IAS-2008-ST0585

هفتمین همایش سالانه (بین‌المللی) انجمن هوا فضای ایران
تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۳۰ بهمن - ۲ اسفند ۱۳۸۶

تحلیل عددی صفحه ساخته شده از مواد هدفمند به کمک القاء بار حرارتی مجازی

علیرضا ستوده [۱]، امیرتیمور کلالی [۲]، امیر محمدحسینی [۳]
دانشگاه فردوسی- دانشکده مهندسی- گروه مکانیک

چکیده

درمقاله حاضر، صفحه هدفمند مورد تحلیل قرار گرفته است. ابتدا حل دقیق به کمک برنامه ای در نرم افزار Matlab بدست آمده است. سپس روشی برای تحلیل عددی سازه های هدفمند (FGM) یا به طور کلی هر سازه ناهمگن، در نرم افزارهای المان محدود ارائه شده است که نتایج بسیار نزدیکی به حل دقیق ارائه می کند. تحلیل سازه ای مواد هدفمند با فرض خواص الاستیک متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. در ساده ترین حالت خواص الاستیک تنها تابعی از مکان است که در این حالت با تعریف یک میدان دمای مجازی و ارتباط دادن خواص الاستیک به میدان دما، صفحه هدفمند تحلیل شده است. در حالت حل ترموالاستیک صفحات هدفمند، یک فرایند تکراری برای حل گرمایی و سازه ای مواد هدفمند ارائه شده است. در حل گرمایی نیز فرض های خواص گرمایی تابعی از مکان و خواص گرمایی تابعی از مکان و دما از هم تفکیک شده اند. به منظور مقایسه دقت این روش با حل تحلیلی مثالی ذکر شده است. در تحلیل های ترموالاستیک مواد هدفمند چهار حالت از هم تفکیک شده اند. تحلیل ترموالاستیک در حالتی که خواص الاستیک تابعی از مکان است، حالتی که خواص الاستیک و گرمایی تابعی از مکان است، حالتی که خواص گرمایی تابعی از مکان و خواص الاستیک تابعی از مکان و دما است و حالتی که خواص گرمایی تابعی از مکان و دما و خواص الاستیک تابعی از مکان و دما است که حالت اخیر کلی ترین حالت برای تحلیل ترموالاستیک یک ماده هدفمند محسوب می شود. در هر حالت برای تعیین دقت این روش ها، مقایسه با حل های دقیق و تحلیلی صورت گرفته است. تحلیل های گرمایی مورد بررسی در کار حاضر مربوط به حالت پایدار است.

واژه های کلیدی: *سازه هدفمند – صفحه تحت بار – تابع خواص-بارحرارتی مجازی*

مقدمه

تفاوت مواد هدفمند با سایر مواد در این است که خواصشان تابعی از مکان می باشد. بنابراین تفاوت در تحلیل آن ها مربوط به این نکته است که مدول الاستیسیته و نسبت پواسون تابعی از مکان می باشند که همین مساله حل معادلات حاکم را مشکل می کند. به همین دلیل استفاده از روش های حل عددی برای مواد هدفمند رایج است. رایج ترین روش تحلیل مواد هدفمند، روش المان محدود است. ANSYS یکی از نرم افزارهای قوی در رابطه با تحلیل المان محدود است. برای تحلیل مواد هدفمند در محیط ANSYS نمی توان خواص را به صورت تابعی از مکان تعریف نمود. برای غلبه بر این مشکل دو راه حل موجود است. اولین راه حل تقسیم هندسه جسم به تعداد زیادی ناحیه های کوچک است. هر کدام از این ناحیه ها ماده همگنی در نظر گرفته می شود که خواص آن متوسطی از خواص مطلوب در ناحیه ذکر شده است. ضعف این روش این است که تقسیم هندسه به تعدا زیادی ناحیه کوچک کاری مشکل است. همچنین از آن جایی که هر ناحیه همگن در نظر گرفته می شود، در مرز بین ناحیه ها به خاطر تغییرات ناپیوسته خواص تمرکز تنش وجود خواهد داشت. لذا روش مذکور نمی تواند روش مناسبی برای تحلیل مواد هدفمند باشد. دومین راه حل این است که خواص ماده را به عنوان تابعی از دما در نظر گرفته و بعد با القای دمای مورد نظر به جسم (که خود تابعی از مکان است) خواص مطلوب حاصل می شود. با انتخاب مناسب نگاشت ارتباط دهنده دما به خواص می توان تحلیل های ترموالاستیک نیز انجام داد. در کار حاضر تحلیل مواد هدفمند با استفاده از روش دوم و در حالت های مختلف تفکیک شده بررسی شده است و برای تعیین دقت این روش ها، مقایسه با حل های دقیق و تحلیلی صورت گرفته است.

