

## تحلیل دینامیکی استوانه جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند (Functionally Graded Material)

محمود شاکری<sup>۱</sup>، مهدی اخلاقی<sup>۲</sup>، سید محمود حسینی<sup>۳</sup>

تهران، خیابان حافظ، شماره ۴۲۴، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، دانشکده مهندسی مکانیک

E-mail: shakeri@cic.aut.ac.ir

### چکیده

در این مقاله رفتار دینامیکی یک استوانه جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند در حالت کرنش صفحه‌ای و تحت بارگذاری دینامیکی مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا استوانه جدار ضخیم به چندین لایه در راستای ضخامت تقسیم گردیده و از تئوری چند لایه جهت تحلیل استفاده شده است. خاصیت مواد در هر لایه، ایزوتروپ (isotropic) فرض شده و جهت ایجاد خاصیت ماده هدفمند در راستای ضخامت، چیدمان لایه‌های ایزوتروپ به گونه‌ای انتخاب شده که این هدف برآورده شود. در سطح تماس بین هر دو لایه شرایط پیوستگی تنش و تغییر مکان ارضاء شده است. در بارگذاری دینامیکی فرض شده که سطح داخلی استوانه تحت فشار داخلی که با زمان بصورت خطی تغییر می‌کند، قرار دارد و بصورت ناگهانی در زمانی معین بار برداری شده است. این بار برداری بصورت یک ضربه ناگهانی عمل می‌نماید. در ادامه تغییر مکان شعاعی در چندین نقطه از ضخامت و به ازای حالت‌های مختلف ماده هدفمند مورد ارزیابی قرار گرفته است. با انتقال نمودار تغییر مکان شعاعی از حوزه زمان به حوزه فرکанс با استفاده از روش انتقال فوریه سریع، فرکانسهای طبیعی مشخص شده اند.

واژه‌های کلیدی: مواد هدفمند، استوانه جدار ضخیم، بارگذاری دینامیکی، فرکانسهای طبیعی.

مختلف می‌باشد که از مهمترین این ویژگیها می‌توان به قابلیت استحکام بالای مکانیکی همراه با قابلیت مقاومت حرارتی اشاره کرد. خواص مکانیکی در این مواد بصورت تابعی پیوسته و متغیر هستند، برای مثال در استوانه جدار ضخیم خواص مکانیکی در جداره و راستای شعاعی متغیر هستند و خاصیت مکانیکی از سطح داخلی بصورت پیوسته

### مقدمه

مواد هدفمند دسته جدیدی از مواد هستند که امروزه بخصوص در صنایع هوا و فضا توجه ویژه‌ای به آنها شده است. در سال ۱۹۸۴ اولین بار گروهی از مهندسان زاپنی توانستند این نوع مواد را تولید کنند. این مواد دارای ویژگیهای بسیار مهم و سودمندی جهت کاربرد در صنایع

<sup>۱</sup> استاد

<sup>۲</sup> دانشیار

<sup>۳</sup> دانشجوی دکتری

هدفمند توسعه داده شد [7]. در این کار از تئوری چند لایه برای تحلیل استفاده شد. در زمینه تحلیل ارتعاشات مواد هدفمند می‌توان به مطالعه دیگری که در سال ۲۰۰۳ توسط چن (Chen) صورت پذیرفت، اشاره کرد [8]. وی یک پوسته استوانه‌ای حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده از جنس مواد هدفمند ارزوتروپ را از نقطه نظر ارتعاشی مورد ارزیابی قرار داد. وی همچنین تاثیر پارامترهای مادة هدفمند را بر روی فرکانس‌های طبیعی تشریح نمود. در سال ۲۰۰۴ لی (Lee) تحلیل ترمولاستیسیته یک استوانه تو خالی که مرزهایش تحت دمای متغیر با زمان قرار داشت را تشریح نمود [9]. در تحلیل وی استوانه با طول محدود و تقارن محوری در نظر گرفته شده بود و نیز تحلیل ترمولاستیسیته کوبیل صورت پذیرفت.

