برآورد انقباضی نوع استاین پارامتر مکان تحت تابع زیان نرمال منعکس شده

بهزاد قاری [۱] سید محمد مهدی طباطبایی [۲]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد آمار دانشگاه فردوسی مشهد [۲] عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: در بررسی مسائل آماری و اقتصادی ممکن است با اعمال یک سری قیود و محدودیت‌ها بر روی فضای پارامتر مدل، بتوانیم برآوردگرهایی با خواص بهتر برای پارامترهای مدل بدست بیاوریم. اما در صورتی که از وقوع حتمی این قیود اطلاع کافی نداشته باشیم، می‌توان ابتدا احتمال رخداد این قیود را بررسی کرد و سپس در مورد انتخاب صحیح برآوردگر مناسب (محدودشده تحت قیود یا محدودنشده) تصمیم‌گیری کرد. ما در این مقاله، با فرض وجود یک سری قیود بر روی فضای پارامتر توزیع نرمال، برآوردگرهای محدودنشده، محدودشده، آزمون اولیه و انقباضی نوع استاین را برای پارامتر میانگین، با استفاده از یک نمونه تصادفی بدست می‌آوریم. سپس تحت تابع زیان نرمال منعکس‌شده توابع مخاطره آن‌ها را بدست آورده، شرایط برتری برآوردگر انقباضی نوع استاین را بر برآوردگر آزمون اولیه ارائه می‌دهیم.

واژه های کلیدی: آزمون اولیه، انقباضی نوع استاین، تابع زیان نرمال منعکس‌شده، تابع مخاطره.

۱ مقدمه

در مسائل استنباط آماری، استفاده از اطلاع پیشین در خصوص بعضی از پارامترها یا در مواردی در مورد تمام پارامترهای مورد علاقه در مدل آماری تحت بررسی، اغلب منجر به استفاده از روشهای پیشرفته و تعمیم‌یافته‌ای می‌شود، که با توجه به قطعی یا غیرقطعی بودن این اطلاع، به‌کار برده می‌شوند. استفاده از اطلاع پیشین معلوم در مدل‌های آماری، معمولاً به صورت یک قید مطرح است که در نهایت به مدل‌های محدودشده یا مقید منتج می‌شود. برآوردگری که براساس مدل‌های محدودشده بدست می‌آید، برآوردگر محدودشده[۱] (RE) نامیده می‌شود. اعتبار و کارایی برآوردگرهای محدودشده بر اساس قید اعمال شده برروی

[۱] Restricted estimator

فضای پارامتر مورد سنجش و بررسی قرار می‌گیرند در حالی‌که برآوردگرهای محدودنشده [۲] در کل فضای پارامتر بررسی می‌شوند. بنابراین، نتایج بدست‌آمده بر پایه مدل‌های محدودشده و محدودنشده تنها با سنجش درستی و اعتبار محدودیت‌ها و قیود اعمال‌شده، می‌تواند معقول و کاربردی باشد. باید توجه کرد که انتخاب برآوردگرهای محدودشده در شرایطی که اطلاع پیشین درست نباشد، توجیه‌پذیر نیست. در این موارد برای رهایی از این عدم قطعیت، می‌توان از رهیافت فیشر استفاده کرد. در این روش از یک آزمون اولیه به منظور بررسی درستی و اعتبار قید اعمال‌شده استفاده می‌شود، که براساس نتیجه آزمون، یکی از روش‌های محدودشده تحت قید موردنظر یا محدودنشده به‌کار برده می‌شود. این ایده اولین بار توسط بنکرافت [۳] (۱۹۴۴) در بهبود برآورد واریانس در جدول آنالیز واریانس مورد استفاده قرار گرفت. برآوردگری که بر این اساس بدست می‌آید، برآوردگر آزمون آستانه‌ای [۴] (PTE) نامیده می‌شود. تعمیم‌های مختلفی از این روش را می‌توان در مجموعه کارهای هان و بنکرافت [۵] (۱۹٦۸) و بنکرافت و هان (۱۹۸۳) دید. باید دقت کرد که در برآوردگر آزمون اولیه با توجه به نتیجه آزمون درستی قیود اعمال شده، یکی از دو نوع برآوردگر محدودنشده یا محدودشده بدست می‌آید. اما ساختار این برآوردگر با استفاده از تابع نشانگر به آمارهٔ آزمون فرضیه موردنظر مربوط می‌شود که هم به سطح معنی‌داری آزمون بستگی دارد و هم به دلیل خاصیت گسسته‌سازی آن یکی از دو برآوردگر حالات فرین، محدودنشده یا محدودشده را نتیجه می‌دهد که در این‌صورت بررسی دو برآوردگر و استفاده از اطلاع آن‌ها در خصوص پارامتر موردنظر تواماً امکان‌پذیر نیست. در این حالت برای از بین بردن این نواقص از برآوردگر انقباضی نوع استاین [٦] (SS) استفاده می‌کنیم. این برآوردگر به‌طور مستقیم از اطلاع آمارهٔ آزمون و دو برآوردگر محدودنشده و محدودشده تواماً استفاده می‌کند. صالح [۷] (۲۰۰٦) برآوردگرهای فوق را در مدل‌های مختلف آماری تحت توزیع نرمال و تابع زیان مربع خطا بکار برده است.