حل الاستیسیته سه بعدی برای خمش صفحات هدفمند مستطیلی

[۱] استادیار
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد، amirparsaatk@yahoo.com
[۳] دانشجوی کارشناسی ارشد

این حل را Kashtalyan [1] در سال ۲۰۰۳ ارائه نمود. حل الاستیسیته سه بعدی برای صفحه هدفمند با شرایط مرزی تکیه گاه ساده و بارگذاری سینوسی بدست آمده است. یک صفحه مستطیلی مطابق شکل(۱) در نظرگرفته شده است. صفحه در معرض بار عرضی Q در سطح بالایی آن است، در حالی که سطح پایینی فاقد بار است.

$$z=h:\quad \sigma_{zz}=Q(x,y)\qquad \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \qquad (۱)$$

$$z=0:\quad \sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \qquad (۲)$$

$$Q(x,y)=-q\sin(\frac{\pi mx}{a})\sin(\frac{\pi ny}{b}) \qquad (۳)$$

شرایط مرزی تکیه گاه ساده معادل است با :

$$x=0,a:\quad \sigma_{xx}=0\quad u_y=u_z=0 \qquad (۴)$$

$$y=0,b:\quad \sigma_{yy}=0\quad u_x=u_z=0 \qquad (۵)$$

که u_i اجزای بردار جابجایی است. مدول برشی و نسبت پواسون فقط تابعی از ضخامت صفحه هستند.

معادله تعادل بر حسب مولفه های جابجایی به فرم زیر است :

$$G\Delta u_x+\frac{G}{1-2v}\frac{\partial e}{\partial x}+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\frac{dG}{dz}=0$$

$$G\Delta u_y+\frac{G}{1-2v}\frac{\partial e}{\partial y}+\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\frac{dG}{dz}=0 \qquad (۶)$$

$$G\Delta u_z+\frac{G}{1-2v}\frac{\partial e}{\partial x}+e\frac{d}{dz}\left(\frac{2Gv}{1-2v}\right)+2\frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{dG}{dz}=0$$

که $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ عملگر لاپلاسین و

$e=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$ کرنش حجمی است.

Plevako در سال ۱۹۷۱ حل کلی این معادله تعادل سه بعدی را بدست آورد و نشان داد که همواره مولفه های جابجایی را می توان بر حسب دو تابع بیان کرد که به ترتیب معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم و چهارم را ارضا می کنند.

اگر نسبت پواسون ثابت فرض شود، مولفه های بردار جابجایی را می توان بر حسب دو تابع L و N بیان کرد :

$$u_x=-\frac{1}{2G}\left(v\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$u_y=-\frac{1}{2G}\left(v\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (۷)$$

$$u_x=-\frac{1}{2G}\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2G}\left(v\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L\right]$$

