن (IFR) آن معادل فرسایش یا میرایی سیستم در طول زمان و نزولی بودن (DFR) آن تقویت واحیاء سیستم را در گذر زمان نشان می دهد.

توزیع های طول عمر ممکن است دارای نرخ خرابی ثابت، صعودی، نزولی و یا تلفیقی از اینها باشد.

بارلو و همکاران (۱۹۶۳) نشان دادند صعودی بودن تابع نرخ شکست (خاصیت IFR) متغیر تصادفی گسسته T معادل هر یک از شرایط زیر است:

- $\{h(k)\}_{k\geq ۰}$ دنباله صعودی باشد.
- برای هر $i \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$، دنباله $\{R(i|k)\}$ یک دنباله نزولی نسبت به k باشد که در آن

$$R(i|k) = P(T > i + k|T \geq k) = \frac{R(i+k)}{R(k)}.$$

[۶] Proschan
[۷] Smith
[۸] Gupta
[۹] Nanda and Sengupta

• دنباله تابع بقای R، یک دنباله پولیا از مرتبه ۲ (PF2) باشد یعنی:

$$\forall j_1, j_2, k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, ...\}, j_1 < j_2, k_1 < k_2, \begin{vmatrix} R(j_1 - k_1) & R(j_1 - k_2) \\ R(j_2 - k_1) & R(j_2 - k_2) \end{vmatrix} \geq 0.$$

• $\{lnR(k)\}_{k \geq 0}$ یک دنباله مقعر باشد.

شرایط مشابهی برای متغیرهای طول عمر پیوسته نیز توسط بارلو و پورشن (۱۹۶۵) معرفی شده است.

در مورد خاصیت IFR بارلو و پورشن (۱۹۸۱) در متغیرهای طول عمر پیوسته وناندا و سنگوپتا (۲۰۰۵) در متغیر های طول عمر گسسته ویژگی زیر را بیان کردند:

• اگر T_2, T_1 دو متغیر تصادفی طول عمر دارای خاصیت IFR باشند آنگاه $T_1 + T_2$ نیز دارای خاصیت IFR است.

مثال های نقض زیر نشان می دهند که این ویژگی برای خاصیت DFR در حالت های پیوسته و گسسته برقرار نیست.

مثال ۱ (لای و ایکسای[10] (۲۰۰۶)) می دانیم در توزیع گاما با پارامترهای α و β وقتی $1 > \alpha > 0$ باشد توزیع دارای خاصیت DFR بوده و وقتی $\alpha > 1$ است توزیع دارای خاصیت IFR است.

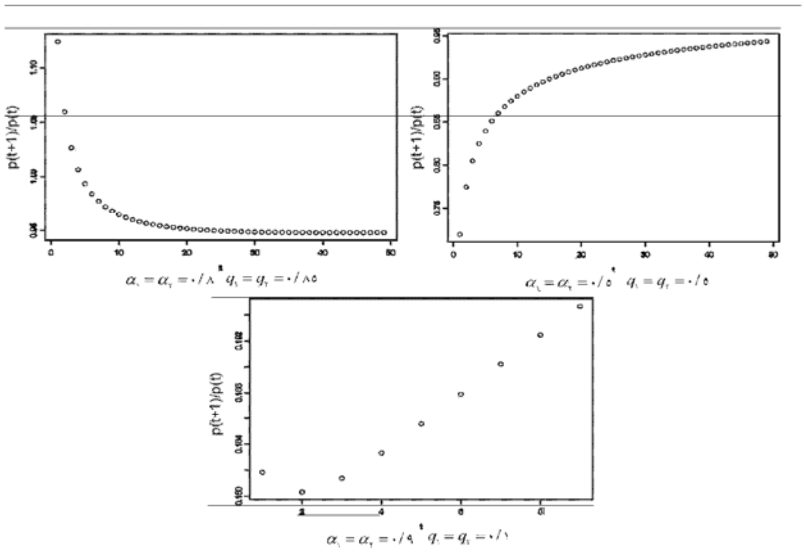
حال اگر $T_1 \sim Ga(\alpha_1, 1)$ و $T_2 \sim Ga(\alpha_2, 1)$ دو متغیر تصادفی مستقل و برای $i = 1, 2$، $\alpha_i \in (\frac{1}{2}, 1)$ باشد T_1 و T_2 دارای خاصیت DFR هستند. اما چون $T_1 + T_2 \sim Ga(\alpha_1 + \alpha_2, 1)$ که در آن $2 > \alpha_1 + \alpha_2 > 1$، بنابراین $T_1 + T_2$ دارای خاصیت IFR است. اگر $0 < \alpha_i < \frac{1}{2}$; $(i = 1, 2)$ آنگاه $T_1 + T_2$ دارای خاصیت DFR است. □