در این مقاله یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری دینامیکی در حالت کرنش صفحه‌ای تحلیل شده است.

### روابط حاکم و مدل المان محدود

پوسته‌ای استوانه‌ای و تو خالی با شاعع داخلی  $a$  و شاعع خارجی  $b$  ساخته شده از مادة هدفمند در نظر می‌گیریم. جنس جداره پوسته در راستای شعاعی متغیر فرض شده و مادة هدفمند ترکیبی از سرامیک و فلز انتخاب می‌شود. نسبت ترکیب سرامیک و فلز بصورت کاملاً یکنواخت و پیوسته در راستای  $\tau$  تغییر می‌کند. سطح داخلی پوسته از سرامیک خالص و سطح خارجی از فلز خالص در نظر گرفته می‌شود.

توزیع ماده بصورت زیر قابل بیان است :

$$P = (P_m - P_c) \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^n + P_c \quad (1)$$

که در رابطه فوق  $P$  خاصیت مکانیکی ماده،  $n$  ضریبی مثبت که شکل تغییرات ماده را تعیین می‌کند و اندیسهای  $m$  و  $c$  که به ترتیب بر سرامیک و فلز دلالت دارند. خاصیت مکانیکی  $P$  می‌تواند مدول الاستیسیته  $E$  و چگالی  $\rho$  در نظر گرفته شود. جهت تحلیل، پوسته ساخته شده از مادة هدفمند به  $m$  لایه تقسیم می‌کنیم که جنس هر لایه ایزوتروپ فرض می‌شود و در واقع خاصیت هدفمند بودن

تغییر کرده تا به سطح خارجی با خاصیتی متفاوت با سطح داخلی میرسد.

در خصوص تحلیل استوانه جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تحقیقات وسیعی صورت گرفته است که می‌توان به برخی از آنها اشاره نمود. در سال ۱۹۹۸ میلادی رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق ساخته شده از مواد هدفمند تحت بار گذاری حرارتی توسط پراوین (Praveen) و ردی (Reddy) مورد مطالعه قرار گرفت [1]. در این تحلیل ترمولاستیسیته، تغییر مکانها و تنشهای موردنیز گردیدند. ماده هدفمند مورد استفاده در این تحقیق، سرامیک - فلز بود. در تحقیق دیگری که در سال ۱۹۹۹ میلادی توسط لوی (Loy) و همکارانش صورت پذیرفت، فولاد - نیکل مورد بررسی قرار گرفت [2]. آنها با استفاده از روش‌های عددی توانستند رفتار ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای را تحلیل نمایند. در سال ۲۰۰۰ چنگ (Cheng) و همکارش ارتعاشات در حالت پایدار و کمانش یک ورق با تکیه‌گاه‌های ساده که روی یک بستر الاستیک قرار داشت را مورد مطالعه قرار دادند که بارگذاری نیز بصورت یک فشار هیدرولاستاتیک به ورق اعمال می‌گردید [3]. در این تحقیق از تئوری ورق ردی (Reddy) استفاده شده است. تحلیل ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند بمنظور تعیین پاسخهای دینامیکی و فرکانس‌های طبیعی در حالات مختلف ماده هدفمند در سال ۲۰۰۰ توسط پرادهان (Pradhan) و همکارانش انجام گردید [4]. این محققین از تئوری لاو (Love) و روش ریلی (Rayleigh) جهت تحلیل خویش بهره جستند. در سال ۲۰۰۱ میلادی هان (Han) و همکارانش موجهای گذراش شده در یک استوانه ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از یک روش عددی ترکیبی تحلیل نمودند [5]. هان و همکارانش در تحلیلی دیگر توانستند یک روش محاسباتی را جهت بررسی موج SH در ورق ساخته شده از مواد هدفمند در سال ۲۰۰۲ ارائه دهند [6]. آنها فرض کردند که خواص ماده یک تابع کوادراتیک (Quadratic) در راستای ضخامت ورق باشد. قابلیت هدایت حرارتی در حالت گذرا در سال ۲۰۰۲ توسط جین (Jin) برای یک باریکه از جنس مواد