از رابطه فوق و معادلات مشخصه برای یک ماده همسانگرد، می توان اجزای تانسور تنش را محاسبه نمود :

$$\sigma_{xx}=\left(v\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta+\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}\right)L+2G\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}$$

$$\sigma_{yy}=\left(v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta+\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}\right)L-2G\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}$$

$$\sigma_{zz}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 L \qquad (۸)$$

$$\sigma_{xz}=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}+G\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}$$

$$\sigma_{yz}=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}-G\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}$$

$$\sigma_{zz}=-\left(v\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}-G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)N$$

که توابع L و N در این معادلات، بایستی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را ارضا کند :

$$\Delta\left(\frac{1}{G}\Delta L\right)-\frac{1}{1-v}\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right)=0 \qquad (۹)$$

$$\Delta N+g(z)\frac{\partial N}{\partial z}=0 \qquad (۱۰)$$

$$g(z)=\frac{d}{dz}\ln G(z) \qquad (۱۱)$$

اگر مدول برشی با یک تابع نمایی تغییر کند،

$$G(z)=G_1e^{\gamma\left(z/h-1\right)}$$

$$g(z)=\gamma/h \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری G(z) در معادلات دیفرانسیل عادی و حل این معادلات به جواب های زیر می رسیم :

$$u_x=\sum_{k=1}^{6}A_kU_{x,k}(z)\cos\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}$$

$$u_y=\sum_{k=1}^{6}A_kU_{y,k}(z)\sin\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b} \qquad (۱۳)$$

$$u_z=\sum_{k=1}^{6}A_kU_{z,k}(z)\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}$$

به این ترتیب تنش ها نیز از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\sigma_{zz}=\sum_{i=1}^{6}A_iP_{zz,i}(z)\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}$$

$$\sigma_{xx}=\sum_{i=1}^{6}A_iP_{xx,i}(z)\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}$$

$$\sigma_{yy}=\sum_{i=1}^{6}A_iP_{yy,i}(z)\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}$$

$$\sigma_{xz}=\sum_{i=1}^{6}A_iP_{xz,i}(z)\cos\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b} \qquad (۱۴)$$

$$\sigma_{yz}=\sum_{i=1}^{6}A_iP_{yz,i}(z)\sin\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}$$

$$\sigma_{xy}=\sum_{i=1}^{6}A_iP_{xy,i}(z)\cos\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}$$

توابع $U_{i,k}$ و $P_{ij,k}$ مطابق روابط زیر می باشند :

$$U_{x,k}(z) = -\frac{qh}{2G_1}\frac{\pi mh}{a}e^{-\gamma(z/h-1)}$$
$$\left[-v\alpha^2h^2 f_k(z) + (v-1)\frac{d^2}{dz^2}f_k(z)\right]$$
$$U_{y,k}(z) = -\frac{qh}{2G_1}\frac{\pi nh}{b}e^{-\gamma(z/h-1)}$$
$$\left[-v\alpha^2h^2 f_k(z) + (v-1)\frac{d^2}{dz^2}f_k(z)\right] \qquad (۱۵)$$
$$U_{z,k}(z) = -\frac{qh}{2G_1}\frac{\pi mh}{a}e^{-\gamma(z/h-1)}$$
$$\left[(v-1)\left(-\gamma\frac{d^2}{dz^2}f_k(z) + \frac{d^3}{dz^3}f_k(z)\right)\right.$$
$$\left.-\alpha^2h^2\left((v-2)\frac{d}{dz}f_k(z) - v\gamma f_k(z)\right)\right]$$
$$P_{zz,k}(z) = q\alpha^4h^4 f_k(z)$$
$$P_{xz,k}(z) = q\alpha^2h^2\left(\frac{\pi mh}{a}\right)^2\frac{d}{dz}f_k(z)$$
$$P_{yz,k}(z) = q\alpha^2h^2\left(\frac{\pi nh}{b}\right)^2\frac{d}{dz}f_k(z) \qquad (۱۶)$$
$$p_{xx,k}(z) = q\left[v\alpha^2h^2\left(\frac{\pi nh}{b}\right)^2 f_k(z)\right.$$
$$\left.-v\left(\frac{\pi nh}{b}\right)^2\frac{d^2}{dz^2}f_k(z) - \left(\frac{\pi mh}{a}\right)^2\frac{d^2}{dz^2}f_k(z)\right]$$
$$p_{yy,k}(z) = q\left[v\alpha^2h^2\left(\frac{\pi mh}{a}\right)^2 f_k(z)\right.$$
$$\left.-v\left(\frac{\pi mh}{a}\right)^2\frac{d^2}{dz^2}f_k(z) - \left(\frac{\pi nh}{b}\right)^2\frac{d^2}{dz^2}f_k(z)\right]$$
$$p_{xy,k}(z) = q\left(\frac{\pi nh}{b}\right)\left(\frac{\pi mh}{a}\right)$$
$$\left[v\alpha^2h^2 f_k(z) + (1-v)\frac{d^2}{dz^2}f_k(z)\right], \quad k = 1,\ldots,4$$
$$U_{x,k}(z) = -\frac{qh}{2G_1}\frac{\pi nh}{b}f_k(z)$$
$$U_{y,k}(z) = \frac{qh}{2G_1}\frac{\pi mh}{a}f_k(z) \qquad (۱۷)$$
$$U_{z,k}(z) = 0$$
$$p_{z,k}(z) = 0$$