مثال ۲ فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی از توزیع وایبل گسسته با پارامترهای q_i و $1 > \alpha_i > 0$ $(i = 1, 2)$ و تابع جرم احتمال

$$p_{T_i}(t) = q_i^{t^{\alpha_i}} - q_i^{(t+1)^{\alpha_i}} \quad ; \quad 0 < q_i < 1, \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2$$

---
[10] Lai and Xie

باشد. با توجه به آنکه (گوپتا و همکاران (۱۹۹۷)) در توزیع های طول عمر گسسته، صعودی (نزولی) بودن $\frac{p(t+1)}{p(t)}$ معادل لگ–محدب (لگ–مقعر) بودن $p(t)$ و این نیز معادل DFR(IFR) بودن توزیع طول عمر است، علیرغم آنکه هر یک از متغیرهای تصادفی T_1 و T_2 دارای خاصیت DFR هستند، $T_1 + T_2$ با تغیر مقادیر α_iها و q_iها می تواند هر یک از خاصیت های DFR، IFR و یا حتی کمانی را داشته باشد(نمودار ۱).□



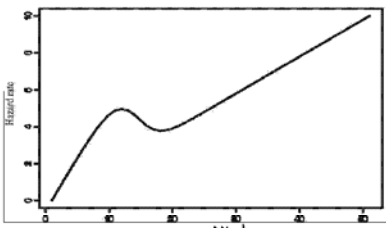
نمودار ۱

- اگر توابع چگالی f_1 و f_2 دارای خاصیت DFR باشند در این صورت توزیع آمیخته این دو توزیع یعنی $f(t) = \theta f_1(t) + (1-\theta) f_2(t)$ برای $0 < \theta < 1$ نیز دارای خاصیت DFR است. (بارلو و پورشن (۱۹۶۵،۱۹۸۱))

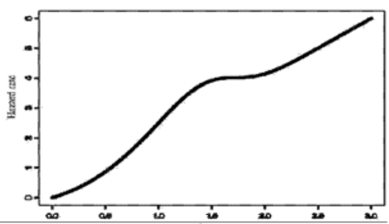
مثال های نقض زیر نشان می دهند این ویژگی برای خاصیت IFR برقرار نیست یعنی توزیع آمیخته دو متغیر تصادفی که دارای خاصیت IFR هستند ممکن است DFR،IFR و یا تلفیقی از این دو به صورت گودالی شکل یا کمانی شکل باشد.

مثال ۳ دو تابع چگالی وایبل به فرم $f_۱(t) = ۲te^{-t^۲}, f_۲(t) = ۳t^۲e^{-t^۳};\quad t > ۰$ را که دارای خاصیت IFR هستند را در نظر بگیرید. نمودار ۲ نشان می دهد با فرض $\theta = ۰/۵$ توزیع آمیخته $f(t) = ۰/۵f_۱(t) + ۰/۵f_۲(t)$ دارای خاصیت IFR است. □

