بررسی ساختار تعادلی یک قرص سرد وشکسان اطراف یک جرم فشرده در هندسه شوارزشیلد

محبوبه شقاقیان [۱]، جمشید قنبری [۲]

[۱] *گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی*

[۲] **دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات فارس**

چکیده

در این تحقیق ما به مطالعه ی قرصهای برافزایشی سرد و کشسان در هندسه شوازرشیلد می پردازیم. تقریب قرص نازک را به کار می بریم و برای سیال تنها سرعتهای سمتی و شعاعی در نظر می گیریم. نقش وشکسانی و اندازه حرکت زاویه ای را بر دینامیک قرص بررسی می نماییم.

۱- مقدمه

شرایط دلخواه برای مشاهده ی یک سیاهچاله هنگامی اتفاق می افتد که در نزدیکی آن یک منبع گاز یا پلاسما مانند ستاره ی همدم، وجود داشته باشد. آنگاه سیاهچاله در نتیجه ی جاذبه ی شدید گرانشی می تواند گاز و پلاسمای همدم خود را ببلعد. ضمن اینکه این مواد بطرف افق سیاهچاله فرو می ریزند، بدلیل وشکسانی گرم می شوند و تابش می نمایند. به منظور مطالعه ی قرصهای برافزایشی اطراف اجرام فشرده، به جاست که اثرات نسبیتی در نظر گرفته شود. در مطالعه قرصهای نسبیتی ، دو نوع فرض در مورد خود گرانش قرص وجود دارد. یک فرض اینکه، خود گرانش منبع انحنای فضا- زمان است [۵ و۲]. ایده ی دیگر اینکه خود گرانش قرص در مقایسه با گرانش جسم فشرده ی مرکزی قابل صرفنظر می باشد و فرض می شود که خمیدگی فضا- زمان در نتیجه ی گرانش جسم مرکزی پدید می آید و خود گرانش قرص هیچ تاثیری روی این خمیدگی ندارد. معادلات کلی این ایده، یعنی معادلات پایه ی حاکم بر دینامیک یک سیال مغناطیده در فضا- زمان خمیده اطراف یک جسم فشرده، توسط پراسانا ، تیرتیپی و داس در سال ۱۹۸۹ بدست آمده است. با در نظر گرفتن وشکسانی، در آن معادلات p به $\bar{p} = p-(\eta_b-\frac{2}{3}\eta_s\theta)$ تبدیل می شود [۸ و ۱]. در این تحقیق، ما قرص وشکسان غیر مغناطیده ی ایستا با تقارن محوری را نازک فرض می نماییم ($\theta=\frac{\pi}{2}$) و سیال را فاقد سرعت قطبی در نظر می گیریم ($V^{\theta}=0$). تاثیر ضریب وشکسانی توده ای و همچنین اندازه حرکت زاویه ای قرص را بر دینامیک قرص با استفاده از معادله ی حالت $(\overline{P}=K)$ بررسی می نماییم.

۲- فرمولبندی

مغادلات پایه سیستم مورد نظر با اعمال فرضیات مورد نظر به شکل زیر می باشد

معادله پیوستگی

$$\left(\rho+\frac{\bar{p}}{c^2}\right)\left[\frac{\partial V^r}{\partial r}-\frac{2m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}V^r+\frac{2}{r}V^r\right]+V^r\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho-\frac{\bar{p}}{c^2}\right)=0,$$

مولفه شعاغی

$$\left(\rho+\frac{\bar{p}}{c^2}\right)(u^0)^2\left[V^r\frac{\partial V^r}{\partial r}+\frac{mc^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)-\frac{3m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}(V^r)^2-(r-2m)(V^\varphi)^2\right]$$
$$+\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}=0,$$

و مولفه سمتی معادله حرکت

$$\left(\rho+\frac{\bar{p}}{c^2}\right)(u^0)^2\left[V^r\frac{\partial V^\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{3m}{r}\right)V^rV^\varphi\right]=0.$$

جواب معادله ی اخیر

$$V^\varphi=\frac{L}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right),\quad l=\frac{L}{cm},$$

می باشد که در آن c سرعت نور، $m=\frac{GM}{c^2}$ نصف شعاع شوارزشیلد و l پارامتر اندازه حرکت زاویه ای است. با در نظر گرفتن معادله‌ی حالت $\bar{p}=p-\eta_b\Theta=K$، که در آن K ثابت است، مولفه شعاغی معادله حرکت به شکل زیر ساده تر می شود

$$\frac{\partial}{\partial r}(V^r)^2-\frac{6m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}(V^r)^2=-\frac{2mc^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{2L^2}{r^3}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^3$$