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_k &= (\sigma_r)_{k+1} \\ (u)_k &= (u)_{k+1} \end{aligned} \quad (10)$$

جهت مدل سازی المان محدود پوسته از روش گلرکین (Shape Function) و توابع هندسی (Galerkin) خطی برای متغیر  $u$  استفاده شده است.

$$u = \sum N_i u_i \quad (11)$$

با استفاده از روش گلرکین در رابطه تعادل (۸) معادل حاکم برای هر المان بصورت زیر استخراج می شود:

$$[M]_e \dot{\{X\}}_e + [K]_e \{X\}_e = \{f\}_e \quad (12)$$

برای المان بندی از المانهای خطی در راستای ساعت استفاده شده و هر لایه نیز به I المان تقسیم گردیده است. برای گرههایی گه بین دو لایه k و k+1 قرار گرفته اند شرایط پیوستگی به صورت زیر قابل نوشتگی است، مطابق شکل (۱):

$$u_{kl} = u_{k+1,l} \quad (13)$$

$$\sigma_{rkl} = \sigma_{r(k+1,l)} \quad (14)$$

رابطه (۱۴) بر حسب مؤلفه تغییر مکان و با استفاده از روش اختلافات محدود (Finite Difference) بصورت زیر قابل دوباره نویسی است:

$$c_1^k \frac{u_{kl} - u_{k+1,l}}{h} + c_2^k \frac{u_{kl}}{R_k} = \quad (15)$$

$$c_1^{k+1} \frac{u_{k+2,l} - u_{k+1,l}}{h} + c_2^{k+1} \frac{u_{k+1,l}}{R_{k+1}}$$

که در رابطه فوق h ضخامت المان و R<sub>k+1</sub> و R<sub>k</sub> ساعهای متوسط لایههای k و k+1 می باشند. بالا نویس k بر لایه kام دلالت میکند. از روابط (۱۳) و (۱۵) جهت مونتاژ (Global Matrix) ماتریسهای سختی و جرم در مختصات کلی (Coordinate) استفاده می شود. معادله تعادل دینامیکی حاکم بر پوسته در مختصات کلی به صورت زیر می باشد:

$$[M] \ddot{\{X\}} + [K] \{X\} = \{f\} \quad (16)$$

برای حل دستگاه معادلات حاصل شده در حوزه زمان از روش نیومارک (Newmark) با گامهای زمانی مناسب (Time Step) استفاده شده است. برای پیدا کردن اولین فرکانس طبیعی نمودار تغییر مکان شعاعی نقاطی مشخص از پوسته با استفاده از روش انتقال فوریه سریع به حوزه فرکانس انتقال داده میشود و در نمودارهای حاصل شده اولین فرکانس طبیعی مشخص میشود.

ماده را با چیدمانی صحیح از لایههای همگن در کنار هم ایجاد می نماییم، شکل (۱).

خاصیت مکانیکی لایه J ام بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$P = (P_m - P_c) \left[ \frac{(J-1)t}{b-a} \right]^n + P_c \quad (2)$$

که t عبارت است از:

$$t = \frac{b-a}{m} \quad (3)$$

تغییرات خاصیت مکانیکی ماده نسبت به پارامتر n در رابطه (۲) در شکل (۲) نشان داده شده است.