مثال ۴ دو تابع چگالی توزیع وایبل به فرم $f_۱(t) = ۲te^{-t^۲}, f_۲(t) = ٦te^{-۳t^۲};\quad t > ۰$ که دارای خاصیت IFR هستند را در نظر بگیرید. نمودار ۳ نشان می دهد با فرض $\theta = ۰/۰۵$ توزیع آمیخته $f(t) = ۰/۰۵f_۱(t) + ۰/۹۵f_۲(t)$ ابتدا دارای نرخ شکست صعودی و سپس گودالی شکل است. □



نمودار۳



نمودار۲

مثال ۵ فرض کنید متغیرهای تصادفی $T_۱$ و $T_۲$ دارای توابع نرخ شکست صعودی به ترتیب به صورت $h_۱(t) = ۱ - e^{-۵t}$ و $h_۲(t) = ٦ - e^{-۵t}$ باشند. با فرض $\theta = ۰/۵$ تابع نرخ شکست توزیع آمیخته آنها به فرم زیر است:

$$\boxed{h(t) = \frac{۱}{۲}\frac{R_۱(t)}{R(t)}(۱ - e^{-۵t}) + \frac{۱}{۲}\frac{R_۱(t)}{R(t)}(٦ - e^{-۵t})}$$

که در آن $R_i(t)$ تابع بقای متناظر با $h_i(t)$ و $R(t)$ تابع بقای توزیع آمیخته آنها است. نمودار ۴ نشانگر آن است که $h(t)$ یک تابع نزولی است و به سمت ۱ میل می کند. □

مثال ٦ (بلاک[۱۱] و همکاران (۲۰۰۲)) دو متغیر تصادفی با توابع نرخ شکست صعودی و خطی $h_۱(t) = t + ۱$ و $h_۲(t) = ۴t + ۵$ را در نظر بگیرید. در این صورت با فرض $\theta = ۰/۹۵$، $\theta = ۰/٦۵$ و $\theta = ۰/۱$ نرخ شکست توزیع آمیخته آنها به ترتیب صعودی، گودالی، صعودی-گودالی است. □

[۱۱] Block

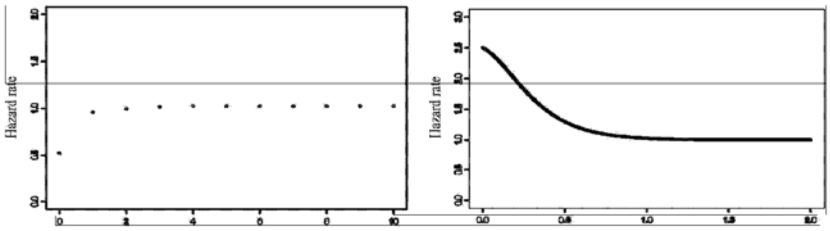
مثال ۷ فرض کنید p_2, p_1 دو تابع جرم احتمال با توزیع وایبل گسسته به فرم زیر باشند:

$$p_1(t) = (\frac{1}{2})^{t^2} - (\frac{1}{2})^{(t+1)^2}, \quad p_2(t) = (\frac{1}{2})^{t^3} - (\frac{1}{2})^{(t+1)^3}; \quad t = 0, 1, 2, ...,$$

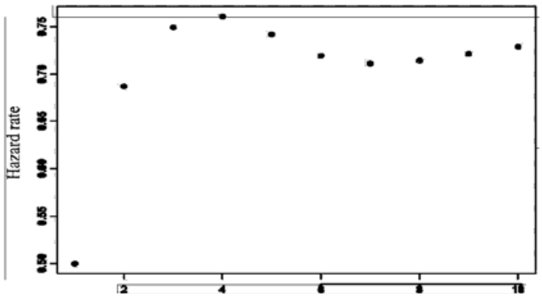
تابع نرخ شکست و تابع بقای این دو چگالی به ترتیب به صورت زیر است:

$$R_1(t) = (\frac{1}{2})^{t^2}, h_1(t) = 1 - (\frac{1}{2})^{(t+1)^2 - t^2}; R_2(t) = (\frac{1}{2})^{t^3}, h_2(t) = 1 - (\frac{1}{2})^{(t+1)^3 - t^3}$$

