ترتیب نسبت درستنمایی متناسب و کاربردهای آن

جلیل جراحی فریز [۱] غلامرضا محتشمی برزادران [۱]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه فردوسی مشهد [۲] عضو هیات علمی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: در این مقاله یک ترتیب تصادفی جدید بین متغیرهای تصادفی نا منفی معرفی می کنیم که آن را ترتیب درستنمایی متناسب از بالا[۱] $(uplr)$ می نامیم که رابطه نزدیکی با ترتیب نسبت درستنمایی از بالا[۲] (ulr) دارد لذا ابتدا به بیان تعاریفی از ترتیب نسبت درستنمایی [۳] (lr)، ترتیب نسبت درستنمایی متناسب[۴] (plr) و ترتیب نسبت درستنمایی از بالا و... با توجه به راموس روموئرو سوردو دیاز[۵] (۲۰۰۱) و ابو کلام و کید[۶] (۲۰۰۷) می پردازیم و به قضایایی در مورد ارتباط این ترتیب ها اشاره خواهیم کرد سپس به معرفی ترتیب نسبت درستنمایی از بالا ومشخصه هایی از آن خواهیم پرداخت.

واژه های کلیدی: ترتیب نسبت درستنمایی، ترتیب نسبت درستنمایی متناسب، ترتیب نرخ خطر، ترتیب تصادفی، ترتیب نسبت درستنمایی متناسب صعودی(نزولی)، ترتیب نسبت درستنمایی بالا، ترتیب نرخ خطر بالا، ترتیب نسبت درستنمایی متناسب بالا، تابع چگالی لگ محدب(مقعر).

۱ ترتیب‌های نسبت درستنمایی و ویژگی های آن

در زمینه ترتیبهای درستنمایی و کاربردهایی از آن مقالات و کتب زیادی تاکنون نوشته شده است که ازآن جمله احمد و کید(۲۰۰۵)، احمد و همکاران (۲۰۰۵)، زید(۱۹۸۸)، آرنولد(۱۹۸۷)، بارلو(۱۹۷۵) و بلوزنس و همکاران (۱۹۹۱) را می توان نام برد در این بخش به مروری اجمالی بر ترتیب های شناخته شده ای که در قسمت های بعدی به آنها نیاز داریم می پردازیم و همچنین قضایایی که به روابط این توزیع ها اشاره دارد را مطرح خواهیم کرد.

تعریف ۱: فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی های به ترتیب g, f باشند بطوریکه $\frac{f(t)}{g(t)}$ روی اجتماع تکیه گاههای Y, X نزولی باشد در این صورت می گوییم $X \leq_{lr} Y$ و بدین معنی است که X درترتیب نسبت درستنمایی از Y کوچکتر است.

[۱] Up proportional Likelihood Ratio
[۲] Up Likelihood Ratio
[۳] Likelihood Ratio
[۴] Proportional Likelihood Ratio
[۵] Ramos Romero and Sordo Diaz
[۶] Aboukalam and Kayid

بسیاری از خواص ترتیب نسبت درستنمایی در شیکد و شانتیکومار[۷] (۱۹۹۴) ذکر شده است. ترتیب نسبت درستنمایی می تواند در مشخصه سازی متغیرهای تصادفی که دارای چگالی لگ مقعر(محدب) هستند مورد استفاده قرار گیرد. می توان نشان داد که: $\log f(x)$ مقعر است $\Longleftrightarrow X+t \leq_{lr} X+t'\;;\forall t<t'$.

برای آشنایی بیشتر با ویژگی های ترتیب نسبت درستنمایی ابتدا چند نکته مرتبط در این زمینه را بدون اثبات بیان می کنیم:

قضیه ۱ اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند که $X \leq_{lr} Y$ و ψ یک تابع صعودی (نزولی) باشد آنگاه $\psi(X) \leq_{lr} [\geq_{lr}] \psi(Y)$.

