

بررسی پراکندگی جوابهای سالیتری مدل Φ^4 از ناخالصی با سه مدل متفاوت

حکیمی طوسی، انسیه^۱؛ جاویدان، کورش^۱

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فردوسی مشهد ۹۱۷۷۵-۱۴۳۶

چکیده

نتایج مطالعه بر روی ویژگیهای گوناگون پراکندگی سالیترهای توپولوژیک از موانعی به شکل چاه و سد در $1+1$ بعد ارائه شده است. نتایج براساس سه مدل مختلف برای برهمکنش پتانسیل-موج سالیتری Φ^4 می باشند. در مدل اول پتانسیل به کمک تعریف متریک مناسب برای فضا-زمان به لاگرانژی سیستم اضافه شده است. این مدل در واقع تقریب پتانسیل ضعیف نسبیست عام است. مدل دوم تقریب بهتری از مدل اول می باشد. این مدل را برای اولین بار معرفی کرده و نشان می دهیم قابلیت های لازم را دارد. در مدل سوم پتانسیل به کمک تغییر یکی از پارامترهای جواب به معادله حرکت افزوده شده است. نتایج بر پایه شبیه سازیهای عددی و ملاحظات تحلیلی است.

Scattering of solitons on barriers and holes in three ϕ^4 models

Hakimi Toosi, Ensieh ; Javidan, Korosh

Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract

Scattering properties of solitary waves of ϕ^4 model, on potentials are investigated. Soliton-potential scattering is studied with three different models. In model 1 we have added the potential through a suitable metric for the background space-time. A better approximation is presented in model 2. The second model is a new one and we will show that it has better behaviour. In the third model, the potential is added to the equation of motion by changing one of the parameters of the solitary wave. The obstructions are characterized by a potential which has a non-zero value in a certain region of space and zero elsewhere. Our results are based on numerical simulations and analytical considerations.

مقدمه

دست دادن انرژی، بازتاب می نماید. بنابراین پراکندگی سالیتون از یک سد پتانسیل با دقت خوبی الاستیک است. در واقع سالیتون در این برهمکنش، شبیه یک ذره نقطه ای رفتار می کند [۸-۵].

با این حال سالیتون رفتار جالبتری را هنگام برهمکنش با یک چاه پتانسیل، نمایش می دهد. در سرعت های پایین (کمتر از یک مقدار بحرانی) سالیتونها غالباً درون چاه به دام می افتند. البته در موارد نادری نیز احتمال بازتاب وجود دارد. سالیتونهای دارای انرژی کافی (سالیتونهایی که سرعتی بیشتر از سرعت بحرانی دارند) از چاه بیرون می آیند. در این حالت، سالیتون با

بعضی از جنبه های جالب پراکندگی سالیتونها، توجه محققین را به خود جلب کرده است و در بسیاری از مقالات مطالعه شده اند [۱-۱۲]. معمولاً ناخالصیهایی که در محیط انتشار سالیتونها وجود دارند بر رفتار عادی امواج یا سالیتونها تاثیر می گذارند. مطالعات نشان داده است که یک سالیتون هنگامی که از سد پتانسیل پراکنده می شود شبیه یک ذره کلاسیکی رفتار می کند [۳ و ۴]. در چنین حالتی یک مسیر تعریف شده را دنبال می کند و به محض اینکه با سد برخورد می کند سرعتش کاهش می یابد و اگر انرژی کافی داشته باشد به بالای سد صعود کرده و از آن عبور می کند. در غیر اینصورت بدون از



برده می‌شود. متریک زمینه را برای (۱+۱) بعد به صورت تعریف می‌کنیم:

$$g^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 1+v(x) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+v(x)} \end{pmatrix} \quad (۷)$$

با استفاده از (۳) معادله حرکت در حضور $g^{\mu\nu}(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\partial_0^2 \phi = \frac{1}{(1+v(x))^2} \partial_1^2 \phi - \frac{1}{(1+v(x))} \frac{\partial u(\phi)}{\partial \phi} \quad (۸)$$

چگالی انرژی نیز به صورت زیر است:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}(1+v(x))^2 (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_1 \phi)^2 - (1+v(x))u(\phi) \quad (۹)$$

پتانسیل به شکل یک تابع نمایی $v(x) = ae^{-bx^2}$ است.