که ملاحظه می شود توزیع های p_1 و p_2 دارای خاصیت IFR هستند. با فرض $\theta = 0/5$ نمودار ۵ نشان می دهد توزیع گسسته آمیخته $p(t) = 0/5 p_1(t) + 0/5 p_2(t)$ دارای خاصیت IFR است.□



مثال ۸ فرض کنید $p_1(t)$ و $p_2(t)$ دو تابع جرم احتمال از توزیع وایبل گسسته با پارامترهای به ترتیب $q_1 = ۰/۵, \alpha_1 = ۱/۲$ و $q_2 = ۰/۵, \alpha_2 = ۱/۵$ باشند. هر دو چگالی دارای خاصیت IFR هستند. نمودار ٦ نشان می دهد با فرض $\theta = ۰/۲۵$ نرخ شکست توزیع گسسته آمیخته $p(t) = ۰/۲۵p_1(t) + ۰/۷۵p_2(t)$ ابتدا صعودی و سپس گودالی شکل است.$\square$



نمودار ٦

۳ خاصیت IFRA (DFRA) در توزیع های طول عمر پیوسته و گسسته

به منظور پیدا کردن کوچک ترین رده توزیع های طول عمر در یک سیستم منسجم[۱۲] با اجزای دارای خاصیت IFR، برینبایوم[۱۳] و همکاران (۱۹٦٦) خاصیت IFRA را با دو تعریف زیر معرفی کردند:

تعریف ۱: متغیر طول عمر پیوسته (گسسته) T دارای خاصیت IFRA است اگر $R(t)^{\frac{1}{t}}$ $\left(\{R(k)^{\frac{1}{k}}\}_{k>۰}\right)$ یک تابع (دنباله) نزولی باشد که با IFRA1 نشان می دهند.

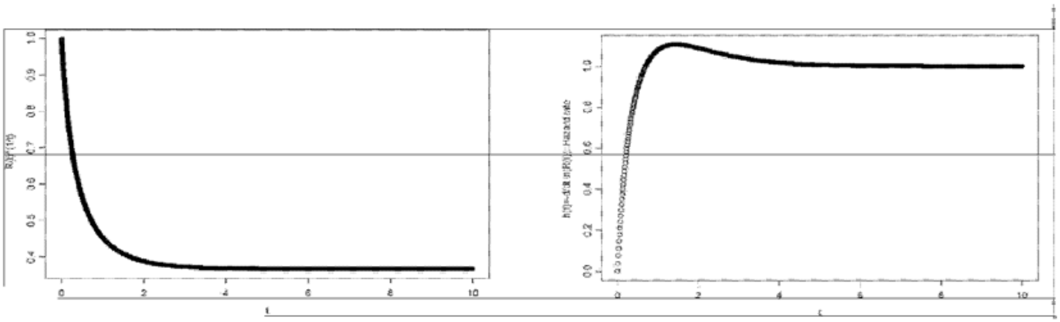
Coherent system[۱۲]
Brinbaum[۱۳]

تعریف ۲: متغیر طول عمر پیوسته (گسسته) T دارای خاصیت IFRA است اگر $\frac{H(t)}{t}$ $\left(\{\frac{H(k)}{k}\}_{k>0}\right)$ که در آن $H(t)$ تابع نرخ شکست تجمعی نام دارد، یک تابع (دنباله) صعودی باشد و آن را با IFRA2 نشان می دهند.

چون برای متغیرهای تصادفی با طول عمر پیوسته، $H(t) = \int_0^t h(u)du = -lnR(t)$ است این دو تعریف معادل می باشند. ولی در مورد متغیرهای گسسته این دو تعریف معادل نیستند.