قضیه ۲ اگر $(X_i, Yi), i=1,2,...,m$ جفت های مستقل از متغیرهای تصادفی باشند که $X_i \leq_{lr} Y_i, i=1,2,...,m$. اگر Y_i, X_i برای $i=1,2,...,m$ دارای چگالی لگ مقعر باشند بجز احتمالا در یک X_l و یک Y_k که $l \neq k$ سپس $\sum_{i=1}^{m} X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^{m} Y_i$.

تعریف ۲: متغیرتصادفی پیوسته X که دارای تابع چگالی f است دارای نسبت درستنمایی صعودی [۸] (ILR) است اگر $logf(x)$ مقعر باشد و دارای نسبت درستنمایی نزولی [۹] (DLR) است اگر $logf(x)$ محدب باشد.

تعریف ۳: اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند که $\forall u \in (-\infty, \infty); \quad P(X>u) \leq P(Y<u)$ در این صورت می گوییم X در ترتیب تصادفی از Y کوچکتر است و آن را با نماد $X \leq_{st} Y$ نمایش می دهیم.

مشخصه هایی برای ترتیبهای $\leq_{lr}$ و $\leq_{st}$ که به هم مرتبط هستند در تعاریف زیر بیان می شوند.

تعریف ۴: فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نا منفی با توابع توزیع پیوسته و توابع نرخ خطر r و q باشند بطوریکه $r(t) \geq q(t)$ در این صورت می گوییم $X \leq_{hr} Y$ و بدین مفهوم است که X در ترتیب نرخ خطر از Y کوچکتر است.

قضیه ۳ اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند که $X \leq_{hr} Y$ آنگاه $X \leq_{st} Y$.

[۷] Shaked and Shanthikumar
[۸] Increasing Likelihood Ratio
[۹] Decreasing Likelihood Ratio

قضیه ۴ اگر $X \leq_{hr} Y$ و g یک تابع صعودی (نزولی) باشد آنگاه $g(X) \leq_{hr} [\geq_{hr}] g(Y)$.

فرض کنید $F(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی نامنفی X با میانگین (μ) متناهی باشد و $p \in [0, 1]$, $F^{-1}(p) = inf\{x : F_X(x) \geq p\}$ باشد آنگاه منحنی لورنتس به صورت $0 \leq p \leq 1$ $L_X(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^P F^{-1}(t)dt$ تعریف می شود.

تعریف ۵: می گوییم X در ترتیب لورنتس از Y کوچکتر است $(X \leq_L Y)$ اگر و تنها اگر برای همه $0 \leq p \leq 1$ داشته باشیم $L_X(p) \geq L_Y(p)$.

تعریف ٦: می گوییم متغیر تصادفی X دارای نرخ شکست صعودی[10] (IFR) است اگر $\bar{F}$ روی دامنه‌اش لگ مقعر باشد و دارای نرخ شکست نزولی[11] (DFR) است اگر $\bar{F}$ روی دامنه اش لگ محدب باشد. در واقع X دارای خاصیت $(DFR)IFR$ است اگر و فقط اگر $\frac{\bar{F}(x+c)}{\bar{F}(x)}$ برای هر $0 \leq c$ روی x نزولی (صعودی) باشد.

۲ ترتیب نسبت درستنمایی متناسب

ترتیب نسبت درستنمایی متناسب توسط راموئر و دیاز (۲۰۰۱) بعنوان تعمیمی از ترتیب نسبت درستنمایی بیان گردید که ضمن تعریف آن، قضایایی مرتبط با این بحث را مطرح می کنیم و تعاریف جدیدی که بر مبنای آن حاصل شده را ذکر می نماییم و در پایان این بخش دو قضیه مرتبط با ترتیب نسبت درستنمایی در توزیع های وزنی را بیان خواهیم نمود.

تعریف ۷: فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی های به ترتیب g, f باشند بطوریکه $\frac{g(\lambda x)}{f(x)}$ که $0 < \lambda < 1$ برای x روی اجتماع تکیه گاههای Y, X صعودی باشد در این صورت می گوییم X کوچکتر از Y درترتیب نسبت درستنمایی متناسب است و آن را با نماد $X \leq_{plr} Y$ نمایش می دهیم که برای $\lambda = 1$ همان ترتیب نسبت درستنمایی را نتیجه می دهد.

