نرخ شکست معکوس و میانگین باقیمانده عمر معکوس در توزیع‌های طول عمر گسسته

محمد خراشادیزاده [۱] عبدالحمید رضایی رکن آبادی [۱] غلامرضا محتشمی برزادران [۱]

[۱] گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: یکی از شاخص های قابلیت اعتماد که اخیراً مورد توجه قرار گرفته‌است، نرخ شکست معکوس[۱] (RHR) است. این شاخص در توزیع های طول عمر پیوسته به صورت $rh(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ و در توزیع های طول عمر گسسته به فرم $rh(k) = P(T = k|T \leq k) = \frac{F(k)-F(k-1)}{F(k)}$ تعریف می شود. به عنوان مثال برخی کمیت های مورد توجه در بیمه و علوم قضایی را به خوبی می توان بوسیله نرخ شکست معکوس بیان نمود.

یکی دیگر از اندازه‌های قابلیت اعتماد که مرتبط با نرخ شکست معکوس است، میانگین باقیمانده عمر معکوس[۲] (RMR) نام دارد. این اندازه برای اولین بار توسط ناندا[۳] و همکاران(۲۰۰۳) در مورد توزیع‌های طول عمر پیوسته به صورت امید ریاضی متغیر تصادفی $X_t = (t - X|X \leq t)$، تعریف شده است. گلیفروشانی و اسدی[۴](۲۰۰۷) میانگین باقیمانده عمر معکوس و برخی خواص آن را در حالت گسسته معرفی و بررسی کرده‌اند.

در این مقاله علاوه بر بیان نکات دیگری از نرخ شکست معکوس، ضمن معرفی تابع واریانس باقیمانده عمر معکوس[۵] (RVR) در توزیع های طول عمر گسسته، ارتباط آن را با میانگین باقیمانده عمر معکوس بیان می نمائیم. علاوه بر آن مشخصه سازیهایی بر اساس این شاخص ها بدست آورده و نامساویی را در این زمینه ارائه می نمائیم.

واژه های کلیدی: نرخ شکست معکوس، میانگین باقیمانده عمر معکوس، واریانس باقیمانده عمر معکوس، خاصیت DRHR، خاصیت IRMR، خاصیت IRVR.

۱ مقدمه

فرض کنید T یک متغیر تصادفی طول عمر گسسته با مقادیر صحیح نامنفی، تابع جرم احتمال $p(t)$ و تابع توزیع $F(t)$ باشد. تابع نرخ شکست معکوس برای T به صورت زیر تعریف می

[۱] Reversed Hazard Rate
[۲] Reversed Mean Residual life
[۳] Nanda
[۴] Goliforushani and Asadi
[۵] Reversed Variance Residual

شود:

$$rh(t) = P(T = t|T \leq t) = \frac{p(t)}{F(t)} = \frac{F(t) - F(t-1)}{F(t)},$$

در حقیقت این نرخ، احتمال شرطی خراب شدن قطعه در دفعه tام به شرط آن است که بدانیم طول عمر قطعه حداکثر t بوده است. معمولاً برای برآورد تابع قابلیت اعتماد در داده های سانسور چپ از تابع نرخ شکست معکوس استفاده می شود. در این زمینه می توان به مقالات چندرا و روی[۶] (۲۰۰۱) و سنگوپتا[۷] و همکاران (۱۹۹۹) اشاره نمود. گوپتا[۸] و ناندا (۲۰۰۱) و گوپتا و همکاران (۲۰۰۴) نیز کاربردهای بیشتری از نرخ شکست معکوس را مطرح نموده‌اند. رده توزیع های دارای خاصیت نرخ شکست معکوس نزولی (DRHR) را نیز بلک[۹] و همکاران (۱۹۹۸)، شاکد و شانتیکومار[۱۰] (۱۹۹۴) و ناندا و سنگوپتا (۲۰۰۵) مورد بررسی قرار داده اند.

براساس تعریف بالا به سادگی می توان دریافت که سه گزاره زیر معادل هستند:

- F دارای خاصیت نرخ شکست معکوس نزولی (DRHR) است.
- $\frac{F(n+t)}{F(n)}$ به ازای هر $n \in N$ نسبت به t نزولی است.
- $G_t(n) = P(t - T \leq n|T \leq t)$ نسبت به t به طور احتمالی صعودی[۱۱] (SI) است.

علاوه براین ناندا و سنگوپتا (۲۰۰۵) خواص زیر را در خصوص نرخ شکست معکوس نزولی بیان کردند:

- اگر دنباله $\{p(t)\}_{t\geq 0}$ نسبت به t نزولی باشد آنگاه F دارای خاصیت DRHR است.
- اگر F دارای نرخ شکست نزولی (DFR) باشد آنگاه دارای خاصیت DRHR نیز می باشد.