خاصیت IFRA از خاصیت IFR ضعیفتر است. مثال ۹ در توزیع‌های طول عمر پیوسته و مثال‌های ۱۰ و ۱۱ در توزیع های طول عمر گسسته نشان می دهد که عکس رابطه فوق برقرار نیست، یعنی اگر متغیر طول عمر دارای خاصیت IFRA باشد لزوماً دارای خاصیت IFR نیست.

مثال ۹ متغیر طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $R(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}, t > 0$ را در نظر بگیرید. نمودار ۷ نشان می دهد این توزیع دارای خاصیت IFRA است در حالی که خاصیت IFR طبق تعریف در آن برقرار نیست. □



نمودار ۷: بررسی خاصیت IFR و IFRA در تابع قابلیت اعتماد $R(t) = e^{-t} + e^{-۲t} - e^{-۳t}$

در خانواده توزیع‌های طول عمر گسسته، با استفاده از نامساوی میانگین های هندسی و حسابی می توان نشان داد که فقط، خاصیت IFRA1، خاصیت IFRA2 را نتیجه می دهد. شاکد[۱۴] و همکاران (۱۹۹۵) با ارائه مثال های نقض زیر (۱۰و۱۱) معادل نبودن دو تعریف IFRA1 و IFRA2 را در توزیع های طول عمر گسسته نشان دادند.

مثال ۱۰ دنباله نرخ شکست $\{h(k)\}_{k\geq ۱}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(۱) = ۰/۱, h(۲) = ۰/۹, \forall k \geq ۳; h(k) = ۰/٦,$$

در این صورت توزیع فوق دارای خاصیت IFRA2 می باشد اما

$$[R(۲)]^{\frac{۱}{۲}} = [(۱-h(۱))(۱-h(۲))]^{\frac{۱}{۲}} < [(۱-h(۱))(۱-h(۲))(۱-h(۳))]^{\frac{۱}{۳}} = [R(۳)]^{\frac{۱}{۳}},$$

یعنی خاصیت IFRA1 برای توزیع فوق برقرار نیست. □

در توزیع های طول عمر گسسته نیز با استفاده از مفهوم دنباله های ستاره شکل می توان نشان داد که اگر متغیر طول عمر T دارای خاصیت IFR باشد، آنگاه دارای خاصیت IFRA1 نیز می باشد. در این ارتباط مثال نقض زیر نشان می دهد که عکس روابط فوق برقرار نیست:

مثال ۱۱ دنباله نرخ شکست $\{h(k)\}_{k\geq ۱}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(۱) = ۰/۱, h(۲) = ۰/۴, \forall k \geq ۳; h(k) = ۰/۳,$$

[۱۴] Shaked

با توجه به مقادیر فوق داریم:

$$R(۱) = ۰/۹, R(۲) = ۰/۵۴, \forall k \geq ۳; R(k) = ۰/۵۴(۰/۷)^{k-۲}$$

به راحتی می توان دید:

$$\frac{R(k+۱)^{\frac{۱}{k+۱}}}{R(k)^{\frac{۱}{k}}} = \left[\frac{۴۹}{۵۴}\right]^{\frac{۱}{k(k+۱)}} \leq ۱$$

که نشان می دهد توزیع فوق علی رغم اینکه IFRA1 می باشد IFR نیست. □

۴ خاصیت NBU (NWU) در توزیع های طول عمر پیوسته و گسسته

هنگامی که قطعه ای در هر زمان به طور احتمالی طول عمر باقیمانده کمتری (بیشتری) نسبت به قطعه جدید داشته باشد گوییم توزیع طول عمر آن قطعه دارای خاصیت NBU (NWU) می باشد.

به عبارت دیگر متغیر طول عمر گسسته T را دارای خاصیت NBU گویند اگر و فقط اگر یکی از دو تعریف زیر برقرار باشد:

تعریف ۱ (NBU1)**:** برای هر $i, k \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$ داشته باشیم؛ $R(i|k) \leq R(i)$ که در آن $R(i|k) = P(T > i+k | T \geq k) = \frac{R(i+k)}{R(k)}$ است.