در حالت کرنش صفحه ای (استوانه با طول بینهایت) و بار گذاری متقاضی محوری رابطه تعادل عبارت است از:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

که u مؤلفه شعاعی تغییر مکان می باشد. رابطه کرنش تغییر مکان عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \end{aligned} \quad (5)$$

رابطه تنش - کرنش را در هر لایه بصورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_1 \varepsilon_r + c_2 \varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta &= c_2 \varepsilon_r + c_1 \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad (6)$$

که در رابطه فوق :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_2 &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (7)$$

رابطه تعادل حاکم بر هر لایه از پوسته استوانه ای در حالت کرنش صفحه ای و بار گذاری متقاضی محوری بصورت زیر نتیجه می شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\rho}{c_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

شرایط مرزی حاکم بر سطوح داخلی و خارجی پوسته به صورت زیر فرض می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= F(t) & \text{در سطح داخلی} \\ \sigma_r &= 0 & \text{در سطح خارجی} \end{aligned} \quad (9)$$

شرط پیوستگی بین دو لایه k و k+1 را که باید ارضاء شوند می توان به صورت زیر نوشت:

فرکانسهای طبیعی اول به ازای مقادیر مختلف  $n$  ارائه شده است. همانطور که از مقادیر جدول استنباط می‌شود، به ازای افزایش مقادیر  $n$  شاهد افزایش مقادیر فرکانس طبیعی می‌باشیم که این امر نشانگر اینست که با بیشتر شدن ماهیت فلزی ماده فرکانس طبیعی کم می‌شود. البته در مورد فرکانس طبیعی نیز به ازای مقادیر بزرگ  $n$  مقادیر فرکانس طبیعی ثابت می‌ماند.

### نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از تئوری مواد چند لایه، پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری دینامیکی با تقارن محوری در حالت کرنش صفحه‌ای تحلیل شده است. خاصیت مواد در هر لایه ایزوتروپ فرض شده است و خاصیت هدفمند بودن پوسته با چیدن مناسب لایه‌های ایزوتروپ در کنار یکدیگر حاصل شده است. جهت مشخص کردن فرکانس طبیعی پوسته تغییر مکان شعاعی چند نقطه پوسته در حوزه زمان، با استفاده از تبدیل فوریه سریع به حوزه فرکانس انتقال داده شده است. فرکانسهای غالب در حوزه فرکانس همان فرکانسهای طبیعی اول پوسته استوانه‌ای هستند. همچنین تغییرات پاسخ فرکانسی و پاسخ حوزه زمان پوسته نسبت به حالات مختلف خاصیت ماده هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است.

### مراجع

- [1] Praveen G.N., Reddy J.N., *Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates*, Int. J. solids structures, Vol. 35(1998), pp. 4457 – 4476.
- [2] Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N, *Vibration of functionally graded cylindrical shells*, Int. J. of Mech. Sci., vol.41 (1999), pp. 309-324.
- [3] Cheng Z.Q., Batra R.C., *Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates*, J. of sound and vibration, Vol.229 (4) (2000), pp. 879-895.
- [4] Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N, *Vibration characteristics*

### نتایج عددی و بحث در نتایج

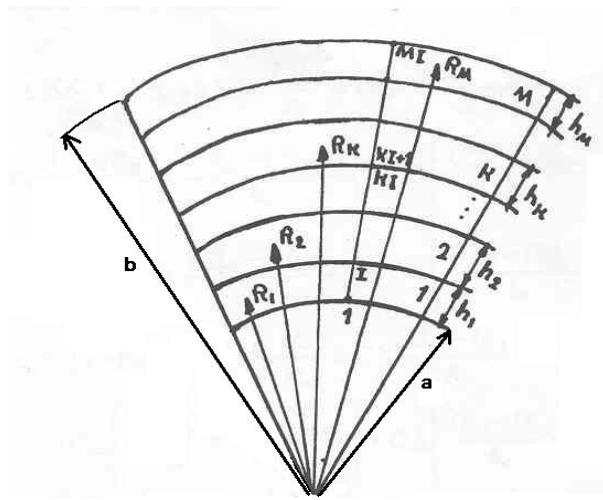
به عنوان یک مثال، پوسته‌ای استوانه‌ای جدار ضخیم به شعاع داخلی  $a=0.25m$  و شعاع خارجی  $b=0.5m$  را در نظر می‌گیریم. مدول الاستیسیته و چگالی جرمی در سطح داخلی ( $E_c = 380Gpa$  برابر آلومینا) و در سطح خارجی ( $\rho_c = 3800 kg/m^3$  آلمینیوم) برابر  $\rho_m = 2707 kg/m^3$ ،  $E_m = 70Gpa$  می‌باشد.تابع مربوط