که برای این مغادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه ی اول، دو جواب وجود دارد

$$V^r=\sqrt{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^3\left(\frac{2mc^2}{r-2m}-\frac{L^2}{r^2}+c^2\right)},\quad \text{و} \quad V^r=\sqrt{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^3\left(\frac{2mc^2}{r-2m}-\frac{L^2}{r^2}\right)},$$

اما تنها پاسخ اول، جواب فیزیکی مناسب برای سیستم می باشد زیرا می دانیم که وقتی قرص تشکیل می شود سرعت شعاعی سیال بطرف داخل افزایش می یابد. با این تغییر متغیر، $\bar{\rho}=\rho+\frac{\bar{p}}{c^2}$ معادله پیوستگی تبدیل می شود به

$$\bar{\rho}\left[\frac{\partial V^r}{\partial r}-\frac{2m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}V^r+\frac{2}{r}V^r\right]+V^r\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}=0,$$

که جواب این معادله $\bar{\rho}=\frac{K_1}{\sqrt{r\left(2mc^2r^2-L^2r+2L^2m\right)}}$ می باشد و خواهیم داشت

$$\rho=\bar{\rho}-\frac{\bar{p}}{c^2}=\frac{K1}{\sqrt{r(2mc^2r^2-L^2r+2L^2m)}}-\frac{K}{c^2},$$

که در اینجا K و K_1 ثابتهایی هستند که بصورت زیر تعریف می شوند

$$K_1=\dot{M}=\left(\rho+\frac{\bar{p}}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}r^2V^r,\ \ K=p_R-\eta_b\Theta\big|_{r=R},$$

برای تکمیل تعاریف، لازم است که عبارات زیر را بیان کنیم

$$u^k=\frac{u^0}{c}V^k,$$

$$u^0=\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

$$u^0_{;r}=u^0\left[\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}\frac{V}{c^2}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{m}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\right],$$

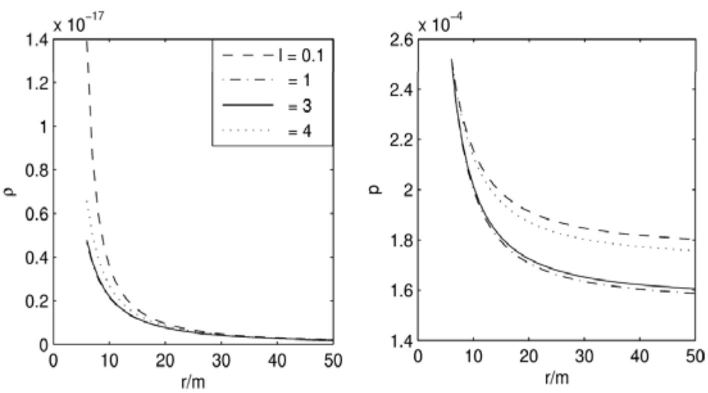
$$V^2 = (V^{(r)})^2 + (V^{(\varphi)})^2 = \frac{2mc^2}{r},$$
$$V^{(r)} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} V^r,$$
$$V^{(\varphi)} = r\sin(\theta)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} V^{\varphi}.$$

که $V^{(r)}$و $V^{(\varphi)}$ مولفه های سرغت در دستگاه موضعا لخت لورنتس مس باشد. بنابراین خواهیم داشت

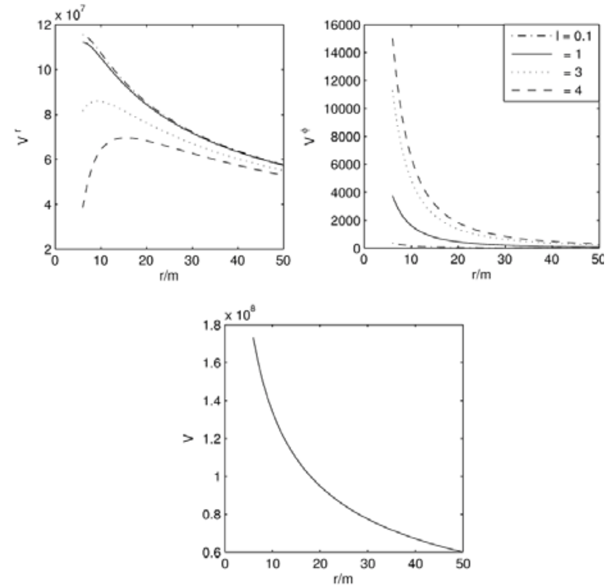
$$p = K + \eta_b \frac{u^0}{c}\left\{V^r\left[\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}\frac{V}{c^2}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{m}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\right] + V^r_{,r} + \frac{2}{r}V^r\right\},$$
$$K = p_R - \eta_b \frac{u^0}{c}\{\ldots\}_{r=R}.$$