تعریف ۲ (NBU2)**:** برای هر $i, k \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$ داشته باشیم؛ $H(i+k) \geq H(i) + H(k)$.

تعاریف مشابهی برای حالتی که متغیر طول عمر پیوسته باشد نیز بیان شده است که با توجه رابطه $H(t) = \int_۰^t h(u)du = -lnR(t)$ معادل می باشند. اما در حالت گسسته این دو تعریف معادل نمی باشند. شاکد و همکاران (۱۹۹۵) مثال های نقض زیر را در این مورد بیان کرده اند. علاوه بر این، این مثال ها نشان می دهد خاصیت NBU لزوماً خاصیت IFR یا DFR را نتیجه نمی دهد.

مثال ۱۲ اگر دنباله $\{h(k)\}_{k\geq ۱}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

k	۱	۲	۳	۴	۵	٦	$k \geq ۷$
$h(k)$	۰/۵	۰/۸	۰/۸	۰/۵	۰/۹	۰/٦	۰/۹۹

برای هر $k,s \in N$ داریم:

$$\prod_{i=۱}^{s}(۱-h(i)) \geq \prod_{i=k+۱}^{k+s}(۱-h(i)) \Longleftrightarrow R(s) \geq R(s|k),$$

در حالیکه $\sum_{i=۱}^{۳} h(i) = ۲/۱ > ۲ = \sum_{i=۴}^{۶} h(i)$ بنابراین توزیع فوق طبق تعریف دارای خاصیت NBU1 است ولی خاصیت NBU2 در آن برقرار نیست.□

مثال ۱۳ اگر دنباله $\{h(k)\}_{k\geq ۱}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

k	۱	۲	۳	۴	$k \geq ۵$
$h(k)$	۰/۴	۰/۶	۰/۵	۰/۵	۰/۹۹

مشاهده می شود توزیع فوق دارای خاصیت NBU2 است ولی با توجه به اینکه $\prod_{i=۱}^{۲}(۱-h(i)) = ۰/۲۴ < ۰/۲۵ = \prod_{i=۳}^{۴}(۱-h(i))$، دارای خاصیت NBU1 نیست. □

در مثال های زیر (۱۴و۱۵) نشان می دهیم که NBU1 خاصیت IFRA1 و NBU2 خاصیت IFRA2 را نتیجه نمی دهد.

مثال ۱۴ اگر دنباله $\{h(k)\}_{k\geq ۱}$ را همانند مثال ۱۲ در نظر بگیریم در این صورت دنباله $\{R(k)^{\frac{۱}{k}}\}_{k\geq ۱}$ به صورت زیر است:

k	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$k \geq ۷$
$R(k)^{\frac{۱}{k}}$	۰/۵	۰/۱	۰/۱۲۶	۰/۱۷۷	۰/۱۵۸	۰/۲۷۱	$(۰/۰۰۰۴(۰/۰۱)^{k-۶})^{\frac{۱}{k}}$

و چون این دنباله نزولی نیست بنابراین توزیع فوق دارای خاصیت IFRA1 نمی‌باشد. □

مثال ۱۵ اگر دنباله $\{h(k)\}_{k\geq ۱}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

k	۱	۲	۳	۴	$k \geq ۵$
$h(k)$	۰/۴	۰/۶	۰/۴	۰/۵	۰/۹۹

می توان نشان داد توزیع فوق دارای خاصیت NBU2 است اما ملاحظه می شود دنباله $\{\frac{H(k)}{k}\}_{k\geq ۱}$ صعودی نیست زیرا:

k	۱	۲	۳	۴	$k \geq ۵$
$\{\frac{H(k)}{k}\}_{k\geq ۱}$	۰/۴	۰/۵	۰/۴۶	۰/۴۷۵	$\frac{۱/۹+k.۰/۹۹}{k}$

بنابراین توزیع فوق دارای خاصیت IFRA2 نیست. $\square$

هنگامی که قطعه ای در هر زمان دارای میانگین طول عمر باقیمانده(MRL) کمتری (بیشتر) نسبت به قطعه جدید باشد گوئیم توزیع طول عمر آن قطعه ای دارای خاصیت NBUE (NWUE) است. این خاصیت در توزیع های طول عمر پیوسته و گسسته به فرم زیر تعریف می شود.