مثال ۱: فرض کنید $X_i, i = 1, 2$ متغیرهای تصادفی از توزیع نمایی با پارامترهای α_i باشند به آسانی ملاحظه می شود هرگاه $\alpha_1 < \alpha_2$ باشد $X_2 \leq_{plr} X_1$.

---

[10] Increasing Failure Rate

[11] Deacreasing Failure Rate

قضیه ۵ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته باشند آنگاه $\forall a > 1; X \leq_{plr} Y \Longleftrightarrow X \leq_{lr} aY$.

اثبات: با توجه به اینکه $\frac{g_{aY}(x)}{f(x)} = \frac{g(x/a)}{af(x)} = \lambda \frac{\lambda g(\lambda x)}{f(x)}, \quad \lambda = \frac{1}{a} < 1$ که براحتی نتیجه بدست می آید.

قضیه ۶ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته باشند. اگر Y دارای تابع چگالی مقعر باشد در این صورت

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{plr} Y.$$

اثبات: می دانیم اگر متغیر تصادفی نا منفی Y دارای تابع چگالی لگ مقعر باشد و $a > 1$ باشد آنگاه $Y \leq_{lr} aY$. از طرفی بنا به فرض $X \leq_{lr} Y$ و چون رابطه $\leq_{lr}$ یک رابطه تعدی است لذا $X \leq_{lr} aY$ که با توجه به قضیه ۵ حکم برقرار است.

تعریف ۸: فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی پیوسته با تابع چگالی f باشد گوییم X دارای نسبت درستنمایی متناسب صعودی[۱۲] (IPLR) است اگر $\frac{f(\lambda x)}{f(x)}$ برای هر $0 < \lambda < 1$ روی x صعودی باشد و گوییم X دارای نسبت درستنمایی متناسب نزولی[۱۳] (DPLR) است اگر $\frac{f(\lambda x)}{f(x)}$ برای هر $0 < \lambda < 1$ روی x نزولی باشد.

قضیه ۷ فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی پیوسته باشد آنگاه سه عبارت زیر معادلند:

(۱) X یک $IPLR$ است.

(۲) $\forall a > 1; \quad X \leq_{lr} Y$.

(۳) $X \leq_{plr} X$.

قضیه ۸ فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی پیوسته با تابع چگالی لگ مقعر باشد در این صورت X یک $IPLR$ است.

[۱۲] Increasing proportional Likelihood Ratio

[۱۳] Decreasing proportional Likelihood Ratio

قضیه ۹ فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی پیوسته با تابع چگالی f باشد در این صورت X یک $IPLR$ $(DPLR)$ است اگر و فقط اگر $f(e^x)$ یک تابع لگ مقعر (لگ محدب) باشد.

قضیه ۱۰ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته با تکیه گاه R^+ باشد. اگر $X \leq_{lr} Y$ و X یا Y یک $IPLR$ باشد در این صورت $X \leq_{plr} Y$.

قضیه ۱۱ فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی پیوسته باشد اگر $logX$ دارای خاصیت $IFR(DFR)$ باشد آنگاه برای $a < b$ که $a, b \in supp(X)$ $X_{(b,\infty)} \leq_L X_{(a,\infty)} (\geq_L)$.

قضیه ۱۲ فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی پیوسته باشد اگر $F(e^x)$ لگ مقعر(لگ محدب) باشد آنگاه برای همه $a < b$ که $a, b \in supp(X)$ $X_{(\circ,a)} \leq_L X_{(\circ,b)} (\geq_L)$.

قضایای زیر برای حالتهای وزنی از خانواده توزیع ها قابل بیان است که تفصیل این بحث در آینده تحقیق مورد توجه خواهد بود.

قضیه ۱۳ اگر F یک تابع توزیع بطور یکنواخت پیوسته باشد و $w(x)$ صعودی (نزولی) باشد آنگاه $X \leq_{plr} (\geq_{plr}) \hat{X}_w$ که در آن $\hat{X}_w \sim g(x) = \frac{w(x)f(x)}{E(w(X))}$.