$$p_{xz,k}(z) = -q\left(\frac{\pi nh}{b}\right)e^{\gamma(z/h-1)}\frac{d}{dz}f_k(z)$$
$$p_{yz,k}(z) = q\left(\frac{\pi mh}{a}\right)e^{\gamma(z/h-1)}\frac{d}{dz}f_k(z) \qquad (۱۸)$$
$$p_{xx,k}(z) = 2q\left(\frac{\pi mh}{a}\right)\left(\frac{\pi bh}{b}\right)e^{\gamma(z/h-1)}\frac{d}{dz}f_k(z)$$
$$p_{yy,k}(z) = -2q\left(\frac{\pi mh}{a}\right)\left(\frac{\pi bh}{b}\right)e^{\gamma(z/h-1)}\frac{d}{dz}f_k(z)$$
$$p_{xy,k}(z) = q\left[\left(\frac{\pi mh}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi bh}{b}\right)^2\right]$$
$$e^{\gamma(z/h-1)}\frac{d}{dz}f_k(z), \quad k = 5,6$$

که $f_k(z)$ مطابق روابط زیر می باشد:

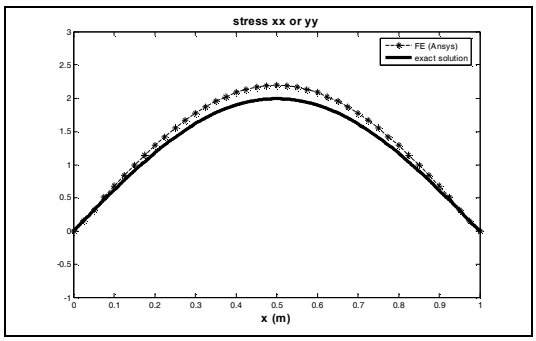
$$f_1(z) = \cosh\frac{\lambda z}{h}\cos\frac{\mu z}{h}$$
$$f_2(z) = \sinh\frac{\lambda z}{h}\cos\frac{\mu z}{h}$$
$$f_3(z) = \cosh\frac{\lambda z}{h}\sin\frac{\mu z}{h}$$
$$f_4(z) = \sinh\frac{\lambda z}{h}\sin\frac{\mu z}{h} \qquad (۱۹)$$
$$f_5(z) = \cosh\frac{\beta z}{h}$$
$$f_6(z) = \sinh\frac{\beta z}{h}$$

روابط و معادلات فوق به صورت برنامه ای در نرم افزارMatlab در آمده است که هر صفحه ساخته شده از مواد هدفمند رابا هر تابع خصوصیت دلخواه مورد تحلیل قرار می دهد.