---

[۲] Unrestricted estimators
[۳] Bancroft
[۴] Preliminary test estimator
[۵] Han and Bancroft
[٦] Stein-type shrinkage
[۷] Saleh

جایلز[۸] (۲۰۰۲) با در نظر گرفتن تابع زیان نرمال منعکس شده[۹] (RNL)، توابع مخاطره برآوردگرهای محدودنشده، محدودشده و آزمون اولیه را محاسبه کرد. با توجه به بستگی برآوردگر PT به سطح آزمون، در این مقاله برآوردگر SS را، تحت مدل مورد بررسی در جایلز (۲۰۰۲)، معرفی کرده و با استفاده از تابع RNL، مخاطره آن را بدست می آوریم و شرایطی را ارائه می‌دهیم که تابع مخاطره برآوردگر SS از تابع مخاطره برآوردگر PT کمتر باشد.

تابع زیان نرمال منعکس‌شده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L(\mu^*, \mu) = k\left\{1 - \exp\left[-\frac{(\mu^* - \mu)^2}{2\gamma^2}\right]\right\} \qquad (1)$$

که در آن μ^* برآوردگر پارامتر میانگین، k نشان‌دهنده مقدار ماکزیمم زیان و γ پارامتر شکل می‌باشند.([۸] را ببینید) تابع زیان نرمال منعکس‌شده کاربرد فراوانی در M—برآوردها و برآوردیابی استوار دارد. برای آگاهی بیشتر در این زمینه به هوبر[۱۰] (۱۹۷۷) مراجعه کنید.
در این مقاله تابع مخاطره به صورت $R(\mu^*) = E[L(\mu^*, \mu)]$ است ، که امید ریاضی روی فضای نمونه گرفته می شود.

۲ انواع برآوردگرها

در این بخش با استفاده از یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال، برآوردگرهایی برای پارامتر میانگین ارائه می‌دهیم.

فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. در این حالت فرض می‌کنیم پارامترهای $\mu \in \Re$ و $\sigma^2 \in \Re^+ - \{0\}$ مجهول هستند. بدیهی است که برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامتر μ در این حالت برابر $\hat{\mu} = \bar{X}$ است که آن را برآوردگر درستنمایی ماکسیمم محدود نشده[۱۱] (UML) گویند.
واضح است که برای آزمون فرضیه $H_0 : \mu = \mu_0$ در مقابل فرضیه $H_1 : \mu \neq \mu_0$ آمارهٔ آزمون به صورت $t = \frac{\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu_0)}{S}$ می‌باشد که در آن $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$. در این مقاله ما از آمارهٔ $F = t^2$ استفاده می‌کنیم که بر اساس فرضیات مطرح شده در این بخش آمارهٔ F، دارای توزیع

[۸] Giles
[۹] Reflected normal loss
[۱۰] Huber
[۱۱] Unrestricted Maximum Likelihood

F غیرمرکزی با ۱ و $n-1$ درجات آزادی و پارامتر غیرمرکزی $\lambda = \frac{n\delta^2}{2\sigma^2}$ با $\delta = \mu - \mu_0$ می‌باشد و می‌نویسیم $F \sim F_{1,n-1;\lambda}$.