اثبات: با توجه به آنکه $\frac{g(\lambda x)}{f(x)} = \frac{w(\lambda x)}{E(w(\lambda X))} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$ هرگاه $w(x)$ صعودی باشد و f دارای خاصیت $IPLR$ باشد آنگاه $\frac{g(\lambda x)}{f(x)}$ صعودی و در نتیجه $X \leq_{plr} \hat{X}_w$ و همچنین هرگاه $w(x)$ نزولی باشد و f دارای خاصیت $DPLR$ باشد $X \geq_{plr} \hat{X}_w$.

برای وزنهای مختلف می توان حالات خاصی از قضیه فوق را در نظر گرفت و همچنین در حالت $\lambda = ۱$ قضیه فوق برای اثبات $X \leq_{lr} (\geq_{lr}) \hat{X}_w$ می تواند بکار رود.

قضیه ۱۴ اگر $\hat{X}_w \sim \frac{w(x)f(x)}{E(w(x))}$ و $\hat{Y}_w \sim \frac{w(x)g(x)}{E(w(x))}$ باشند و $X \leq_{plr} Y$ و w دارای خاصیت $IPLR$ باشد آنگاه $\hat{X}_w \leq_{plr} \hat{Y}_w$ واگر $X \geq_{plr} Y$ و w دارای خاصیت $DPLR$ باشد آنگاه $\hat{X}_w \geq_{plr} \hat{Y}_w$.

• هرگاه وزن $w(x) = e^{lx}x^i(F(x))^j(\bar{F}(x))^k$ را در نظر بگیریم صعودی بودن $w(x)$ معادل با برقراری $kr(x) - j\tilde{r}(x) < l + \frac{i}{x}$ برای هر $x > ۰$ است که در آن $r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ و $\tilde{r}(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ می باشد. هرگاه $(l = ۰)$، $(i = ۰)$ و $(j = ۰)$ باشد صعودی بودن w به ترتیب معادل برقراری شرایط $(kr(x) - j\tilde{r}(x) < \frac{i}{x}, \forall x > ۰)$، $(kr(x) - j\tilde{r}(x) < l, \forall x > ۰)$ و $(r(x) < \frac{l}{k} + \frac{i}{kx}, \forall x > ۰)$ خواهد بود. هرگاه $k = ۰$ باشد $w(x)$ همواره صعودی است و اگر $(i = l = ۰)$ آنگاه صعودی بودن $w(x)$ هم ارز برقراری $\frac{F(x)}{\bar{F}(x)} < \frac{j}{k}, \forall x > ۰$ است و در حالتیکه $(i = j = l = ۰)$ آنگاه $w(x)$ هیچگاه صعودی نیست که در همه حالات فوق مشخصه سازیهایی بر اساس قضیه ۱۳ قابل بیان است تسری مورد فوق در قضیه ۱۴ نیز بطور مشابه قابل انجام است. لازم به ذکر است که وزن فوق وقتی $(i = j = k = ۰)$، $(l = ۰)$، $(i = j = ۰, k = n - j)$، $(i = l = j = ۰)$، $(i = l = k = ۰)$ و $(l = j = h = ۰)$ باشد به ترتیب معرف (تابع مولد گشتاور)، (گشتاور وزنی احتمال)، (آماره های مرتب)، (نرخ شکست متناسب)، (نرخ شکست وارون متناسب) و (گشتاور iام) خواهد بود.

• اگر $w(x) = [-ln\bar{F}(x)]^m[-lnF(x)]^n$ را در نظر بگیریم. صعودی بودن w معادل

$$\frac{n}{F(x)}ln\bar{F}(x) > \frac{m}{\bar{F}(x)}lnF(x), \forall x > ۰$$

است. هرگاه $m = ۰$ باشد صعودی بودن w معادل $\frac{n}{F(x)}ln\bar{F} > ۰, x > ۰$ که امکان پذیر نیست و در این حالت که همان رکورد پایین است w صعودی نیست و هرگاه $n = ۰$ باشد صعودی بودن w معادل $\frac{m}{\bar{F}(x)}lnF(x) < ۰, \forall x > ۰$ است که همواره برقرار است و در این حالت (رکورد بالا) همواره صعودی است. که حالات خاصی را برای قضایای ۱۳ و ۱۴ نیز بر اساس نکات فوق الذکر می توان بیان کرد برای وزن های ساده تر دیگر نیز قضایای بالا قابل بیان است.

