# آماره‌های رکوردی کسری و کاربرد آنها در فواصل اطمینان برای چندک‌ها

**فاطمه ایزدی[۱] جعفر احمدی [۱]**

[۱] گروه آمار — دانشکده علوم ریاضی — دانشگاه فردوسی مشهد

**چکیده:** چندک یکی از شاخص‌های مهم توزیع‌های آماری می‌باشد. زمانی که همه داده‌ها در دسترس باشند، آماره‌های مرتب نقش اساسی را در استنباط چندک‌ها ایفا می‌کنند ولی موارد زیادی وجود دارد که همه داده‌ها ثبت نمی شوند و فقط کوچکترین و بزرگترین آنها نسبت به اهمیت‌شان ثبت می‌شوند. در چنین مواردی برای استنباط در مورد چندک‌ها نیاز به استفاده از نظریه رکوردها می‌باشد و چون در اغلب موارد شکل تابع توزیع جامعه نامعلوم است، روشهای ناپارامتری بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد. احمدی و ارقامی (۲۰۰۳) با استفاده از آماره‌های رکوردی فواصل اطمینان ناپارامتری را برای چندک‌ها به دست آورده و استفاده از رکوردهای بالا و پایین را به صورت توأم پیشنهاد کرده‌اند. در این مقاله ضمن بررسی مشکلات مطرح شده در مقاله‌ی مربوطه، آماره‌های رکوردی جدیدی تحت عنوان رکوردهای کسری را تعریف می‌کنیم. توزیع آماری آنها را به دست آورده و خواص آن را مطالعه می‌کنیم. آنگاه با استفاده از نتایج به دست آمده، نشان خواهیم داد که با استفاده از رکوردهای کسری می‌توان فواصل اطمینان ناپارامتری، با هر ضریب اطمینان دلخواه برای چندک‌های جامعه بدست آورد. در نهایت با طرح یک الگوریتم، نتایج عددی بدست می‌آوریم که می‌توانند در انتخاب رکوردهای کسری، مفید باشند.

**واژه های کلیدی:** آماره‌های مرتب، رکوردها، چندک، توزیع نمایی، توزیع گاما، ضریب پوشش.

## ۱ مقدمه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x)$ باشد. در این صورت چندک مرتبه‌ی $p$ام توزیع متغیر تصادفی X به صورت $F^{-1}(p) = \xi_p = \inf\{x; F(x) \geq p\}$ تعریف می‌شود. در بیش‌تر مسائل تابع توزیع جامعه نامعلوم است و برای استنباط در مورد چندک‌های جامعه باید از تکنیک‌هایی استفاده کنیم که به روشهای ناپارامتری یا آزاد توزیع معروفند. هرگاه همه مشاهدات در اختیار باشند، آماره‌های مرتب نقش اساسی در ارتباط با استنباط چندک‌ها ایفا می‌کنند. سرفلینگ (۱۹۸۰)، آرنولد و همکاران (۱۹۹۲) و دیوید و ناگاراجا (۲۰۰۳) از

جمله کتاب‌هایی هستند که به اهمیت آماره‌های ترتیبی در مسائل استنباط مربوط به چندک‌ها پرداخته‌اند.

اما موارد زیادی وجود دارد که همه‌ی داده‌ها ثبت نمی‌شود و فقط کوچکترین و بزرگترین آنها نسبت به اهمیت‌شان ثبت می‌شوند. حالتی را در نظر بگیرید که آزمایشی در دوره‌های مختلف انجام می‌شود، مثل مسابقات علمی که در آنها فقط بالاترین رتبه (ماکسیمم مشاهدات) حائز اهمیت است یا در مسابقات سرعتی که در آنها کمترین زمان (مینیمم مشاهدات ) حائز اهمیت می‌باشد. گاهی هم ممکن است هم مینیمم و هم ماکسیمم مشاهدات در دوره‌های متوالی ثبت شده باشد، مانند بالاترین و پایین‌ترین دمای هوا در طول یک هفته یا یک ماه. این نوع داده‌ها در متون آماری، به داده‌های رکوردی معروفند.

در سال‌های اخیر استنباط آزاد توزیع براساس رکوردها مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است و تحقیقات هر چند ناچیز در این خصوص انجام شده است. گولاتی و پاجت (۲۰۰۳) مجموعه کارهای انجام شده در این زمینه را جمع آوری نموده‌اند. احمدی و ارقامی (۲۰۰۳) بازه‌های اطمینان آزاد توزیع بر اساس آماره های رکوردی برای چندک‌های جامعه به دست آورده‌اند.