به فشار داخلی به صورت زیر فرض می‌شود:

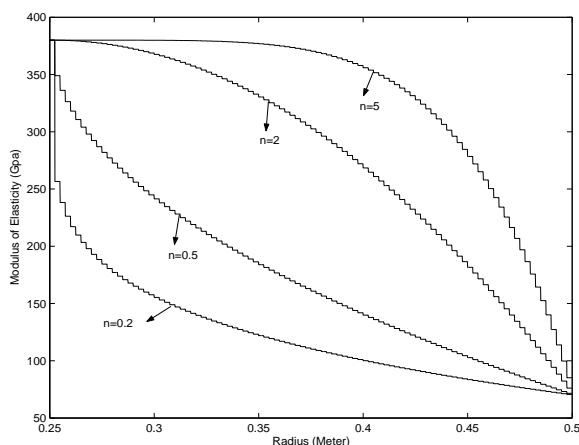
$$\begin{aligned} F(t) &= P_0 t && \text{for } t \leq 0.005 \text{ sec} \\ F(t) &= 0 && \text{for } t > 0.005 \text{ sec} \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه فوق  $P_0 = 4 GPa/Sec$  می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌گردد پوسته در لحظه  $t = 0.005 \text{ sec}$  بار برداری می‌شود که این امر مانند یک تحریک ناگهانی عمل می‌کند.

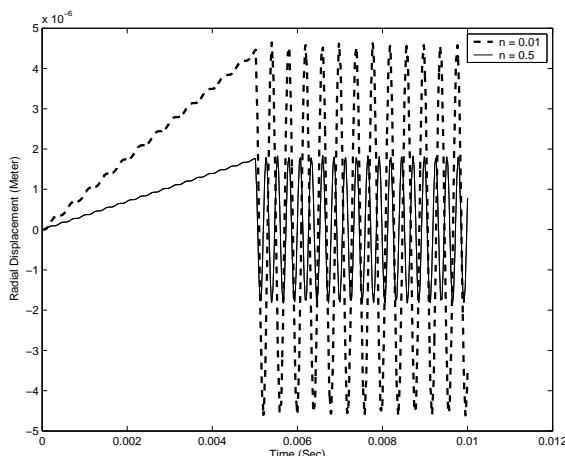
در شکل (۳) تغییرات تغییر مکان شعاعی نقطه وسط ضخامت پوسته به ازای دو مقدار از  $n$  نسبت به زمان نشان داده شده است. همانطور که از شکل (۳) مشخص است دامنه ارتعاش با مقدار  $n$  نسبت عکس دارد و برای  $n$  بزرگتر مقدار دامنه کاهش یافته است. این روند کاهش به ازای مقادیر بزرگتر  $n$  پایدار نمی‌ماند و برای  $n$  های بزرگ مقدار دامنه نسبت به افزایش  $n$  ثابت می‌ماند که این موضوع در شکل (۴) مشخص است. بطور کلی رفتار تغییر مکان شعاعی در حوزه زمان به ازای مقادیر مختلف  $n$  در شکلهای (۳) و (۴) مشخص است. مقادیر کم  $n$  دلالت بر خاصیت فلزی (آلومینیومی) بیشتر ماده هدفمند دارند (شکل (۲)) و همانطور که مشخص است دامنه ارتعاشات در فلزات نسبت به سرامیکها بیشتر می‌باشد که شکلهای حاصل این موضوع را نشان میدهدند. در شکلهای (۵) تا (۷) تغییرات تغییر مکان شعاعی  $u$  نقاط مختلف جداره پوسته استوانه‌ای نسبت به زمان نشان داده شده است. مقدار  $n$  در این نمودارها به عنوان نمونه برابر ۰.۵ فرض شده است. جهت پیدا نمودن اولین فرکانس طبیعی پوسته تغییرات تغییر مکان شعاعی چند نقطه از جداره استوانه به ازای یک مقدار معین  $n$  با استفاده از انتقال فوریه سریع از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال داده شده است. در نمودار حاصل شده فرکانسهای غالب که همان فرکانسهای طبیعی اول می‌باشند، مشخص می‌باشد، شکل (۸). در جدول (۱)