مدل ۳: بررسی برهمکنش سالیتون با سد پتانسیل به

روش تغییر پارامتر پتانسیل

در این روش، پتانسیل ناخالصی به کمک تغییر یکی از پارامترهای جواب موج سالیتوری به سیستم اضافه می‌گردد.

لاگرانژی معادله ϕ^4 به صورت زیر است:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - u(\phi) \quad (۱۰)$$

پتانسیل را به شکل زیر اضافه می‌کنیم:

$$u(\phi) = \tilde{\lambda}(x)(\phi^2 - 1)^2 \quad (۱۱)$$

$$\tilde{\lambda}(x) = 1 + \lambda(x)$$

$\tilde{\lambda}(x)$ پارامتر پتانسیل است که برای به حساب آوردن اثرات

موانع در لاگرانژی قرار داده می‌شود. معادله حرکت از معادله

لاگرانژ بدست می‌آید:

$$\partial_0^2 \phi = \partial_1^2 \phi + 4\tilde{\lambda}(x)\phi(\phi^2 - 1) \quad (۱۲)$$

پراکندگی از سد برای سه مدل

ویژگیهای کلی پراکندگی سالیتونها در سه مدل، بسیار شبیه

یکدیگر است [۱۲]. شکل سد پتانسیل، آنگونه که توسط

سالیتون دیده می‌شود را می‌توان با قرار دادن سالیتون با

سرعت صفر در مکانهای مختلف و محاسبه انرژی کل آن بدست

آورد. شکل (۱) انرژی را برای سه مدل نشان می‌دهد.

سرعتی کمتر ادامه مسیر می‌دهد؛ زیرا مقداری از انرژی خود را به صورت تابش در حین برهمکنش، از دست می‌دهد [۱۱ و ۱۲]. در شبیه سازی عددی از یک پتانسیل نمایی استفاده کرده ایم. شبیه سازیها با استفاده از روش تفاضلهای محدود انجام شده اند.

مدل ۱: بررسی برهمکنش سالیتون با سد پتانسیل

به روش تغییر متریک هندسه فضا

در این مدل پتانسیل ناخالصی رابه کمک تغییر در هندسه فضا وارد می‌کنیم. چگالی لاگرانژی در یک فضای خمیده در (۱+۱) بعد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - u(\phi) \right] \quad (۱)$$

که در آن g دترمینان متریک یعنی $g^{\mu\nu}$ می‌باشد و پتانسیل به صورت زیر داده می‌شود:

$$u(\phi) = (\phi^2 - 1)^2 \quad (۲)$$

معادله حرکت برای لاگرانژی فوق در فضای با متریک $g^{\mu\nu}(x)$

به صورت زیر است: [۱۲]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi g_{\mu\nu} \partial_\nu (\sqrt{\phi}) \right] + \frac{\partial u(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (۳)$$

اگر پتانسیل ضعیف و غیر وابسته به زمان $v(x)$ در فضای

زمینه وجود داشته باشد، متریک فضا با تقریب خوبی به

صورت زیر است:

$$g^{\mu\nu}(x) \approx \begin{pmatrix} 1+v(x) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴)$$

با استفاده از این متریک معادله حرکت به شکل زیر خواهد

بود:

$$(1+v(x)) \partial_0^2 \phi - \partial_1^2 \phi - \frac{1}{2(1+v(x))} dv(x) \phi + 4\phi(\phi^2 - 1) = 0 \quad (۵)$$

چگالی انرژی عبارتست از:

$$\varepsilon = \sqrt{1+v(x)} \left[\frac{1}{2} (1+v(x)) \partial_0^2 \phi^2 + \frac{1}{2} (\partial_1 \phi)^2 + (\phi^2 - 1)^2 \right] \quad (۶)$$

برای حل معادله (۵) از روشهای عددی استفاده می‌کنیم.

مدل ۲: برهمکنش سالیتون با سد پتانسیل به روش

تغییر متریک هندسه فضا

حال از تقریب بهتری برای متریک در مدل ۲ استفاده می‌کنیم.