## ۲ توزیع آماری رکوردها

فرض کنید $\{X_i; i \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. یک مشاهده‌ی $X_j$ یک رکورد بالا است، اگر مقدار آن از مشاهدات قبلی بزرگتر باشد. در این مقاله $n$ امین رکورد بالا را با نماد $R_n^u$ نمایش می‌دهیم و $X_1$ را به عنوان اولین رکورد در نظر می‌گیریم ($R_1^u = X_1$). فرض کنید $f_n(t)$ تابع چگالی احتمال $R_n^u$ باشد. آنگاه

$$f_{R_n^u}(u) = \frac{[-\log(1 - F(u))]^{n-1}}{n - 1!} f(u), \tag{1}$$

و تابع چگالی احتمال توام $R_j^u$ و $R_{j+1}^u$ عبارتست از

$$f_{R_j^u, R_{j+1}^u}(u, w) = \frac{[-\log(1 - F(u))]^{j-1}}{(j - 1)!} r(u) f(w) \tag{2}$$

که در آن $r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$. بطور مشابه رکوردهای پایین تعریف می‌شوند، فرض کنید $R_n^l$، $n$امین رکورد پایین باشد و اگر تابع چگالی احتمال آن را با $g_{R_n^l}(l)$ نشان دهیم داریم

$$g_{R_n^l}(l) = \frac{[-\log(F(l))]^{n-1}}{(n-1)!} f(l).$$

برای جزییات بیشتر در خصوص خواص تئوری و کاربرد رکوردها به کتاب آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه شود.

## ۳ فواصل اطمینان ناپارامتری با استفاده از رکوردها

احمدی و ارقامی(۲۰۰۳) با استفاده از آماره‌های رکوردی فاصله اطمینان برای چندک‌ها به دست آورده‌اند. آنها نشان دادند که برای $i < j$ فاصله تصادفی $(R_i^u, R_j^u)$ یک فاصله اطمینان ناپارامتری برای $p$امین چندک جامعه با ضریب اطمینان زیر می‌باشد

$$\pi_1(i,j;p) = P(R_i^u < \xi_p < R_j^u) = (1-p)\sum_{k=i}^{j-1} \frac{(-\log(1-p))^k}{k!}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\pi_1(i,j;p) \le p$. بنابراین با توجه به نامساوی فوق، رکوردهای بالا نمی‌توانند برای چندک‌های پایین $(\xi_p, p < 0.5)$، مفید واقع شوند و به علاوه ساختن فاصله اطمینان آزاد توزیع برای $\xi_p$ با ضریب اطمینان $\alpha_0$ به طوری که $p \ge \alpha_0$ باشد، بر اساس فقط رکوردهای بالا امکان پذیر نیست. همچنین $\pi_1(i,j;p)$ یک تابع پله‌ای از $i$ و $j$ است. برای به دست آوردن فاصله اطمینان با ضریب اطمینان بزرگتر از $p$، احمدی و ارقامی (۲۰۰۳) استفاده از رکوردهای بالا و پایین را به صورت توأم پیشنهاد نمودند. آنها نشان داده‌اند که $(R_i^l, R_j^u)$ یک فاصله اطمینان آزاد توزیع برای $\xi_p$ با ضریب اطمینان زیر است

$$\pi_2(i,j;p) = P(R_i^l < \xi_p < R_j^u) = p\sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-\log(p))^k}{k!} + (1-p)\sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-\log(1-p))^k}{k!} - 1.$$

بدیهی است که $\pi_2(i,j;p)$ نیز یک تابع پله‌ای است.