---

[۶] Chandra and Roy
[۷] Sengupta
[۸] Gupta
[۹] Black
[۱۰] Shaked and Shanthikumar
[۱۱] Stochastically Increasing

- اگر دنباله $\{\frac{p(n+t)}{p(t)}\}_{t\geq 0}$ به ازای هر $n \in N$ نسبت به t یکنوا باشد، آنگاه F دارای خاصیت DRHR می باشد.

- تابع چگالی گسسته p دارای خاصیت DRHR است، اگر و فقط اگر توزیع پیوسته متناظر با آن لگ−مقعر باشد.

با استفاده از موارد فوق به راحتی می توان نشان داد که توزیع های دوجمله ای، دوجمله ای منفی، پواسن، هندسی، فوق هندسی و توزیع سریهای لگاریتمی دارای خاصیت DRHR هستند.

۲ میانگین باقیمانده عمر معکوس در توزیع‌های طول عمر گسسته

از دیگر اندازه های قابلیت اعتماد مرتبط با نرخ شکست معکوس، میانگین باقیمانده عمر معکوس (RMR) نام دارد که آن را با $\alpha(t)$ نمایش می دهیم. این شاخص اولین بار توسطناندا و همکاران(۲۰۰۳) برای توزیع های طول عمر پیوسته معرفی شد. گلیفروشانی و اسدی(۲۰۰۷) برای توزیع های طول عمر گسسته بر اساس میانگین متغیر تصادفی $T_t = t - T|T < t$ این شاخص را به فرم زیر معرفی نموده و برخی از خواص و ویژگی های آن را بیان کردند.

$$\alpha^*(t) = E(t-T|T<t) = \frac{1}{F(t-1)} \sum_{i=1}^{t} F(i-1) \quad ; \quad t \in \{1, 2, ...\}, \quad \alpha^*(0) = 0.$$

آنها نشان دادند $rh(t) = 1 - \frac{1-\alpha^*(t+1)}{\alpha^*(t)}$ و اگر T دارای تکیه گاه $\{0, 1, ..., m\}$ با تابع توزیع F باشد $F(t) = F(0) \prod_{i=1}^{t} \left(\frac{\alpha^*(i)}{\alpha^*(i+1)-1}\right)$ که در آن $F(0) = \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\alpha^*(i)}{\alpha^*(i+1)-1}\right)\right)^{-1}$.

در این مقاله میانگین باقیمانده عمر معکوس ($\alpha(t)$) در توزیع های طول عمر گسسته را کمی متفاوت و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\alpha(t) = E(t-T|T \leq t)$$

$$= t - \frac{\sum_{i=0}^{t} ip(i)}{F(t)}$$

$$= t - \frac{\sum_{i=1}^{t}(F(t) - F(i-1))}{F(t)}$$

$$= \frac{1}{F(t)}\sum_{i=1}^{t} F(i-1) \quad , \qquad t \in \{1, 2, ...\},$$

و $\alpha(0) = 0$.

در قضیه زیر نشان میدهیم ارتباطی که بین تابع نرخ شکست ($h(.)$) و میانگین باقیمانده عمر (MRL) در توزیع های طول عمر گسسته وجود دارد یعنی $h(t) = 1 - \frac{MRL(t)}{1+MRL(t+1)}$ که ابراهیمی[12] (۱۹۸۶) براساس آن شرط لازم و کافی برای صعودی و نزولی بودن MRL را بیان کرده است؛ بین توابع $rh(.)$ و $\alpha(.)$ نیز وجود دارد.

قضیه ۱ بین نرخ شکست معکوس ($rh(t)$) و میانگین باقیمانده عمر معکوس ($\alpha(t)$) در توزیع های طول عمر گسسته همواره رابطه زیر برقرار است:

$$rh(t) = 1 - \frac{\alpha(t)}{1 + \alpha(t+1)}.$$

اثبات: براساس تعریف $\alpha(t)$ می توان نوشت:

$$F(t+1)\alpha(t+1) - F(t)\alpha(t) = \sum_{i=1}^{t+1} F(i-1) - \sum_{i=1}^{t} F(i-1)$$

$$= F(t)$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $F(t)$، با توجه به برقراری رابطه $1 - rh(t) = \frac{F(t-1)}{F(t)}$، نتیجه مطلوب حاصل می گردد.□

بدیهی است $\alpha(t)$ تابعی نزولی نیست اما اگر $rh(t)$ تابعی نزولی باشد آنگاه $\alpha(t)$ صعودی است. به عبارتی دیگر خاصیت IRMR ضعیفتر از خاصیت DRHR است.

در قضیه زیر نشان می دهیم که $\alpha(t)$ به طور یکتا توزیع T را مشخص می کند.