حال دقت کنید در شرایطی که فرضیه H_0 رد نمی‌شود، انتخاب برآوردگر $\hat{\mu}$ به عنوان برآوردگر پارامتر میانگین درست نیست و در این حالت μ_0 (برآوردگر درستنمایی ماکسیمم محدود شده[12] (RML)) جواب مسئله می‌باشد؛ لذا با توجه به نتیجه آزمون می‌توان در انتخاب برآوردگر مناسب پارامتر میانگین تصمیمی، درست گرفت. در این قسمت از برآوردگر آزمون اولیه استفاده می‌کنیم که با توجه به نتیجه آزمون (رد H_0 یا عدم رد H_0) به یکی از دو برآوردگر $\hat{\mu}$ یا μ_0 منتج می‌شود. در این حالت برآوردگر آزمون اولیه μ به صورت زیر می‌باشد

$$\hat{\mu}^{PT} = [I_R(F) \times \hat{\mu}] + [I_A(F) \times \mu_0]$$

که در آن $I_\Omega(.)$ تابع نشانگر مجموعه Ω است. در این مورد ناحیه رد مجموعه مقادیر $R = \{F : F > c_\alpha\}$ و ناحیه پذیرش (عدم رد) به صورت $A = \{F : F \leq c_\alpha\}$ است که c_α مقدار بحرانی برای یک سطح معنی داری انتخاب شده، می‌باشد.

برآوردگر آزمون اولیه به دلیل وجود تابع نشانگر در ساختار آن، دارای خاصیت گسسته سازی می‌باشد و شدیداً به سطح معنی داری آزمون وابسته است؛ لذا برای از بین بردن این نواقص، برآوردگر دیگری با عنوان برآوردگر انقباضی نوع استاین را معرفی می کنیم که به آماره آزمون وابسته است. در این حالت این برآوردگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\mu}^S = \mu_0 + \left(1 - dF^{-1}\right)(\hat{\mu} - \mu_0), \quad d \in \Re. \tag{2}$$

به ضریب $\left(1 - dF^{-1}\right)$، عامل انقباض می‌گویند. شرایط برتری SSE بر PTE، بستگی به انتخاب صحیح و مناسب مقدار d و در نتیجه عامل انقباض دارد. (بخش ۴ را ببینید) همچنین لازم به ذکر است که به ازای مقادیر $F > d$ عامل انقباض مثبت می‌شود و برعکس.

۳ مخاطره برآوردگرها

در این بخش توابع مخاطره برآوردگرهای UML، RML، PT و SS را به عنوان برآوردگرهایی از μ تحت تابع RNL در دو قضیه زیر ارائه می‌دهیم.

[12] Restricted Maximum Likelihood

قضیه ۱ توابع مخاطره برآوردگرهای UML، RML و PT به صورت زیر می‌باشند

$$
\begin{aligned}
R(\hat{\mu}) &= k\left\{ ۱ - \gamma\left[\frac{\sigma^{۲}}{n} + \gamma^{۲}\right]^{\frac{-۱}{۲}}\right\} \\
R(\mu_{\circ}) &= k\left\{ ۱ - \exp\left[-\frac{\delta^{۲}}{۲\gamma^{۲}}\right]\right\} \\
R(\hat{\mu}^{PT}) &= k\sum_{r=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{(-۱)^r(۲\gamma^{۲})^r r!}\right]\left\{\frac{۲r(\frac{\sigma^{۲}}{n})^r}{۲\pi}\Gamma(r+\frac{۱}{۲}) \right. \\
&+ \delta^{۲r} Pr.\left[\frac{\chi^{۲}_{(۱;\lambda)}}{\chi^{۲}_{(n-۱;\circ)}} < c^*_\alpha\right] - \sum_{j=\circ}^{۲r}\left\{\delta^j \binom{۲r}{j}(\frac{n}{\sigma^{۲}})^{r-\frac{j}{۲}}۲^{r-\frac{j}{۲}} \right. \\
&\times \left.\left. \sum_{i=\circ}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\left[\frac{\Gamma(\frac{۱+۲r-j+۲i}{۲})}{\Gamma(\frac{۱+۲i}{۲})}\right] Pr.\left[\frac{\chi^{۲}_{(۱+۲r-j+۲i;\lambda)}}{\chi^{۲}_{(n-۱)}} < c^*_\alpha\right]\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

که در آن $\delta = \mu - \mu_{\circ}$ ، $c^*_\alpha = \frac{c_\alpha}{n-۱}$ و $\chi^{۲}_{n,\lambda}$، توزیع خی ــدو غیرمرکزی با n درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزی λ می‌باشد.