## ۴ آماره رکوردی کسری

در این مقاله برای رفع مشکل پله‌ای بودن ضریب اطمینان، با ایده از کارهای استیگلر

(۱۹۷۷)، هاتسون (۱۹۹۹) و جونز (۲۰۰۲)، آماره‌های رکوردی کسری را معرفی نمودیم. آماره $R_a$ را $a$ امین رکورد کسری گوییم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R_a = (1 - C)R_{[a]} + CR_{[a]+1} \tag{3}$$

که در آن [.] همان تابع جزء صحیح است و $C$ متغیر تصادفی بتا با پارامترهای $c$ و $c - 1$ است که $c = a - [a]$ است. در حالتی که $a$ عدد صحیح باشد $R_a$ همان a امین رکورد معمولی است. در ادامه ابتدا توزیع آماری رکوردهای کسری را به دست آورده و خواص آن را مطالعه می‌کنیم. آن‌گاه با استفاده از نتایج به دست آمده می‌توانیم فواصل اطمینان ناپارامتری با هر ضریب اطمینان دلخواه برای چندک‌های جامعه به دست آوریم. در نهایت با طرح یک الگوریتم، نتایج عددی به دست آورده‌ایم که در انتخاب رکوردهای کسری مفید می‌باشد.

## ۵　توزیع آماری رکوردهای کسری

در این بخش سعی داریم تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای رکوردهای کسری را به دست آوریم. برای این منظور ابتدا حالت کلی تابع چگالی احتمال توام سه رکورد کسری متوالی $(R_j^u, R_a^u, R_{j+1}^u)$ را در نظر گرفته و با استفاده از آن تابع چگالی احتمال $R_a^u$ را به دست می‌آوریم. در ادامه با فرض این که رکوردها از جامعه نمایی استخراج شده باشد صورت صریحی برای تابع چگالی احتمال $R_a$ ارائه می‌دهیم.

**لم ۱.** فرض کنید $\{X_j; j \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و هم توزیع با تابع توزیع $F(x)$ باشند. برای $n > a > 1$ و $a \neq 1, 2, 3, ..., n-1$ توزیع توام $R_j^u, R_a^u, R_{j+1}^u$ با فرض اینکه $C$ دارای توزیع بتا با پارامترهای $c$ و $c - 1$ باشد که در آن $a = j + c$ به صورت زیر است

$$f_{R_j^u, R_a^u, R_{j+1}^u}(u, v, w) = \frac{[-\ln(1 - F(u))]^{j-1}}{(j-1)!(1 - F(u))} f(u) f(w) \frac{(v-u)^{c-1}(w-v)^{-c}}{\beta(c, c-1)}, \tag{4}$$

که در آن $\beta(.,.)$ تابع بتای کامل است.

**برهان:** با استفاده از فرمول چگالی شرطی داریم

$$f_{R_j^u, R_a^u, R_{j+1}^u}(u, v, w) = f_{R_j^u, R_{j+1}^u}(u, w) f_{R_a^u | R_j^u, R_{j+1}^u}(v \mid u, w). \tag{5}$$

از طرفی با توجه به (??) چگالی توام دو رکورد متوالی به صورت زیر است

$$f_{R_j^u, R_{j+1}^u}(u,w) = \frac{[-\log(1-F(u))]^{j-1}}{(j-1)!(1-F(u))} f(u)f(w). \qquad (6)$$

با استفاده از (??) داریم

$$\begin{aligned} P(R_a^u < y \mid R_j^u = u, R_{j+1}^u = w) &= P(u(1-C) + wC < y) \\ &= P(C < \frac{y-u}{w-u}) \end{aligned}$$

طبق فرض لم $C \sim \beta(c, c-1)$ ،(۱، لذا داریم

$$\begin{aligned} f_{R_a^u \mid R_j^u, R_{j+1}^u}(y \mid u,w) &= \frac{1}{w-u} f_C(\frac{y-u}{w-u}) \\ &= \frac{1}{w-u}(\frac{y-u}{w-u})^{c-1}(1-\frac{y-u}{w-u})^{-c}\frac{1}{\beta(c,c-1)} \\ &= \frac{1}{\beta(c,c-1)}(y-u)^{1-c}(w-y)^{-c}. \end{aligned}$$

حال اگر توابع چگالی $f_{R_j^u, R_{j+1}^u}(u,w)$ و $f_{R_a^u \mid R_j^u, R_{j+1}^u}(v \mid u,w)$ را در رابطه (??) جایگذاری کنیم نتیجه حاصل می شود. $\square$

**لم ۲.** هرگاه X دارای توزیع پیوسته $F(X)$ باشد آنگاه $Y = -\log(F(X))$ دارای توزیع نمایی استاندارد است.

**برهان:** بدیهی است.

**قضیه ۱.** فرض کنید $X_i$ها دارای توزیع پیوسته $F(X)$ باشد، در این صورت $R_a^u$ (a امین رکورد کسری) دارای توزیع گاما با پارامترهای $a$ و ۱ است.