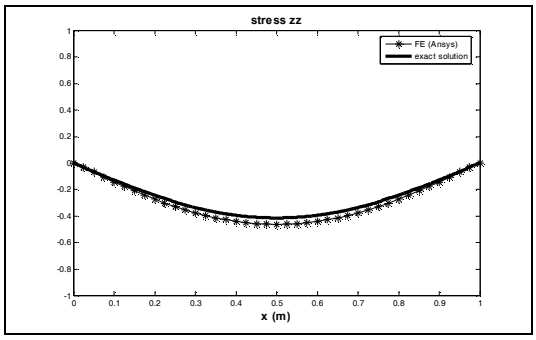
تحلیل صفحه FGM به کمک نرم افزار Ansys

همانطور که در مقدمه ذکر شد تحلیل سازه های FGM در نرم افزار های المان محدود با مشکلاتی همراه است. معمولا نرم افزار های المان محدود امکاناتی برای تحلیل مواد ناهمگن ارائه نمی دهند به همین خاطر نمی توان به صورت مستقیم مدلسازی ماده ناهمگن را انجام داد.ولی می توان از دیگر قابلیتهای نرم افزار المان محدود برای مدلسازی سازه غیر همگن کمک گرفت.در این نرم افزارها معمولا خواص ماده مانند مدول الاسیسیته،ضریب پواسون و ... را می توان بر حسب دما لحاظ کرد.

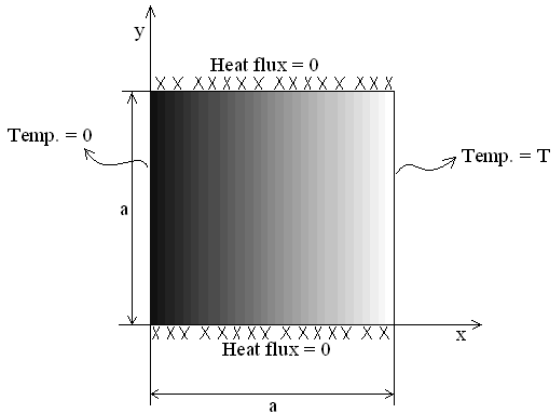
برای مدلسازی ابتدا تابع مدول الاسیسیته یا ضریب پواسون را به عنوان تابع دما در حجم ماده لحاظ کرده سپس تناظری یک به یک بین دما و این خصوصیات برقرار می کنیم بدین ترتیب در نقاط مختلف سازه خواص مختلفی خواهیم داشت. بدیهی است برای تحلیل ماده ناهمگن به این روش ، باید از المانهای خانواده cuple استفاده شود که برای به وجود نیامدن تنش های حرارتی باید خواص ترمودینامیکی وانتقال حرارتی آن صفر در نظر گرفته شود.



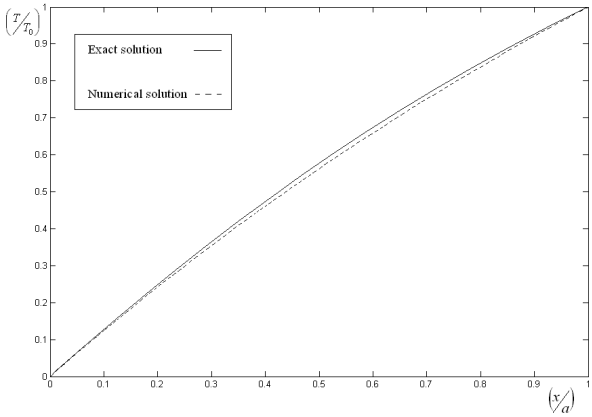
شکل۲-توزیع تنش در راستای x یا y در روی محور$y=0.5$, $z=0.05$



شکل۳-توزیع تنش در راستای Z در روی محور$y=0.5,z=0.05$



شکل ۴- صفحه هدفمند با تغییرات خواص در راستای x



شکل ۵- مقایسه حل دقیق و حل عددی