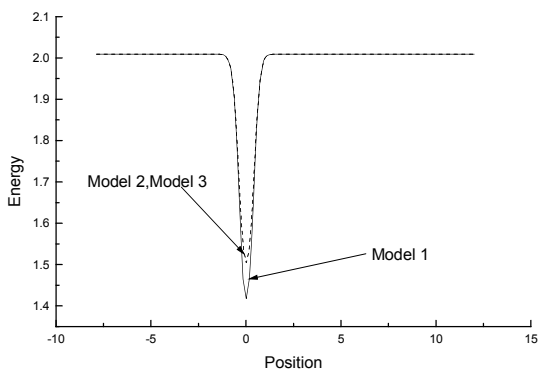
این تقریب برای اولین بار برای بررسی این موضوع به کار



شکل ۳ همچنین نشان می‌دهد که، انرژی سکون سالیتون در بالای سد پتانسیل در مدل ۳ و ۲ بیشتر از مدل ۱ است. این باعث می‌شود که سالیتون مدل ۱ انرژی آزاد بیشتری داشته باشد و بنابراین اتلاف انرژی در آن بیشتر باشد.

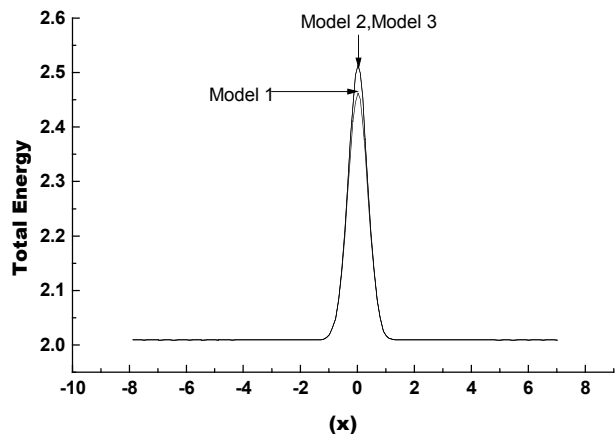
پراکندگی از چاه برای سه مدل

حال پراکندگی سالیتون از چاه را بررسی می‌کنیم. مساله پراکندگی از چاه پتانسیل به دلیل خواص جالب آن بیشتر مورد توجه قرار گرفته است [۳-۱۲]. پراکندگی از چاه تا حدود زیادی غیرالاستیک است. سالیتون در این وضعیت رفتارهای متفاوتی شامل دفع به وسیله چاه، گیر افتادگی در یک چاه جاذب و همچنین عبور از چاه را نشان می‌دهد. مکانیزم گیرافتادگی عبارت است از رسیدن یک سالیتون به مکان پتانسیل جاذب و نوسان کردن داخل آن برای یک مدت نامحدود بدون اینکه امکانی برای بیرون آمدن از آن وجود داشته باشد [۸]. در شبیه‌سازیها، یک چاه نمایی با $v(x) = ae^{-bx^2}$ ($a < 0$) در نظر گرفتیم. شکل ۴ چاهی به عمق $a = -0.5$ به صورتی که سالیتون می‌بیند، را نشان می‌دهد.



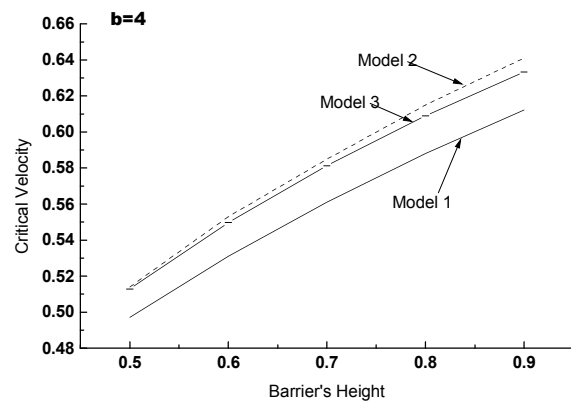
شکل ۴: پتانسیل چاه چگونه که سالیتون آنرا می‌بیند.

در شکل ۵ جرم سکون سالیتون برحسب تابعی از عمق چاه- برای سه مدل رسم شده است.



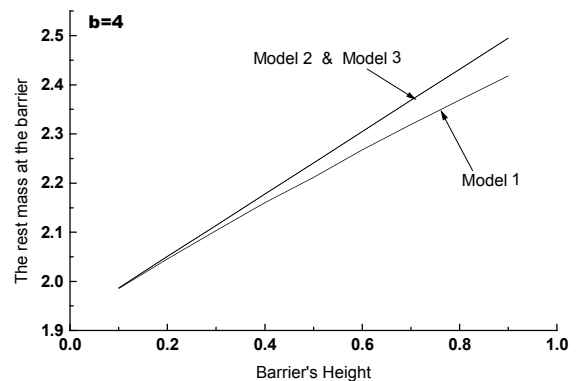
شکل ۱: پتانسیل سد چگونه که توسط سالیتون دیده می‌شود.