شکل ۱- شماتیک لایه ها و المانها در پوسته



شکل ۲- توزیع مدول الاستیسیته در لایه ها



شکل ۳- تغییرات تغییر مکان شعاعی نسبت به زمان برای دو  
مقدار  $n=0.5$  و  $n=0.01$

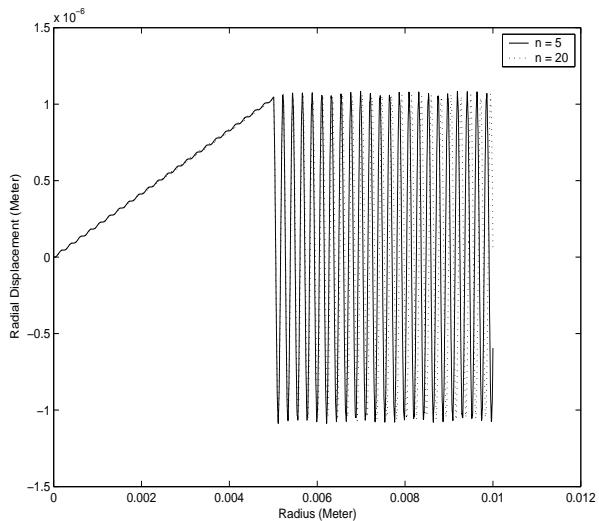
*functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions, Applied Acoustics, vol. 61(2000), pp. 111-129.*

- [5] Han X., Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y., *Transient waves in a functionally graded cylinder*, Int. J. of solids and structures, vol.38 (2001), pp. 3021-3037.
- [6] Han x., Liu G.R., *Effects of SH waves in a functionally graded plate*, Mechanics Research Communications, Vol. 29 (2002), pp. 327-338.
- [7] Jin Z.H., *An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material*, Int. comm. Heat Mass Transfer, Vol. 29 (2002), No. 7, pp. 887-895.
- [8] Chen W.Q., Bian Z.G., Ding H.J., *Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells*, Int. J. of Mech. Sci., accepted 18 December 2003.
- [9] Lee Z.Y., *Hybrid numerical method applied to 3-D multilayer hollow cylinder with time-dependent boundary conditions*, Applied mathematics and computation, vol. 150 (2004), pp. 25-43.

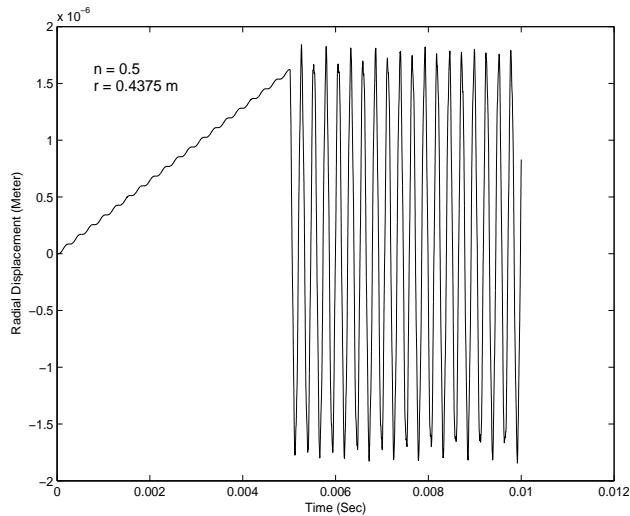
جدول ۱- فرکانسهای طبیعی اول به ازای مقادیر مختلف  $n$