تعریف ۱: متغیر طول عمر پیوسته T با $\mu = E(X)$ متناهی دارای خاصیت NBUE گویند هرگاه:

$$\forall t > ۰, \quad \int_t^{\infty} R(x)dx \leq \mu R(t)$$

تعریف ۲: متغیر طول عمر گسسته T را دارای خاصیت NBUE گویند هرگاه:

$$\sum_{s=k}^{\infty} R(s) \leq R(k) \sum_{s=۰}^{\infty} R(s) \quad ; k = ۰, ۱, ۲, ...$$

با توجه به تعاریف ۱و۲ به سادگی می توان نشان داد در حالت پیوسته NBU⇒ NBUE و در حالت گسسته NBU1⇒NBUE. در مثال ۱۳ می توان نشان داد توزیع علیرغم آنکه دارای خاصیت NBU2 است دارای خاصیت NBUE نیست.

۵ خاصیت IMRL (DMRL) در توزیع های طول عمر پیوسته و گسسته

میانگین باقیمانده عمر(MRL) در بعضی موارد بسیار مفیدتر از نرخ شکست می باشد. از این مفهوم به عنوان مثال به طور گسترده ای در مباحث بیمه ماندگاری یا همان دوام سیستم استفاده می کنند.

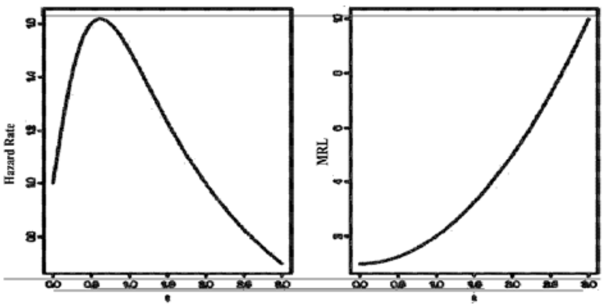
این شاخص در توزیع های طول عمر گسسته و پیوسته به صورت $MRL(t) = E(T - t|T \leq t)$ تعریف می شود. برای حالت های گسسته و پیوسته می توان نشان داد که اگر توزیعی دارای خاصیت IFR(DFR) باشد، دارای خاصیت DMRL(IMRL)

نیز خواهد بود. اما عکس آن همواره برقرار نیست. مثال نقض های زیر در حالت های پیوسته و گسسته این موضوع را نشان می دهد.

مثال ۱۶ فرض کنید متغیر طول عمر پیوسته T دارای تابع نرخ شکست و میانگین باقیمانده عمر به صورت زیر باشد:

$$MRL(t) = ۱ + t^{۲} \quad , h(t) = \frac{۱ + ۲t}{۱ + t^{۲}}; \quad t \geq ۰$$

نمودار ۸ نشان می دهد که متغیر طول عمر T دارای خاصیت IMRL است در حالی که نرخ شکست آن نزولی نیست.□



نمودار ۸: تابع نرخ شکست و تابع میانگین باقیمانده عمر

مثال ۱۷ (لیلو[۱۵] (۲۰۰۰)) فرض کنید متغیر طول عمر پیوسته T دارای میانگین باقیمانده عمر به فرم زیر باشد:

$$MRL(t) = e^{-(t-t^{*})^{۲}}(t - t^{*} + ۱), \quad t \geq ۰$$

که در آن $t^{*} = \frac{۱-\sqrt{۳}}{۳}$. توزیع فوق دارای خاصیت DMRL است اما دارای خاصیت IFR نیست.□

[۱۵] Lillo

مثال ۱۸ (ابراهیمی ۱۹۸۶) فرض کنید متغیر طول عمر گسسته T دارای میانگین باقیمانده عمر به صورت زیر باشد:

t	۰	۱	۲	$t \geq ۳$
$MRL(t)$	۱	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱}{t}$

توزیع فوق دارای خاصیت DMRL است اما دارای خاصیت IFR نیست.□

۶ نتیجه گیری

بر اساس آنچه در این مقاله ارائه شد روابط بین خاصیت های IFR، IFRA1،IFRA2، NBU1، NBU2 و NBUE را در توزیع های طول عمر گسسته و پیوسته می توان در جدول زیر مشاهده نمود.