[12] Ebrahimi

قضیه ۲ اگر T متغیر طول عمر گسسته با تابع توزیع F و تکیه گاه $\{0, 1, 2, ..., m\}$ باشد،(m می تواند متناهی یا نامتناهی باشد) آنگاه بین F و $\alpha(t)$ رابطه زیر برقرار است:

$$F(t) = F(0) \prod_{i=1}^{t} \left(\frac{1 + \alpha(i+1)}{\alpha(i)} \right),$$

که در آن $F(0) = \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1+\alpha(i+1)}{\alpha(i)} \right) \right)^{-1}$.

اثبات: با استفاده از قضیه ۱ و فرم تابع نرخ شکست معکوس داریم:

$$F(t) = F(t-1) \left[\frac{1 + \alpha(t+1)}{\alpha(t)} \right], \quad t \in \{1, 2, ..., m\},$$

حال نتیجه لازم از حل معادله بالا حاصل می گردد.□

۳ واریانس باقیمانده عمر معکوس در توزیعهای طول عمر گسسته

واریانس باقیمانده عمر معکوس نیز یکی از شاخص های قابلیت اعتماد مرتبط با میانگین باقیمانده عمر معکوس است. این اندازه را در توزیع های طول عمر گسسته به فرم $\beta(t) = Var(t - T|T \leq t)$ تعریف می کنیم.ناندا و همکاران(۲۰۰۳) این شاخص را برای اولین بار در توزیع های طول عمر پیوسته ارائه نمود. متغیر T را دارای خاصیت IRVR گوئیم هرگاه $\beta(t)$ صعودی باشد.

برای اثبات قضیه زیر که در آن ارتباط بین تابع $\beta(.)$ و $\alpha(.)$ بیان می گردد، ابتدا لازم است لم زیر را ارائه نمائیم.

لم ۱: اگر $p(t)$ تابع جرم احتمال متغیر تصادفی گسسته T، و $F(t)$ تابع توزیع آن باشد آنگاه روابط زیر را داریم:

$$\sum_{i=0}^{t} ip(i) = -\sum_{i=1}^{t} F(i-1) + tF(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{t} i^2 p(i) = -\sum_{i=1}^{t} (2i-1)F(i-1) + t^2 F(t). \tag{2}$$

اثبات: با توجه به اینکه $p(i) = F(i) - F(i-1)$ رابطه (۱) براحتی نتیجه می شود.
همچنین با توجه به اینکه

$$\sum_{i=0}^{t} i^2 p(i) = -F(0) + (1^2 - 2^2)F(1) + \ldots + ((t-1)^2 - t^2)F(t-1) + t^2 F(t),$$

رابطه (۲) حاصل می گردد.□

قضیه ۳ بین تابع واریانس باقیمانده عمر معکوس$(\beta(.))$ و میانگین باقیمانده عمر معکوس$(\alpha(.))$ در توزیع های طول عمر گسسته همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\beta(t) = (2t+1)\alpha(t) - \alpha^2(t) - \frac{2}{F(t)} \sum_{i=1}^{t} iF(i-1), \quad t \in \{1, 2, \ldots\},$$

و $\beta(0) = 0$.

اثبات: با توجه به تعریف $\beta(t)$ می توان نوشت:

$$\beta(t) = E\left[(t-T)^2 | T \le t\right] - E^2(t-T|T \le t)$$

$$= t\alpha(t) - \frac{t\sum_{i=0}^{t} ip(i)}{F(t)} + \frac{\sum_{i=0}^{t} i^2 p(i)}{F(t)} - \alpha^2(t),$$

با استفاده از لم ۱ نتیجه مطلوب حاصل می شود.□

نکته ۱ مشابه قضیه ۳ می توان نشان داد بین $\beta^*(t)$ و $\alpha^*(t)$ را بطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \beta^*(t) &= Var(t-T|T<t) \\ &= (2t+1)\alpha^*(t) - \alpha^{*^2}(t) - \frac{2}{F(t-1)} \sum_{i=1}^{t} iF(i-1), \quad t \in \{1, 2, \ldots\}, \end{aligned}$$

و $\beta^*(0) = 0$.

مثال ۱ فرض کنید متغیر طول عمر گسسته T دارای تابع جرم احتمال به صورت زیر باشد:

$$p(t) = P(T=t) = \frac{1}{N}, \quad t = 1, 2, \ldots, N.$$

در این توزیع می توان نشان داد که برای $t = ۲, ۳, ..., N$ داریم:

$\beta(t) = \frac{t^۲ - ۱}{۱۲}$ ، $\alpha(t) = \frac{t-۱}{۲}$,

همچنین $\alpha^*(t) = \frac{t}{۲}$ و $\beta^*(t) = \frac{t(t-۲)}{۱۲}$.$\square$

تعریف ۱ متغیر تصادفی گسسته T را متعلق به خانواده توزیع تلسکوپی گوئیم هرگاه تابع جرم احتمال آن را بتوان به فرم زیر نوشت:

$$P(T = t) = q^{k_\theta(t)} - q^{k_\theta(t+۱)}, \quad t = ۰, ۱, ۲, ..., \quad \theta > ۰, ۰ < q < ۱.$$