برای مشاهده اثبات قضیه فوق به جایلز (۲۰۰۲) مراجعه کنید.

حال در این قسمت برای محاسبه تابع مخاطره برآوردگر استاین ابتدا لم اساسی زیر را بیان می کنیم.

گزاره ۱ فرض کنید $w \sim \chi^{۲}_{g,\theta}$ و همچنین $\phi(\circ)$ تابع اندازه پذیر بورل باشد. در این‌صورت به ازای $n > \frac{-g}{۲}$ داریم

$$E[w^n\phi(w)] = ۲^n\sum_{m=\circ}^{\infty}\frac{e^{-\theta}\theta^m}{m!}\left[\frac{\Gamma(\frac{g+۲n+۲m}{۲})}{\Gamma(\frac{g+۲m}{۲})}\right]E\left[\phi\left(\chi^{۲}_{(g+۲n+۲m)}\right)\right]$$

برای مشاهده اثبات گزاره فوق به کلارک[۱۳] (۱۹۸۶) مراجعه کنید.

قضیه ۲ تابع مخاطره برآوردگر SS به صورت زیر می‌باشد

$$R(\hat{\mu}^S) = k\sum_{r=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{(-۱)^r(۲\gamma^{۲})^r r!}\right]$$

[۱۳] Clarke

$$\times \quad \sum_{j=0}^{2r}\left\{\delta^{2r-j}\binom{2r}{j}\frac{\sigma^j}{n^{\frac{j}{2}}}2^{\frac{j}{2}}\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\left[\frac{\Gamma(\frac{1+j+2i}{2})}{\Gamma(\frac{1+2i}{2})}\right]E\Big(1-df^{-1}\Big)^j\right\}$$

که $f=\frac{(n-1)\chi^2_{(1+j+2i,\lambda)}}{\chi^2_{n-1}}$

اثبات: با استفاده از روابط (۱) و (۲) تابع مخاطره $\hat{\mu}^S$ به‌صورت زیر بدست می آید

$$R(\hat{\mu}^S)=kE\left\{1-\exp\left[-\frac{(\hat{\mu}^S-\mu)^2}{2\gamma^2}\right]\right\}=k\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{E(\hat{\mu}^S-\mu)^{2r}}{(-1)^r(2\gamma^2)^r r!}\right]$$

حال توجه کنید که

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^S-\mu &= \mu_0+(1-dF^{-1})(\hat{\mu}-\mu_0)-\mu=\hat{\mu}-dF^{-1}(\hat{\mu}-\mu_0)-\mu\\ &= (\hat{\mu}-\mu_0)(1-dF^{-1})+\mu_0-\mu\end{aligned}$$

پس داریم

$$\begin{aligned}E(\hat{\mu}^S-\mu)^{2r} &= E\Big[(\hat{\mu}-\mu_0)(1-dF^{-1})+\mu_0-\mu\Big]^{2r}\\ &= \sum_{j=0}^{2r}\binom{2r}{j}(\mu_0-\mu)^{2r-j}E\Big[(\hat{\mu}-\mu_0)(1-dF^{-1})\Big]^j\end{aligned}$$

از طرفی $Z=\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}-\mu_0)}{\sigma}\sim N(\Delta,1)$ که $\Delta=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ در نتیجه $Z^2\sim\chi^2_{(1,\frac{\Delta^2}{2})}$ است. همچنین چون Z^2 مستقل از S^2 است پس $F=\frac{(\hat{\mu}-\mu_0)^2}{\frac{S^2}{n}}=\frac{\sigma^2Z^2}{S^2}\sim F_{1,n-1,\frac{\Delta^2}{2}}$. حال قرار می دهیم $\varphi(x)=(1-\frac{d}{x})^j$. آنگاه داریم

$$E\Big[(\hat{\mu}-\mu_0)(1-dF^{-1})\Big]^j=\frac{\sigma^j}{n^{\frac{j}{2}}}E\left[Z^j\varphi(\frac{\sigma^2Z^2}{S^2})\right]=\frac{\sigma^j}{n^{\frac{j}{2}}}E\left[(Z^2)^{\frac{j}{2}}\varphi(\frac{\sigma^2Z^2}{S^2})\right]$$

بنا به گزاره ۱ می‌توان نتیجه گرفت

$$E\left[(Z^2)^{\frac{j}{2}}\varphi(\frac{\sigma^2Z^2}{S^2})\right]=2^{\frac{j}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\left[\frac{\Gamma(\frac{1+j+2i}{2})}{\Gamma(\frac{1+2i}{2})}\right]E\left[\frac{(n-1)\chi^2_{(1+j+2i,\lambda)}}{\chi^2_{n-1}}\right]$$

که نتیجه مورد نظر بدست می آید.