۳ ترتیب نسبت درستنمایی بالا

ترتیب نسبت درستنمایی بالا که از آن با عنوان ترتیب نسبت درستنمایی شیفت داده شده نیز

یاد می‌شود تعمیمی از ترتیب نسبت درستنمایی است که شیکد و شانتیکومار(۱۹۹۴) و ابو کلام و کید(۲۰۰۷) در این زمینه مباحث بسیار جالبی را دارند که بعضی تعاریف و قضایایی که در این بخش مورد نیاز است مطرح می شود.

تعریف ۹: فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی های به ترتیب g, f باشند بطوریکه $\forall x \geq 0; \quad X - x \leq_{lr} Y$ در این صورت می گوییم X در ترتیب نرخ خطر بالا از Y کوچکتر است و آن را با نماد مقابل نمایش می دهیم: $X \leq_{lr\uparrow} Y$ در حقیقت $X \leq_{lr\uparrow} Y$ اگر و فقط اگر برای هر $x \geq 0$, $\frac{g(t+x)}{f(t)}$ در $t \in (l_x - x, u_x) \cup (l_y, u_y)$ صعودی باشد بطوریکه $l_X = inf\{x; x \in supp(X)\}$ و $u_X = sup\{x; x \in supp(X)\}$.

قضیه ۱۵ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی باشند آنگاه:

۱)برای همه $x \geq 0;$ $X \leq_{lr\uparrow} Y \Longleftrightarrow [X - x \mid X \geq x] \leq_{lr} Y$.

۲)اگر X یا Y یا هردو دارای چگالی لگ مقعر باشند آنگاه $X \leq_{lr\uparrow} Y \Longleftrightarrow X \leq_{lr} Y$.

تعریف ۱۰: فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی های به ترتیب g, f باشند بطوریکه $\forall x \geq 0; \quad X - x \leq_{hr} Y$ در این صورت می گوییم X در ترتیب نرخ خطر بالا از Y کوچکتر است و آن را با نماد $X \leq_{hr\uparrow} Y$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱۶ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی پیوسته نامنفی باشند آنگاه: $X \leq_{lr\uparrow} Y \Rightarrow X \leq_{hr\uparrow} Y$.

۴ ترتیب نسبت درستنمایی متناسب بالا

ترتیب نسبت درستنمایی متناسب بالا را که بر اساس ترتیب نسبت درستنمایی متناسب ارائه گردیده بیان می کنیم و سپس به بیان قضایایی بر اساس آن خواهیم پرداخت و به ارتباط این ترتیب با سایر ترتیب ها نیز اشاره خواهیم کرد.

تعریف ۱۱: فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی های به ترتیب g, f باشند بطوریکه $\forall x \geq 0; \quad X - x \leq_{plr} Y$ در این صورت می گوییم $X \leq_{plr\uparrow} Y$ و بدین مفهوم است که X در ترتیب نسبت درستنمایی متناسب بالا از Y کوچکتر است در حقیقت $X \leq_{plr\uparrow} Y$ اگر و فقط اگر برای هر $x \geq 0$ عبارت $\frac{g(\lambda(x+t))}{f(t)}$ $\quad 0 < \lambda < 1,$ برای $t \in (l_x - x, u_x) \cup (l_y, u_y)$ صعودی باشد.

قضیه ۱۷ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته باشند آنگاه $\forall a > 1; X \leq_{plr\uparrow} Y \Longleftrightarrow X \leq_{lr\uparrow} aY$.

اثبات: داریم:

$$\forall a > 1; \frac{g_{aY}(t+x)}{f_X(t)} = \frac{\frac{1}{a}g(\frac{t+x}{a})}{f_X(t)} = \frac{\lambda g(\lambda(t+x))}{f_X(t)} \quad , \quad \lambda = \frac{1}{a}$$

و نتیجه برقرار است.

