

دمای گذار بوز- اینشتین در فراتر از حد توماس- فرمی

جمال‌زاده، هدیه؛ زمردیان، محمد ابراهیم؛ شاه‌طهماسبی، ناصر

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

چکیده

اثر برهمکنش‌های جاذبه و دافعه را برای گاز سرد و رقیق را بررسی کرده و با به کارگیری تعداد ذرات بیشتر برای پتانسیل شیمیایی حد جدیدی یافت شده است. با جایگذاری پتانسیل شیمیایی جدیدی که به دست آورده‌ایم، ضریب وارد شده از برهمکنش‌های دافعه در محاسبه‌ی دمای بحرانی را تصحیح کرده‌ایم.

Bose –Einstein Condensation in Harmonic Oscillator Potential

Jamalzadeh, Hediye; Zomorodoyan, Mohamad Ibrahim; Shah Tahmasbi, Naser

Department of physics, Ferdowsi university of Mashhad

Abstract

We have introduced the effect of attractive and repulsive interactions for dilute and cold gases, and then by using more particles, we have found a new limit for chemical potential. Then we introduce a limit to arrive interactions in thermodynamics relations. Finally we make a correction to the condensation ratio in terms of critical temperature.

PACS NO: 5

مقدمه

کسری از ذرات که در پایین‌ترین حالت انرژی قرار دارند کسر چگالیده نامیده می‌شود. متراکم شده بوز- اینشتین مجموعه ذرات در تکانه‌ی صفر است. تعداد ذرات آن $N_0 = N - N_{ex}$ از طریق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود.

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (1)$$

دمای گذار برای تعداد ذرات محدود در مقایسه با دمای گذار در حد ترمودینامیکی کاهش می‌یابد

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0} \right)^3 - \frac{3\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} \left(\frac{T}{T_c^0} \right)^2 N^{-1/3} \quad (2)$$

با وجود برهمکنش‌ها، اگر پتانسیل برهمکنش بین اتمی (ناشی از برهمکنش‌های دوتایی) باشد. رهیافت میدان میانگین به‌منظور غلبه بر مشکلاتی که در حل دقیق معادله شرودینگر سیستم برهمکنشی بس- ذره‌ای کامل وجود دارد. میدان متوسط گازهای بوزونی رقیق، توسط

بوغولیابف^۱ در سال ۱۹۴۷ فرمول‌بندی شد [۴]

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) + \delta\hat{\Psi}(\vec{r}, t), \quad (3)$$

تابع مختلط $\phi(\vec{r}, t)$ با مقدار چشمداشتی عملگر میدان، $\phi(\vec{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle$ ، تعریف می‌شود. چگالی چگالیده با $n_0 = |\phi(\vec{r}, t)|^2$ داده می‌شود. در این صورت عملگر میدان دقیقاً برابر با میدان کلاسیکی $\phi(\vec{r}, t)$ (پارامتر نظم) است و سیستم رفتار کلاسیکی دارد. برای یافتن معادله‌ای برای تابع موج چگالیده تحول زمانی عملگر میدان را در نمایش هایزنبرگ می‌نویسیم [۵]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \quad (4)$$

برای گاز رقیق و سرد، می‌توانیم عملگر میدان $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ را به میدان

^۱Bogoliubov



این به عنوان تقریب توماس-فرمی^۲ شناخته می‌شود و برای ناحیه‌ای که طرف راست عبارت بالا مثبت باشد و نمونه‌هایی که بیش از 10^5 اتم دارند درست است (چون مقدار نوعی $|a|/a_{ho}$ در آزمایشات از مرتبه 10^3 است). مضمون تقریب توماس-فرمی آن است که، انرژی لازم برای اضافه کردن یک ذره به ابر، در هر جایی یکسان است و با مجموع انرژی پتانسیل و برهمکنش برابر است.

با انتگرال‌گیری از $n(\vec{r})$ در داخل کره‌ی واحد، و به‌کارگیری شرط بهنجارش برای پتانسیل هماهنگ با مقیاس کردن طول‌ها با شعاع نقطه‌ی بازگشت داریم

$$N = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{2\mu}{m\omega_{ho}^2} \right)^{2/3} \frac{\mu}{g} \Rightarrow \mu = \frac{\hbar\omega_{ho}}{2} \left(\frac{15Na}{a_{ho}} \right)^{2/5} \quad (10)$$