۳- بحث و نتیجه گیری

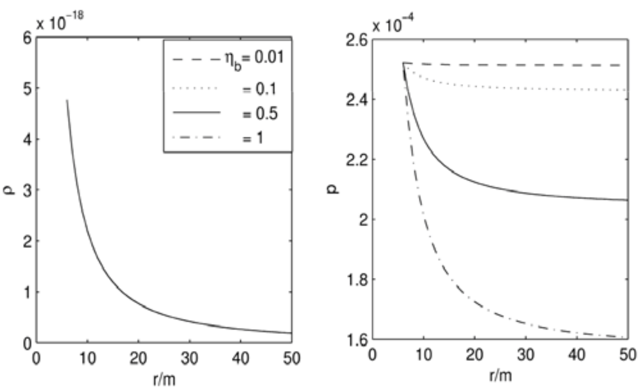
در ناحیه ی بیرونی، سیال فاقد دوران است و همچنین جریان شعاعی فروریزش به ازای همه ی مقادیر l، تقریباً ثابت است. بتدریج با کاهش r، سرعتها افزایش می یابند. ناحیه ی بیرونی نسبت به l حساسیت زیادی ندارد اما در ناحیه ی درونی، با افزایش l، سرعت سمتی سیال افزایش و سرعت شعاعی آن کاهش می یابد یعنی چرخش سیال سریعتر ولی فروریزش شعاعی آن کندتر می شود در نتیجه سرعت کل V، ثابت می ماند. چگالی و فشار نیز به طرف داخل، افزایش می یابد یعنی چگالی و فشار هر دو توابع نزولی ای از r هستند اما چگالی به سرعت کاهش می یابد و در ناحیه ی بیرونی به مقدار صفر می رسد در صورتی که فشار بعد از یک افت اولیه، به یک مقدار ثابتی می رسد که مقدارش با افزایش ضریب وشکسانی، کاهش می یابد. همانطور که از نمودارها ملاحظه می شود، وشکسانی بر توزیع سرعتها و چگالی هیچ تاثیری ند ارد ولی افزایش آن، سبب افت فشار می گردد. با افزایش l، چگالی در ناحیه ی درونی قرص حین افت شدید، افزایش می یابد و در سایر نواحی بیرونی مقدارش همچنان صفر می ماند. مقدار فشار نیز با افزایش l، افزایش می یابد. بنابراین نشان داده شده است که هرچه چرخش قرص سریعتر باشد، فشار و چگالی قرص بیشتر می باشد علیرغم فروریزش شعاعی سیال که کمتر می شود.



شکل (۱): نمودارهای چگالی و فشاز بر حسب فاصله یرای حالت $\eta_b = 1$ و l های مختلف



شکل(۲): نمودار های سرعت بر حسب فاصله یرای هقادیر مختلف l



شکل(۳۱): نمودارهای چگالی و فشاز بر حسب فاصله یرای حالت $l = 1$ و η_b های مختلف

مراجع

[1] Bhaskaran, P., & Prasanna, A. R. 1990, JApA, 11, 49
[2] Cai, M. J., & Shu, H. F. 2002, ApJ, 567, 477
[3] Frank, J., & King, A., & Raine, D. 1992, Accretion Power in Astrophysics, Cambridge University, chap1
[4] Lynden-Bell, D. 1969, Nature, 223, 690
[5] Lynden-Bell, D., & Pineault, S. 1978b, MNRAS, 185, 695
[6] Ohanian, H., & Ruffini, R. 1994, Gravitation and Spacetime, W. W. Norton & company NewYork, London, chap 8
[7] Prasanna, A. R. 1989, A&A, 217, 329
[8] Prasanna, A. R., & Bhaskaran, P. 1989, Ap&SS, 153, 201
[9] Prasanna, A. R., & Tripathy, S. C., & Das, A. C. 1989, JApA, 10, 21
[10]Shapiro, S. L., & Teukosky, S. A. 1983, Black Holes, White Dwarfs and Neutron stars, Wiley, NewYork, chap 14