۴ مقایسه برآوردگرها

در حالت عادی با توجه به فرمول ریاضی توابع مخاطره PTE و SSE مقایسه این دو برآوردگر امکان پذیر نیست . لذا در حالت خاص این دو برآوردگر را با یکدیگر مقایسه می کنیم . برای این منظور ابتدا گزاره زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم .

گزاره ۲ اگر $X \sim \chi^{۲}_n$ آنگاه $E(X^k) = \frac{۲^k\Gamma(k+\frac{n}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})}$
حال در قضیه زیر تحت درستی فرضیه صفر، مقدار d در برآوردگر انقباضی نوع استاین را طوری بدست می آوریم که بر برآوردگر آزمون اولیه برتری داشته باشد.

قضیه ۳ تحت فرضیه $H_۰$ برای مقادیر ثابت α، به ازای هر d که در رابطه زیر صدق کند برآوردگر انقباضی نوع استاین بر برآوردگر آزمون اولیه برتری دارد

$$Pr.\left(\frac{\chi^{۲}_{۱+۲r}}{\chi^{۲}_{n-۱}} < c^*_\alpha\right) \geq \frac{\sum_{r=۱}^{\infty} \frac{\sigma^{۲r}۲^r\Gamma(r+\frac{۱}{۲})}{n^r\Gamma(\frac{۱}{۲})(-۱)^r(۲\gamma^{۲})^r r!}A_r}{\sum_{r=۱}^{\infty} \frac{\sigma^{۲r}\Gamma(r+\frac{۱}{۲})[r\Gamma(\frac{۱}{۲})-\pi۲^r]}{\pi n^r\Gamma(\frac{۱}{۲})(-۱)^r(۲\gamma^{۲})^r r!}},$$

$$A_r = \sum_{j=۰}^{۲r}\binom{۲r}{j}\left(\frac{-d}{n-۱}\right)^j \frac{\Gamma(j+\frac{n-۱}{۲})\Gamma(r+\frac{۱}{۲}-j)}{\Gamma(\frac{n-۱}{۲})\Gamma(r+\frac{۱}{۲})}$$

اثبات: برای اینکه نشان دهیم برآوردگر SS بر برآوردگر PT برتری دارد کافی است نشان دهیم تحت درستی فرضیه $H_۰$، $R(\hat{\mu}^S) - R(\hat{\mu}^{PT}) \leq ۰$. برای این منظور ابتدا توجه کنید تحت فرضیه $H_۰$، $\delta = ۰$ بنابراین

$$R(\hat{\mu}^{PT}) = k\sum_{r=۱}^{\infty}\frac{\sigma^{۲r}\Gamma(r+\frac{۱}{۲})\left[r\Gamma(\frac{۱}{۲}) - \pi ۲^r\right]}{\pi n^r(-۱)^r(۲\gamma^{۲})^r r!\Gamma(\frac{۱}{۲})}Pr.\left(\frac{\chi^{۲}_{۱+۲r}}{\chi^{۲}_{n-۱}} < c^*_\alpha\right)$$

همچنین تحت $H_۰$

$$R(\hat{\mu}^S) = k\sum_{r=۱}^{\infty}\left[\frac{E(\hat{\mu}^S-\mu)^{۲r}}{(-۱)^r(۲\gamma^{۲})^r r!}\right] = k\sum_{r=۱}^{\infty}\frac{E\left[(\hat{\mu}-\mu_۰)(۱-dF^{-۱})\right]^{۲r}}{(-۱)^r(۲\gamma^{۲})^r r!}$$