$n$	0.01	0.5	5	20
فرکانسهای طبیعی اول (پایه)	2441.5	3906.2	4394.5	4394.5

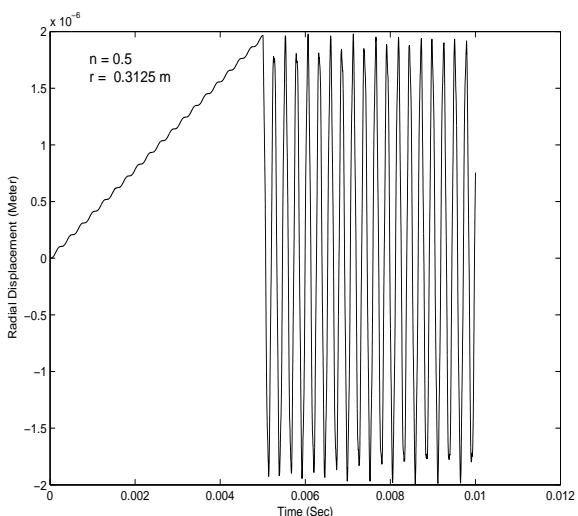
شکل ۶- تغییرات تغییر مکان شعاعی نقطه  $r = 0.375$  m نسبت به زمان برای  $n=0.5$



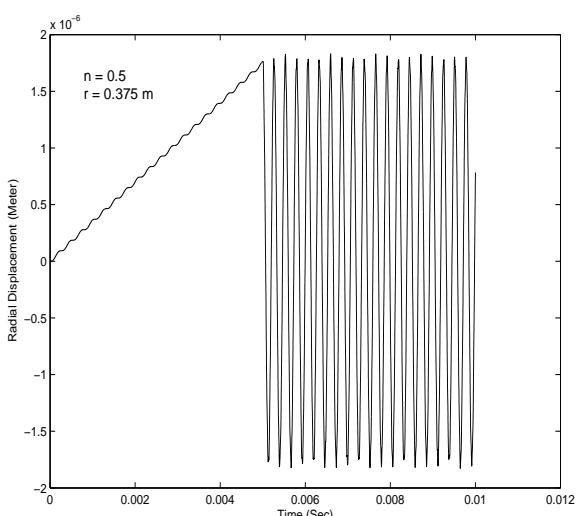
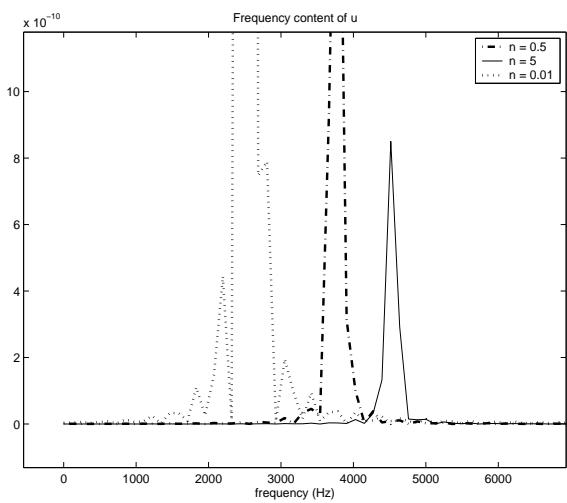
شکل ۴- تغییرات تغییر مکان شعاعی نسبت به زمان برای دو  
مقدار  $n=20$  و  $n=5$



شکل ۷- تغییرات تغییر مکان شعاعی نقطه  $r = 0.4375$  m  
نسبت به زمان برای  $n=0.5$



شکل ۵- تغییرات تغییر مکان شعاعی نقطه  $r = 0.3125$  m  
نسبت به زمان برای  $n=0.5$



شکل ۸- پاسخ تغییر مکان شعاعی در حوزه فرکانس به ازای  
مقادیر مختلف  $n$