قضیه ۱۸ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته باشند که دارای تابع چگالی لگ مقعر باشد آنگاه

$$X \leq_{lr\uparrow} Y \Rightarrow X \leq_{plr\uparrow} Y$$

اثبات: می دانیم اگر Y دارای تابع چگالی لگ مقعر باشد و $a > 1$ آنگاه $Y \leq_{lr\uparrow} Y$. از طرفی $\leq_{lr\uparrow}$ یک رابطه تعدی است لذا $X \leq_{lr\uparrow} Y \leq_{lr\uparrow} aY \Rightarrow X \leq_{lr\uparrow} aY$ که بنا به قضیه ۱۷ خواهیم داشت $X \leq_{plr\uparrow} Y$.

تعریف ۱۲: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f باشد گوییم X دارای نسبت درستنمایی صعودی متناسب از بالا[۱۴] $(UIPLR)$ است اگر $\frac{f_X(\lambda(t+x))}{f_X(t)}$ روی t صعودی باشد($1 > \lambda > 0$) وگوییم X دارای نسبت درستنمایی نزولی متناسب از بالا[۱۵] $(UDPLR)$ است اگر $\frac{f_X(\lambda(t+x))}{f_X(t)}$ روی t نزولی باشد($1 > \lambda > 0$).

بطور کلی دیاگرام زیر قسمتی از مفاهیم این ترتیبها را نمایش می دهد.

$$\begin{array}{ccccccc}
X \leq_{plr\uparrow} Y & \Rightarrow & X \leq_{lr\uparrow} Y & \Rightarrow & X \leq_{hr\uparrow} Y & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
X \leq_{plr} Y & \Rightarrow & X \leq_{lr} Y & \Rightarrow & X \leq_{hr} Y & \Rightarrow & X \leq_{st} Y
\end{array}$$

که مشخصه هایی بر اساس مفاهیمی از ترتیب های ذکر شده و ارتباط بین آنها از جمله نکات جالب مطروحه در این نوشتار است.

[۱۴] Up Increasing Proportional Likelihood Ratio
[۱۵] Up Decreasing Proportional Likelihood Ratio

۵ ترتیب نسبت درستنمایی متناسب در تبدیلات لاپلاس

در این قسمت ابتدا ترتیب نسبت درستنمایی در تبدیلات لاپلاس را یادآور می شویم سپس بر اساس آن و نتایجی که در قسمت های قبلی بدست آمد ترتیب نسبت درستنمایی متناسب در تبدیلات لاپلاس را تعریف می کنیم. بیان مشخصه سازی هایی بر اساس آن را به آینده تحقیق موکول می کنیم.

فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع F باشد آنگاه تبدیل لاپلاس $\bar{F}$ بصورت زیراست:

$$L_X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-su}\bar{F}_X(u)du, \quad s > 0$$

تعریف ۱۳: اگر X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی باشند، X را درترتیب تبدیل لاپلاس کوچکتر از Y می گوییم $(X \leq_{Lt} Y)$ اگر برای هر $s > 0$ داشته باشیم: $L_X(s) \leq L_Y(s)$.

تفسیر، خواص و کاربردهای این ترتیب در نظریه قابلیت اعتماد و علوم بیمه توسط زید، کیم و پورسچن[۱۶] (۱۹۹۱) و دنوت[۱۷] (۲۰۰۱) و کلفسجو[۱۸] (۱۹۸۳) بررسی شده است. در این مبحث نیز به بیان قضیه ای می پردازیم که نتایج حاصل از آن مورد توجه خواهد بود.

قضیه ۱۹ فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته با توابع توزیع به ترتیب F و G باشند آنگاه برای همه ی $t \geq 0$ و $s > 0$ گوییم $X_{(t)} \geq_{Lt} Y_{(t)}$ اگر و فقط اگر $\frac{\int_0^t e^{su}F(u)du}{\int_0^t e^{su}G(u)du}$ در $t \geq 0$ نزولی باشد. $(X_{(t)} = [t - X \mid X \leq t])$