اختلاف در تشخیص ارتفاع منجر به تفاوت در سرعت بحرانی عبور در شرایط یکسان می‌شود. شکل ۲ این تفاوت در سرعت بحرانی را برای سه مدل نشان می‌دهد.



شکل ۲: سرعت بحرانی عبور برحسب ارتفاع

تغییرات انرژی سکون سالیتون در بالای سد بر حسب ارتفاعهای مختلف سد در مدل‌های معرفی شده، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همانطور که شکل ۳ نشان می‌دهد، رفتار مدل ۲ بسیار به رفتار مدل ۳ نزدیک است. البته به اندازه مدل ۱ نیز تحلیلی است.

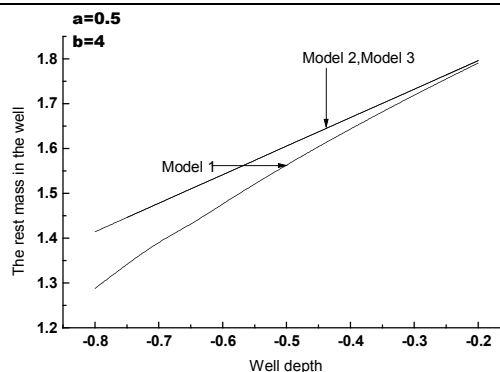


شکل ۳: انرژی سکون سالیتون در بالای سد در ارتفاعهای مختلف

سه مدل در بر گیرنده راههای مختلف بررسی برهمکنش پتانسیل با جوابهای سالیتری مدل ϕ^4 ارائه شده است و خصوصیات پراکندگی سالیتهونا از موانع در چنین مدلهایی بررسی شده اند. در مدل اول و دوم پتانسیل به کمک تعریف متریکهای مناسب به سیستم اضافه می گردد. مدل دوم تقریب بهتری از مدل اول بوده و در نتیجه پتانسیل را با تقریب بهتری تعریف کرده است. در مدل سوم مانع به صورت پارامتری که در پتانسیل ضرب می شود، در لاگرانژی معادله حرکت گنجانده شده است. در واقع می توان پراکندگی سالیتهون از سد پتانسیل را یک برخورد الاستیک در نظر گرفت. با این حال هنگامیکه به جزئیات پرداخته می شود، تفاوتی مشاهده می شوند. سالیتهون در مدل ۲ و ۳ ارتفاع سد پتانسیل را به یک اندازه می بیند، ولی در مدل ۱ با ارتفاع کمتری آنرا تشخیص می دهد. همچنین انرژی سکون سالیتهون در بالای سد پتانسیل برای مدل ۲ و ۳ بیشتر از مدل ۱ است. این باعث می شود که سالیتهون مدل ۱ انرژی آزاد بیشتری داشته باشد و بنابراین اتلاف انرژی در آن بیشتر باشد. در پراکندگی از چاه نیز وضعیت تقریباً مشابه است. برهمکنش سالیتهون-چاه پتانسیل، یک برخورد غیر الاستیک است. در این مورد هم، مدل ۲ و ۳ شباهت زیادی با یکدیگر دارند. بررسی دینامیک سالیتهونها از طریق تغییرمتریکی روش قدرتمندتری است. زیرا امکان بررسی دقیق تری از دینامیک و چگونگی تحول زمانی سالیتهون به روش نیمه تحلیلی را هم فراهم می آورد. با توجه به این مطلب، می توان دریافت که ارائه مدل ۲ از اهمیت ویژه ای برخوردار است. البته موارد دیگری باید بررسی شوند تا به این نتیجه کلی برسیم. به عنوان مثال بررسی پراکندگی سالیتهونهای مدلها دیگر به وسیله این مدل باید انجام گردد. همچنین بررسی اشکال مختلف پتانسیل مخصوصاً پتانسیلهائی مثل تابع δ را با استفاده از این مدل ضروری می دانیم و معتقدیم نتایج آن در نتیجه گیری کلی موثر است.