از طرفی تحت H_0، $Z=\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}-\mu_0)}{\sigma}\sim N(0,1)$ پس $F=\frac{\sigma^2 Z^2}{S^2}\sim F_{1,n-1}$. حال قرار می دهیم $\varphi(x)=(1-\frac{d}{x})^{2r}$. آنگاه بنا به گزاره ۱ داریم

$$\begin{aligned} E\left[(\hat{\mu}-\mu_0)(1-dF^{-1})\right]^{2r} &= \frac{\sigma^{2r}}{n^r}E\left[Z^{2r}\varphi\left(\frac{\sigma^2 Z^2}{S^2}\right)\right] \\ &= \frac{\sigma^{2r}2^r}{n^r}\frac{\Gamma(\frac{1+2r}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}E\left[\varphi(\chi^2_{1+2r})\right] \\ &= \frac{\sigma^{2r}}{n^r}2^r\frac{\Gamma(\frac{1+2r}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}E\left(1-\frac{d}{f}\right)^{2r} \end{aligned}$$

که $f=\frac{(n-1)\chi^2_{(1+2r)}}{\chi^2_{n-1}}$
اما

$$\begin{aligned} E\left(1-\frac{d}{f}\right)^{2r} &= E\left(1-\frac{d\chi^2_{n-1}}{(n-1)\chi^2_{1+2r}}\right)^{2r} \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{2r}\binom{2r}{j}\left(-\frac{d\chi^2_{n-1}}{(n-1)\chi^2_{1+2r}}\right)^j\right] \\ &= \sum_{j=0}^{2r}\binom{2r}{j}(-1)^j\left(\frac{d}{n-1}\right)^j E(\chi^2_{n-1})^j E\left(\frac{1}{\chi^2_{1+2r}}\right)^j \end{aligned}$$

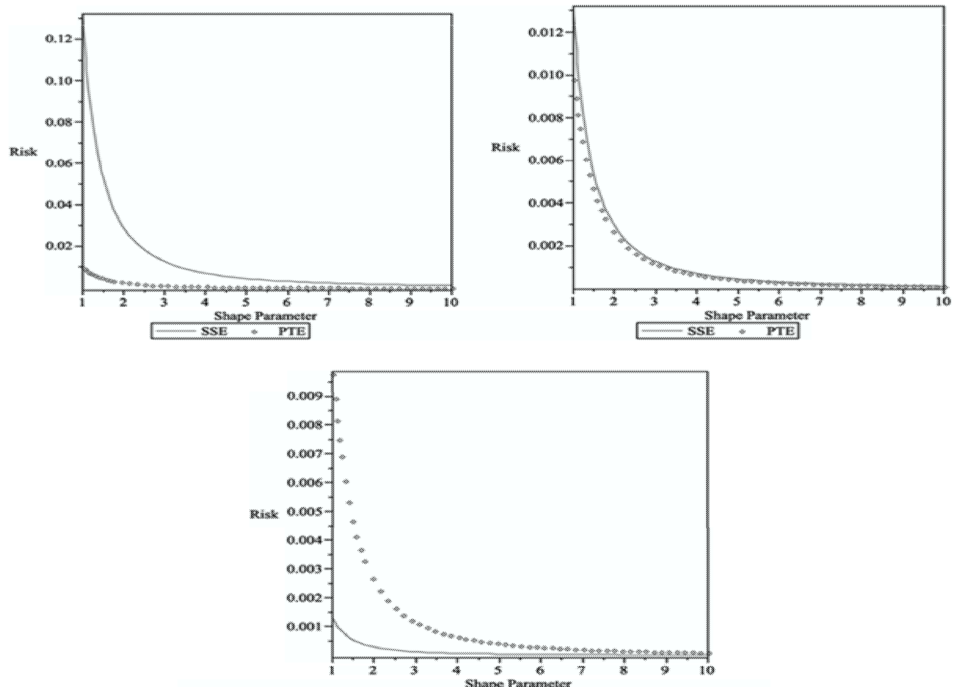
بنا بر گزاره ۲ می‌توان نتیجه گرفت

$$E\left(1-\frac{d}{f}\right)^{2r}=\sum_{j=0}^{2r}\binom{2r}{j}(-1)^j\left(\frac{d}{n-1}\right)^j\frac{2^j\Gamma(j+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\times\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2}-j)}{2^j\Gamma(r+\frac{1}{2})}$$

پس تحت H_0 برآوردگر استاین به صورت زیر می شود:

$$\begin{aligned} R(\hat{\mu}^S) &= k\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}2^r\Gamma(r+\frac{1}{2})}{n^r\Gamma(\frac{1}{2})(-1)^r(2\gamma^2)^r r!}\times \\ &\left\{\sum_{j=0}^{2r}\binom{2r}{j}(-1)^j(\frac{d}{n-1})^j\frac{\Gamma(j+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\times\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2}-j)}{\Gamma(r+\frac{1}{2})}\right\} \end{aligned}$$