**برهان:** ابتدا درستی رابطه

$$I(j) = \int_0^v u^{j-1}(v-u)^{c-1}du = \beta(j,c)v^{j+c-1} \qquad (7)$$

را نشان می‌دهیم. واضح است که رابطه فوق برای $j = 1$ برقرار است. فرض می‌کنیم برای $j = n$ برقرار باشد، اکنون ثابت می‌کنیم به ازای $j = n + 1$ نیز درست است. با به کار بردن

روش انتگرال‌گیری جزء به جزء روابط زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} I(j+1) &= \int_0^v u^j (v-u)^{c-1} du \\ &= \frac{j}{c}[v\int_0^v u^{j-1}(v-u)^{c-1}du - \int_0^v u^j (v-u)^{c-1}du]. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $I(j)$ داریم

$$I(j+1) = \frac{jv}{c} I(j) - \frac{j}{c} I(j+1).$$

با توجه به (??) و جایگذاری، داریم

$$I(j+1) = \beta(j+1, c) v^{j+c}.$$

در ادامه با توجه به لم ۲، بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود فرض می‌کنیم $X_i$ها دارای توزیع نمایی استاندارد باشند، بنابراین عبارت ?? به صورت زیر ساده می‌شود

$$f_{R_j^u, R_a^u, R_{j+1}^u}(u,v,w) = \frac{u^{j-1}}{(j-1)!\beta(c, c-1)} e^{-w} (v-u)^{c-1} (w-v)^{-c}. \qquad (8)$$

حال با انتگرال‌گیری روی متغیرهای $R_j^u, R_{j+1}^u$ می‌توانیم تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $R_a^u$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f_{R_a^u}(v) &= \int_0^v \int_v^\infty f_{R_j^u, R_a^u, R_{j+1}^u}(u,v,w) du dw \\ &= \frac{v^{c+1}}{c(c+1)\beta(c, 1-c)} \int_v^\infty (w-v)^{-c} e^{-w} dw \\ &= \frac{1}{\Gamma(c+j)} v^{c+j-1} e^{-v}. \qquad \square \end{aligned}$$

## ۶ فواصل اطمینان ناپارامتری بر اساس آماره‌های رکوردی کسری

در این بخش ابتدا فاصله اطمینان ناپارامتری برای چندک $p$ام بر اساس رکوردهای کسری بالا ارائه می‌دهیم و مشاهده می‌شود که ضریب اطمینان این فاصله اطمینان حداکثر برابر $p$ خواهد بود سپس برای رفع این مشکل فاصله اطمینان ناپارامتری براساس رکوردهای بالا و پایین به صورت توأم ارائه می‌شود.

**قضیه ۲.** تحت فرضیات قضیه ۱، $(R^l_{a_1}, R^u_{a_2})$ فاصله اطمینانی ناپارامتری برای چندک $p$ ام جامعه $(0 < p < 1)$ با ضریب اطمینان زیر می‌باشد $(1 < a_1 < a_2 < +\infty)$

$$\alpha_1(a_1, a_2; p) = \Gamma(a_1, 1, -\log(1-p)) - \Gamma(a_2, 1, -\log(1-p)), \qquad (9)$$

که در آن $\Gamma(\alpha, 1, t) = \int_0^t x^{\alpha-1} e^{-t} dt$ تابع گامای ناقص می‌باشد.

**برهان:**

$$\begin{aligned}
\alpha_1(a_1, a_2; p) &= P(R^u_{a_1} \leq F^{-1}(p) \leq R^u_{a_2}) \\
&= P(F(R^u_{a_1}) \leq p) - P(F(R^u_{a_2}) \leq p) \\
&= P(-\log(1 - F(R^u_{a_1})) \\
&\leq -\log(1-p)) - P(-\log(1 - F(R^u_{a_2}) \leq -\log(1-p)) \\
&= P({R^u_{a_1}}^E \leq -\log(1-p)) - P({R^u_{a2}}^E \leq -\log(1-p)),
\end{aligned}$$