که در آن θ پارامتر توزیع و $k_\theta(t)$ تابعی صعودی نسبت به t است.$\square$

مثال ۲ اگر T متعلق به خانواده توزیع تلسکوپی باشد داریم:

$$\alpha(t) = \frac{t - \sum_{i=۱}^{t} q^{k_\theta(i)}}{۱ - q^{k_\theta(t+۱)}}.$$

در این خانواده توزیع $\alpha(t)$ برای تمام مقادیر مختلف q و $k_\theta(t)$ صعودی است.$\square$

نکته ۲ از جمله توزیع های متعلق به خانواده توزیع های تلسکوپی می توان به توزیع هندسی، وایبل گسسته، رایلی گسسته، گامپرتس گسسته و ... اشاره نمود.

در قضیه زیر یک کران بالا برای واریانس باقیمانده عمر معکوس در توزیع های دارای خاصیت IRMR معرفی می نماییم.

قضیه ۴ اگر T دارای خاصیت IRMR باشد آنگاه:

$$\beta(t) \leq \alpha(t)(۱ + \alpha(t)), \quad t \in \{۰, ۱, ۲, ...\}.$$

اثبات: با توجه به فرم $\alpha(t)$ داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{t} F(i)\alpha(i) &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{i} F(j-1) \\
&= \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=j}^{t} F(j-1) \\
&= \sum_{j=1}^{t}(t-j+1)F(j-1) \\
&= t\sum_{j=1}^{t} F(j-1) - \sum_{j=1}^{t} jF(j-1) + \sum_{j=1}^{t} F(j-1), \qquad (3)
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{2}{F(t)}\sum_{i=0}^{t} F(i)\alpha(i) = (2t+2)\alpha(t) - \frac{2}{F(t)}\sum_{j=1}^{t} jF(j-1)$$

$$= \alpha^2(t) + \beta(t) + \alpha(t),$$

در نتیجه:

$$\beta(t) - \alpha^2(t) = \frac{2}{F(t)}\sum_{i=0}^{t} F(i)\alpha(i) - 2\alpha^2(t) - \alpha(t)$$

$$= \frac{2}{F(t)}\sum_{i=1}^{t} F(i)(\alpha(i) - \alpha(t)) + \alpha(t)$$

$$\leq \alpha(t)$$

که حکم قضیه از نامساوی اخیر حاصل می گردد.□

نکته ۳ناندا و همکاران (۲۰۰۳) نشان دادند اگر T دارای خاصیت IRMR باشد آنگاه دارای خاصیت IRVR نیز است. به عبارتی دیگر خاصیت IRVR ضعیفتر از خاصیت IRMR است.

۴ نتیجه گیری

در این مقاله علاوه بر بیان نکات دیگری از میانگین باقیمانده عمر معکوس، تابع واریانس باقیمانده عمر معکوس معرفی و مشخصه سازی و نامساویی براساس آن بیان گردید.

کتاب‌نامه

[1] Black, H., Savits, T. and Singh, H. (1998). *The Reversed hazard rate function.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, 12: 69-90.

[2] Chandra, N.K. and Roy, D. (2001). *Some results on reversed hazard rate.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, 15:95-102.

[3] Ebrahimi, N. (1986). *Classes of discrete decreasing and increasing mean residual life distributions.* IEEE Trans. on Reliability. 35, 403-405.

[4] Goliforushani, S. and Asadi, M. (2007). *On the discrete mean past lifetime.* To appear in Metrika.

[5] Gupta,R.D., Gupta, R.C. and Sankaran, P.G. (2004). *Some Characterization Results Based on Factorization of the (Reversed) Hazard Rate Function.* Communi. in Statist. Theory and Methods, Vol.33, No. 12, pp. 3009-3031.

[6] Gupta, R.D. and Nanda, A.K. (2001). *Some results on reversed hazard rate ordering.* Commun. Statist-Theory and Method, 30: 2447-57.

[7] Nanda, A. and Sengupta, D. (2005). *Discrete life distributions with Decreasing Reversed Hazard.* Sankhaya. Vol. 67. part 1. pp. 106-125.

[8] Nanda, A. K., Singh, H., Misra, N. and Paul, P. (2003). *Reliability Properties of Reversed Residual Lifetime.* Communications in Statistics-Theory and Methods. Vol.32, 10, pp. 2031-2042.

[9] Sengupta, D., Singh, H. and Nanda, A.K. (1999). *The proportional reversed hazard model.* Technical Report, Indian Statistical Institute.

[10] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1994). *Stochastic ordered and their Applocations.* New York: Academic press.