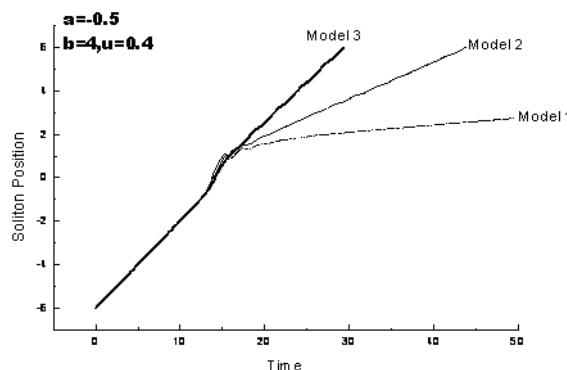
فهرست منابع:

- [1] Beata J. Dabrowska, Elena A. Ostrovskaya, Yuri S. Kivshar, Interaction of matter-wave gap solitons in optical lattices, (2004) J. Opt. B 6, 423-427
 [2] V. L. Kalashnikov, D. O. Krimer, I. G. Poloyko, Soliton Generation and Picosecond Collapse in Solid-State Lasers with Semiconductor Saturable Absorber, (2000) Jour. Opt. Soc. Am. B 17 519-523



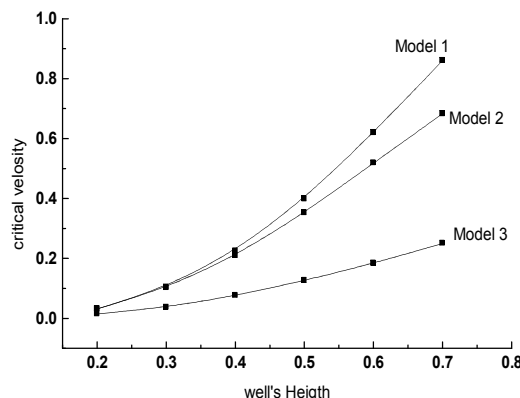
شکل ۵: جرم سکون سالیتهون بر حسب عمق چاه

با توجه به شکل ۵، مدل ۲ و ۳ جرم سکون بیشتری را برای سالیتهون در در چاه پیس بینی می کنند. به عبارت دیگر، سالیتهون در مدل ۲ و ۳ انرژی «آزاد» کمتری دارد و بنابراین کمتر تابش می کند. شکل ۶ با توجه به این شکل می توان گفت که کاهش انرژی در مدل ۲ و ۳ کمتر از مدل ۱ است.



شکل ۶: مسیر حرکت سالیتهون در سه مدل

شکل ۷ سرعت بحرانی عبور سالیتهون از چاه جاذب با ارتفاعهای مختلف را نشان می دهد.



شکل ۷: سرعت بحرانی عبور سالیتهون از یک چاه بر حسب ارتفاع

همانطور که ملاحظه می شود با کاهش عمق چاه سرعت بحرانی نیز کاهش می یابد.

نتیجه گیری:



- [3] Z. Fei, Yu.S. Kivshar, and L. Vazquez, Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model, Phys. Rev. A **45**, 6019-6030 (1992)
- [4] Z. Fei, Y. S. Kivshar and L. Vazquez, Resonant kink-impurity interactions in the ϕ^4 model, Phys. Rev. A **46**, 5214 (1992).
- [5] Kalbermann G, Soliton interacting as a particle, (1999) Phys. Lett A **252** 37-42
- [6] Kalbermann G, A model for soliton trapping in a well, (2001) Chaos, Soliton and Fractals **12** 2381-2385
- [7] Kalbermann G, Trapping of a model-system for a soliton in a well, (2007). arxiv:math-ph/99/20/2
- [8] Kalbermann G, Decay to bound state of a soliton in a well, (2001) Chaos, Soliton and Fractals **12** 625-629
- [9] B. Piette, W.J. Zakrzewski and J. Brand, J. Phys. Scattering of topological solitons on holes and barriers A **38**, 10403-10412 (2005)
- [10] B.M.A.G. Piette and W.J. Zakrzewski, Scattering of Sine-Gordon kinks on potential wells, preprint to appear in J. Phys. A (2007)
- [11] : Jassem H. Al-Alawi, Wojtek J. Zakrzewski, Scattering of Topological Solitons on Barriers and Holes in Two lambda phi^4 Models, arXiv hep-th:0706.1014(2007)
- [12] Kurosh Javidan, J.Phys.A Interaction of topological solitons with defects:using a nontrivial metric,A **39** 10565-10574 (2006)
- [13] R. Rajaraman, Solitons and instantons, (North-Holland, Amsterdam,(1985).
- [14] H. P. Robertson and T. W. Noonan, General Relativity, Saunders physics books, section 9.8, 1968.