که $R^{uE}_a$، $a$ امین رکورد کسری در توزیع نمایی است. پس ضریب اطمینان معرفی شده به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
\alpha_1(a_1, a_2; p) &= \int_0^{-\log(1-p)} \frac{x^{a_1} e^{-x}}{\Gamma(a_1)} dx - \int_0^{-\log(1-p)} \frac{x^{a_2} e^{-x}}{\Gamma(a_2)} dx \\
&= \Gamma(a_1, 1, -\log(1-p)) - \Gamma(a_2, 1, -\log(1-p).
\end{aligned}$$

□

**قضیه۳.** فرض کنید$\{X_j; j \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و هم توزیع با تابع توزیع $F(x)$ باشند. آنگاه$(R^l_{a_1}, R^u_{a_2})$ فاصله اطمینانی ناپارامتری برای چندک $p$ام، $1 > p > 0$ جامعه با ضریب اطمینان زیر می‌باشد $(1 < a_1 < a_2 < +\infty)$

$$\alpha(a_1, a_2; p) = 1 - \Gamma(a_1, 1, -\log(p)) - \Gamma(a_2, 1, -\log(1-p)) \qquad (10)$$

**برهان:**

$$\begin{aligned}
\alpha_2(a_1, a_2; p) &= P(R^l_{a_1} \leq F^{-1}(p) \leq R^u_{a_2}) \\
&= P(F(R^l_{a_1}) \leq p) - P(F(R^u_{a_2}) \leq p) \\
&= P(-\log F(R^l_{a_1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \quad -\log p) - P(-\log(1 - F(R^u_{a_2}) \leq -\log(1-p)) \\ &= \quad P(R^{u}_{a_1}{}^{E} \geq -\log p) - P(R^{u}_{a_2}{}^{E} \leq -\log(1-p)), \end{aligned}$$

که $R^{uE}_a$ ، $a$ امین رکورد کسری در توزیع نمایی است. پس ضریب اطمینان معرفی شده به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \alpha_2(a_1, a_2; p) &= \int_{-\log p}^{\infty} \frac{x^{a_1} e^{-x}}{\Gamma(a_1)} dx - \int_{0}^{-\log(1-p)} \frac{x^{a_2} e^{-x}}{\Gamma(a_2)} dx \\ &= 1 - \Gamma(a_1, 1, -\log p) - \Gamma(a_2, 1, -\log(1-p)). \end{aligned}$$

□

## ۷ فاصله اطمینان با دمهای مساوی

در این بخش با استفاده از نتایج به دست آمده، الگوریتمی برای ساختن فاصله اطمینان با ضریب اطمینان دقیق $1-\alpha$ ارائه می‌کنیم. ابتدا $a_1$ و $a_2$ را از روابط زیر بدست می‌آوریم.

$$\int_{-\log p}^{\infty} \frac{x^{a_1 - 1}}{\Gamma(a_1)} e^{-x} dx = 1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \int_{0}^{-\log(1-p)} \frac{x^{a_2 - 1}}{\Gamma(a_2)} e^{-x} dx = \frac{\alpha}{2}.$$

حال اگر قرار دهیم

$$c_i = a_i - [a_i], \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

آنگاه $R^l_{a_1}$ و $R^u_{a_2}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R^l_{a_1} = (1 - c_1) R^l_{[a_1]} + c_1 R^l_{[a_1]+1}, \qquad R^u_{a_2} = (1 - c_2) R^u_{[a_2]} + c_2 R^u_{[a_2]+1}. \tag{12}$$

در نتیجه

$$P(R^l_{a_1} \leq F^{-1}(p) \leq R^u_{a_2}) = 1 - \alpha.$$

در جدول زیر $a_1$ و $a_2$ برای بعضی مقادیر $p$ و $1-\alpha$ محاسبه شده است.

جدول ۱. مقادیر $a_1$ و $a_2$ برای بعضی مقادیر $p$ و $1-\alpha$.

| $p$ / $1-\alpha$ | ۰.۷ $(a_1, a_2)$ | ۰.۹ $(a_1, a_2)$ |
|---|---|---|
| ۰.۹۹ | (۳.۰۶۴, ۵.۲۸۵) | (۲.۰۱۱, ۷.۵۰۴) |
| ۰.۹۸ | (۲.۷۶۱, ۴.۸۴۳) | (۱.۷۹۰, ۶.۹۵۱) |
| ۰.۹۷ | (۲.۵۷۷, ۴.۵۷۴) | (۱.۶۵۸, ۶.۶۱۳) |
| ۰.۹۶ | (۲.۴۴۵, ۴.۳۷۲) | (۱.۵۶۳, ۳۶۵) |
| ۰.۹۵ | (۲.۳۴۰, ۴.۲۲۳) | (۱.۴۸۸, ۶.۱۶۸) |