طول عمر پیوسته	$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}$	$\begin{array}{ccccccc} \text{IFR} & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \text{IFRA1} & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \text{NBU1} & \overset{\Rightarrow}{\Leftarrow_?} & \text{NBUE} \\ \Downarrow\not\Uparrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \\ \text{DMRL} & & \text{IFRA2} & & \text{NBU2} & & \end{array}$
طول عمر گسسته	$\{h(k)\}_{k\geq ۰}; h(k)=P(T=k \mid T\geq k) = \frac{p(k)}{R(k)}$	$\begin{array}{ccccccc} \text{IFR} & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \text{IFRA1} & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \text{NBU1} & \overset{\Rightarrow}{\Leftarrow_?} & \text{NBUE} \\ \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \not\Downarrow\not\Uparrow & & \\ \text{DMRL} & & \text{IFRA2} & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \text{NBU2} & \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow_?} & \text{NBUE} \end{array}$

کتاب‌نامه

[1] Barlow R.E., Marshall A.W., and Proschan F., (1963). *Properties of Probability Distributions with Monotone Hazard Rate.* Annals of Mathematical Statistics, 34, 375-389.

[2] Block, H.W., Savits, T.H., and Singh, H. (2002). *A criteria for burn-in that balances mean residual life and residual variance.* Opreration Research, 50(2), 290-296.

[3] Barlow, R.E, and Proschan, F., (1965). *Mathematical Theory of Reliability.* John Wiley and Sons, New York.

[4] Barlow, R.E, and Proschan, F., (1981). *Statistical Theory of Reliability and life Testing.* Silver Spring: To Begin With, 1981.

[5] Birnbaum Z.E., Esary J.D. and Marshall A.W. (1966). *A stochastic characterization of wear-out for components and systems.* Annals of Mathematical Statistics, 37, 816-825.

[6] Bracquemond, C. and Gaudoin, O. (2003). *A survey on discrete life time distributions.* Internat.J.Reliability, Quality Safety Eng. 10, 69-98.

[7] Bracquemond, C., Gaudoin, O. and Xie, M. (2001). *On some notions of discrete ageing.* In System and Bayesian Reliability. pp. 185-197.

[8] Ebrahimi, N. (1986). *Classes of discrete decreasing and increasing mean residual life distributions.* IEEE Trans. on Reliability. 35, 403-405.

[9] Gupta P.L., Gupta R.C., and Tripathi R.C., (1997). *On the monotonic properties of discrete failure rates.* Journal of Statistical Planning and Inference, 65, 255-268.

[10] Lai, C.D. and Xie, M. (2006). *Stochastic Ageing and dependence for Reliability.* Springel, XX, 240 p. 7illus, Hard cover, ISBN:978-0-387-29742-2.

[11] Lillo, R. E. (2000). *Note on relations between criteria for ageing.* Reliability Engineering and System Safety. 67, 129-133.

[12] Nanda, A. and Sengupta, D. (2005). *Discrete Life Distributions with Decreasing Reversed Hazard.* Sankhya, Vol. 67, part 1. pp 106-125.

[13] Shaked M., Shanthikumar J.G., and Valdez-Torres J.B., (1995). *Discrete hazard rate functions.* Computers and Operations Research, 22, 4, 391-402.

[14] Smith P.J. (2002). *Analysis of Failure and Survival data.* Chapman and Hall/CRC.ISBN:1-58488-075-9.