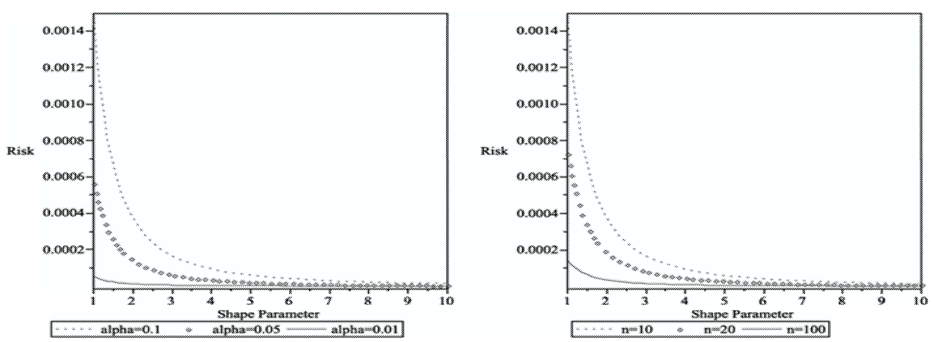
که در این‌صورت نتیجه موردنظر بدست می آید.
نمودار توابع مخاطره برآوردگرهای PT و SS تحت فرضیه H_0 به ازای مقادیر $d=1$،



شکل ۱ تا ۳مقایسه توابع مخاطره به ازای مقادیر مختلف d

۵ بحث و نتیجه‌گیری

تحت درستی فرضیه H_0، رفتار تابع مخاطره برآوردگرPT نسبت به حجم نمونه و اندازه آزمون در شکل ۴ آمده است.



شکل ۴ تابع مخاطره برآوردگر آزمون اولیه تحت فرضیه صفر

با توجه به شکل ۴، همانطور که مشاهده می‌شود هر چه آزمون حساس‌تر شود (مقادیر کوچکتر اندازه آزمون)، تابع مخاطره PTE کمتر می‌شود. همچنین با افزایش حجم نمونه، رفتار تابع مخاطره PTE بهتر می‌شود.

حال با توجه به قضیه ۳، در این قسمت مقادیری از d را می یابیم که به ازای α ثابت، برآوردگر SS بر برآوردگر PT برتری داشته باشد. با توجه به اینکه در کاربرد و بررسی داده های واقعی معمولاً با چند اندازه آزمون (α) خاص کار

می کنیم، در جدول ۱ مقادیر d موردنظر در چند سطح آزمون خاص داده شده است. محاسبات عددی در این قسمت با استفاده از بسته نرم‌افزاری Maple 11 انجام شده است.

α	۰/۵	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۱
d	۰/۰۸۰۲۱	۰/۰۱۱۳۱	۰/۰۰۴۲۷	۰/۰۰۰۴۰

جدول ۱. مقادیر بحرانی

کتاب‌نامه

[1] Bancroft, T. A. (1944), On biases in estimation due to the use of preliminary tests of significance, *Annal. Math. Statist.*, **15**, 195–204.

[2] Bancroft, T. A. and Han, C. P. (1983), A note of pooling variances, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **78**, 981–983.

[3] Clarke, J.A. (1986), *Some Implications of Estimation a Regression Scale Parameter After A Preliminary Test of Restrictions*, M.Ec.Minor Thesis, Department of Econometrics and Operetions Research, Monash University.

[4] Giles, D. E. A. (2002), Preliminary-test estimation of a location parameter under reflected normal loss, in Ullah, A. and Chaturvedi, A, *Handbook of Applied Econometrics and Statistical Inference*, Marcel Decker, New York, 287-303.

[5] Han, C. P. and Bancroft, T. A. (1968). On pooling means when variance is unknown, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **63**, 1333-1342.

[6] Huber, P. J. (1977), *Robust Statistical Procedures*, SIAM, Philadelphia.

[7] Saleh, A. K. Md. E. (2006), *Theory of Preliminary Test and Stein-type Estimation with Applications*, John Wiley, New York.

[8] Spring, F. A. (1993), The reflected normal loss function, *Canad. J. Statist.*, **21**, 321-330.