اثبات: می دانیم برای $t \geq 0$،

$$L_{X_{(t)}}(s) = \int_0^t \frac{e^{su}F(u)}{e^{st}F(t)}du$$

$$= \frac{\int_0^t e^{su}F(u)du}{(\frac{\partial}{\partial t})(\int_0^t e^{su}F(u)du)}$$

[۱۶] Alzaid, Kim and Proschan

[۱۷] Denuit

[۱۸] Klefsjo

بنابراین برای $s > 0$

$$\forall t \geq 0 \quad X_{(t)} \geq_{Lt} Y_{(t)} \Longleftrightarrow L_{X_{(t)}} \geq L_{Y_{(t)}}$$

$$\forall t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \forall t \frac{\int_0^t e^{su} F(u)du}{(\frac{\partial}{\partial t})(\int_0^t e^{su} F(u)du)} \geq \frac{\int_0^t e^{su} G(u)du}{(\frac{\partial}{\partial t})(\int_0^t e^{su} G(u)du)}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\int_0^t e^{su} F(u)du}{\int_0^t e^{su} G(u)du}$$

در $t \geq 0$ نزولی باشد و اثبات کامل می شود.

بر اساس تعریف قبل و این قضیه که بر اساس آن در آینده تحقیق ویژگیهایی بررسی خواهد شد تعریف جدیدی تحت عنوان ترتیب متناسب تبدیل لاپلاس متناسب را پیشنهاد می نماییم:

تعریف ۱۴: اگر X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی باشند X را در ترتیب تبدیل لاپلاس متناسب کوچکتر از Y می گوییم(آن را به $X \leq_{pLt} Y$ نمایش می دهیم.) اگر برای همه $s > 0$ $\frac{\int_0^{\lambda t} e^{su} F(u)du}{\int_0^t e^{su} G(u)du}$ در $t \geq 0$ صعودی باشد که در حالت خاص $\lambda = 1$ همان $X_{(t)} \leq_{Lt} Y_{(t)}$ خواهد بود.

۶ نتیجه گیری

آن تحت عنوان ترتیب نسبت درستنمایی متناسب بالا پرداختیم و قضایا و مشخصه سازی هایی بر اساس آن ذکر گردیدند و همچنین رفتار آن در توزیع های وزنی، هر چند کوتاه بررسی شد که مفاهیم بیشتری از آن در آینده تحقیق مد نظر قرار خواهد گرفت.

کتاب‌نامه

[1] Aboukalam, F. and Kayid, M. (2007). *Some new results about shifted hazard and shifted likelihood ratio order.* International Mathematical Forum, 2, no. 31, 1525-1536.

[2] Ahmad, I. A. and Kayid, M. (2005). *Characterizations of the RHR and MIT orderings and the DRHR and IMIT classes of life distribution.* probability in the Engineering and Information Sciences, 19, 447-461.

[3] Ahmad, I. A, Kayid, M., and Pellerey, F. (2005). *Further results involving the MIT order and the IMIT class.* Probability in the Engineering and Informational Sciences 19: 377-395.

[4] Alzaid, A. (1988). *Mean residual life ordering.* Statistical Papers 25: 477-482.

[5] Alzaid, A. Kim, J. S., and Proschan, F. (1991). *Laplace ordeing and its applications.* Journal of Applied Probability 28: 116-130.

[6] Arnold, B. C. (1987). *Majorization and the Lorenz order: A brief introduction.* Lecture Notes in Statistics, 43, Springer-Verlag.

[7] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing.* Holt, Rinchart and Winston, New York.

[8] Belzunce, F. Candel, J. and Ruiz, J. M. (1995). *Ordering of truncated distributions through concentration curves.* Sankhy, 57, Series A, 375-383.

[9] Denuit, M. (2001). *Laplace transform ordering of actuarial quantities.* Insurance: Mathematics and Economics 29: 83-102.

[10] Klefsjo, B. (1983). *A useful ageing property based on the Laplace transform.* Journal of Applied probability 20: 615-626.

[11] Ramos Romero, H. M. and Sordo Diaz, M. A. (2001). *The proportional likelihood ratio order and applicaions.* Questiio, vol. 25, 2, p. 211-223.

[12] Shaked, M. Shanthikumar, G. j., (1994). *Stochastic orders and their applications.*