**مثال ۱.** داده‌های زیر مربوط به مقدار بارش سالانهٔ باران ثبت شده برحسب اینچ، در طول ۱۰۰ سال (۱۹۸۹ – ۱۸۹۰) در مرکز شهر لس‌آنجلس می‌باشد. برای جزئیات کامل این داده‌ها به کتاب آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه شود.

جدول ۲. داده‌های مقدار بارش سالانهٔ بر حسب اینج از سال ۱۸۹۰ تا ۱۹۸۹ در مرکز شهر لس‌آنجلس.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۲.۶۹ | ۱۲.۸۴ | ۱۸.۷۲ | ۲۱.۹۶ | ۷.۵۱ | ۱۲.۵۵ | ۱۱.۸۰ | ۱۴.۲۸ | ۴.۸۳ | ۸.۶۹ |
| ۱۱.۳۰ | ۱۱.۹۶ | ۱۳.۱۲ | ۱۴.۱۷ | ۱۱.۸۸ | ۱۹.۱۹ | ۲۱.۴۶ | ۱۵.۳۰ | ۱۳.۷۴ | ۲۳.۹۲ |
| ۴.۸۹ | ۱۷.۸۵ | ۹.۷۸ | ۱۷.۱۷ | ۲۳.۲۱ | ۱۶.۶۷ | ۲۳.۲۹ | ۸.۴۵ | ۱۷۴۹ | ۸.۸۲ |
| ۱۱.۱۸ | ۱۹.۸۵ | ۱۵.۲۷ | ۶.۲۵ | ۸.۱۱ | ۸.۹۴ | ۱۸.۵۶ | ۱۸.۶۳ | ۸.۶۹ | ۸.۳۲ |
| ۱۳.۰۲ | ۱۸.۹۳ | ۱۰.۷۲ | ۱۸.۷۶ | ۱۴.۶۷ | ۱۴.۴۹ | ۱۸.۲۴ | ۱۷.۹۷ | ۲۷.۱۶ | ۱۲.۰۶ |
| ۲۰.۲۶ | ۳۱.۲۸ | ۷.۴۰ | ۲۲.۵۷ | ۱۷.۴۵ | ۱۲.۷۸ | ۱۶.۲۲ | ۴.۱۳ | ۷.۵۹ | ۱۰.۶۳ |
| ۷.۳۸ | ۱۴.۳۳ | ۲۴.۹۵ | ۴.۰۸ | ۱۳.۶۹ | ۱۱.۸۹ | ۱۳.۶۲ | ۱۳.۲۴ | ۱۷.۴۹ | ۶.۲۳ |
| ۹.۵۷ | ۵.۸۳ | ۱۵.۳۷ | ۱۲.۳۱ | ۷.۹۸ | ۲۶.۸۱ | ۱۲.۹۱ | ۲۳.۶۵ | ۷.۵۸ | ۲۶.۳۲ |
| ۱۶.۵۴ | ۹.۲۶ | ۶.۵۴ | ۱۷.۴۵ | ۱۶.۶۹ | ۱۰.۷۰ | ۱۱.۰۱ | ۱۴.۹۷ | ۳۰.۵۷ | ۱۷.۰۰ |
| ۲۶.۳۳ | ۱۰.۹۲ | ۱۴.۴۱ | ۳۴.۰۴ | ۸.۹۰ | ۸.۹۲ | ۱۸.۰۰ | ۹.۱۱ | ۱۱.۵۷ | ۴.۵۶ |

رکوردهای بالا که از جدول ۲ مستخرج شده‌اند عبارتند از

$$۱۲.۶۹, ۱۲.۸۴, ۱۸.۷۲, ۲۱.۹۶, ۲۳.۹۲, ۲۷.۱۶, ۳۱.۲۸, ۳۴.۰۴.$$

و مقادیر رکوردهای پایین به صورت زیر است

$$۱۲.۶۹, ۷.۵۱, ۴.۸۳, ۴.۱۳, ۴.۰۸.$$

با استفاده جدول ۱ و مقادیر رکوردهای فوق می‌توانیم فواصل اطمینان ناپارامتری دقیق در سطح $1-\alpha$، برای چندک $\xi_p$ جامعه مربوطه بدست آوریم. فواصل اطمینان برای $\xi_{0.7}$ و $\xi_{0.9}$ در سطح $1-\alpha$ بازای بعضی از مقادیر $1-\alpha$ بدست آمده و نتایج در جدول ۳ خلاصه شده‌اند.

جدول ۳. فواصل اطمینان برای چندک $\xi_{0.7}$ و $\xi_{0.9}$ داده‌های بارش سالانهٔ باران لس‌آنجلس.

| $p$ / $1-\alpha$ | ۰.۷ $(R^l_{a_1}, R^u_{a_2})$ | ۰.۹ $(R^l_{a_1}, R^u_{a_2})$ |
|---|---|---|
| ۰.۹۹ | (۴.۷۸۵, ۲۴.۱۱۰) | (۷.۴۸۱, ۲۷.۱۲۷) |
| ۰.۹۸ | (۵.۴۷۱, ۲۳.۶۱۲) | (۸.۵۹۸, ۳۱.۰۷۸) |
| ۰.۹۷ | (۵.۹۶۱, ۲۳.۰۸۵) | (۹.۲۸۲, ۲۹.۶۸۶) |
| ۰.۹۶ | (۶.۳۱۷, ۲۲.۶۸۹) | (۹.۷۷۴, ۲۸.۶۶۴) |
| ۰.۹۵ | (۶.۵۹۹, ۲۲.۳۹۷) | (۱۰.۱۶۲, ۲۷.۸۵۲) |

لازم به ذکر است که با استفاده از نتایج احمدی و ارقامی (۲۰۰۳) بر اساس داده‌های فوق و استفاده از رکوردهای معمولی فواصل اطمینان برای $\xi_{0.7}$ و $\xi_{0.9}$ در سطح ۰.۹۶ بترتیب عبارتند از (۲۱.۹۶ ۴.۸۳) و (۲۷.۱۶ ۷.۵۱). مشاهده می‌شود از منظر طول فاصله، فواصل اطمینان بدست آمده براساس رکوردهای کسری دارای طول کوچکترند.

## ۸ نتیجه گیری

در این مقاله موضوع ساختن فواصل اطمینان ناپارامتری برای چندک‌های جامعه بر اساس رکوردها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. مشکلاتی در خصوص ضریب اطمینان فواصل مربوطه بر اساس رکوردهای معمولی رخ می‌دهد، که برای رفع آن با ایده از آماره‌های مرتب کسری، آماره‌های رکوردی کسری را تعریف نمودیم. توابع چگالی احتمال این آماره‌ها را به دست آورده و با استفاده از نتایج بدست آمده فواصل اطمینان ناپارامتری برای چندک‌های جامعه ارائه داده‌ایم. در پایان به منظور ارائه مثال عددی داده‌های مقدار بارش سالانه باران در شهر لس‌آنجلس را در نظر گرفته و فواصل اطمینان ناپارامتری برای جامعه مربوطه به دست آورده‌ایم.

# کتاب‌نامه


[1] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2003) Non-parametric confidence and tolerance intervals from record values data. *Statistical Papers*, 44, 455–468.

[2] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1992) *A First Course in Order Statistics*, John Wiley New York.

[3] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998) *Records*, John Wiley New York.

[4] David, H.A.; Nagaraja, H.N. (2003).*Order Statistics.* third edition, Wiley, New York.

[5] Gulati, S.; Padgett, W.j.(2003).Parametric and Nonparametric Inference from RecordBreaking Data. *Lecture Notes in Statistics*, 172, Springer, new York.

[6] Hutson, A. (1999) Calculating nonparametric confidence intervals for quantiles using fractional order statistics. *Journal of Applied Statistics*, 26, 343–353.

[7] Jones, M. C. (2002) On fractional uniform order statistics. *Statistics and Probability Letters*, 58, 93–96.

[8] Serfling, R.J. (1980) Aproximation Theorems of Mathematical Statistics. *Wiley series in Probability and Mathematical Statistics*, Wiley, New York

[9] Stigler, S. M. (1977) Fractional order statistics, with applications. *Journal of the American Statistical Association*, 72, 544–550.