فراتر از نظریه‌ی میدان میانگین

نتایج ارائه شده تا کنون برای سیستم رقیق، $n|a|^3 \ll 1$ ، برقرار است. در اینجا بحث را در مورد برهمکنش‌های دافعه‌ای و N بزرگ محدود می‌کنیم، که در این حد می‌توان از بیان توماس-فرمی به جای معادله‌ی پایای گراس-پیتایوسکی استفاده کرد [۷، ۸، ۹]. با داشتن رابطه‌ی $\mu = \partial E / \partial N$ ، و با توجه به (۱۷)، انرژی سیستم با $E/N = 5\mu_{TF}/7$ ، که μ_{TF} پتانسیل شیمیایی TF است، داده می‌شود. برای N بزرگ رفتار چگالی تراز پایه را می‌توان از تقریب چگالی موضعی برای پتانسیل شیمیایی استفاده کرد [۴]

$$\mu = \mu_{local}[n(\vec{r})] + V_{ext}(\vec{r}). \quad (11)$$

$$\mu_{local}(n) = gn \left[1 + \frac{32}{3\pi} (na^3)^{1/2} \right], \quad (12)$$

از بیان بالا می‌توان معادله‌ی GP را با برهمکنش‌ها حل کرد:

$$n(\vec{r}) = g^{-1} [\mu - V_{ext}(\vec{r})] - \frac{4m^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} [\mu - V_{ext}(\vec{r})]^{3/2}, \quad (13)$$

$$\mu = \mu_{TF} (1 + \sqrt{\pi a^3 n(0)}). \quad (14)$$

$$E = \frac{5}{7} N \mu_{TF} (1 + \frac{7}{8} \sqrt{\pi a^3 n(0)}), \quad (15)$$

این کمیت برحسب پارامترهای مرتبط با سیستم بیان می‌شود

کلاسیکی $\phi(\vec{r}, t)$ تغییر می‌دهیم، و تنها برخوردهای دوتایی را در نظر می‌گیریم که با یک پارامتر، که طول پراکندگی موج- s است، بیان می‌شود [۶]. این مستقل از جزئیات پتانسیل دو ذره‌ای است؛ یعنی طول پراکندگی موج s ، خیلی کوچکتر از فاصله‌ی متوسط بین اتمی است و تعداد ذرات در حالت چگالیده زیاد است. بنابراین، پتانسیل برهمکنش، با ثابت جفت‌شدگی g که تابع طول پراکندگی a است را به شکل ساده‌ی زیر می‌نویسیم

$$V(\vec{r}' - \vec{r}) = g\delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (5)$$

با جایگذاری این پتانسیل و میدان کلاسیکی در (4)، به‌دست می‌آوریم

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + g|\phi(\vec{r}, t)|^2 \right) \phi(\vec{r}, t). \quad (6)$$

این معادله، به عنوان معادله‌ی گراس-پیتایوسکی^۳ (GP)، شناخته می‌شود. با تخمین E_{int} در تراز پایه‌ی نوسانگر هماهنگ به صورت $gN\bar{n}$ ، که چگالی متوسط از مرتبه‌ی N/a_{ho}^3 است، در نتیجه، $E_{int} \propto N^2 |a|/a_{ho}^3$ است. از طرف دیگر، انرژی جنبشی از مرتبه‌ی $N\hbar\omega_{ho}$ است و بنابراین $E_{kin} \propto Na_{ho}^{-2}$ است. [۴]

$$\frac{E_{int}}{E_{kin}} \propto \frac{N|a|}{a_{ho}}, \quad a_{ho} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{ho}} \right)^{1/2} \quad (7)$$

این پارامتری است که قدرت برهمکنش اتم-اتم را در مقایسه با انرژی جنبشی نشان می‌دهد.

در موردی که اتم‌ها با برهمکنش دافعه‌ای ($a > 0$)، دارای حد $I/R^3 \gg Na/a_{ho}$ هستند. سهم انرژی برهمکنش به صورت I/R^3 است که کمینه‌ی انرژی کل را به مقادیر بزرگتر R جابجا می‌کند. در نتیجه، برای مقادیر بیشتر Na ، انرژی جنبشی اهمیت کمتری دارد. فشار کوانتومی برای ابرهای به اندازه‌ی کافی بزرگ قابل چشم‌پوشی است و معادله‌ی GP به شکل زیر در می‌آید

$$\left[V(r) + g|\psi(r)|^2 \right] \psi(r) = \mu\psi(r). \quad (8)$$

$$n(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| = |\mu - V(\vec{r})|/g. \quad (9)$$

^۲ Thomas - Fermi

^۳ Gross- Pitaevskii



از تصویر نیمه کلاسیکی برای تعداد ذرات گرمایی می‌توان نوشت

$$N_T = \int \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \exp\left[\frac{p^2}{2m} + V_{eff}(\vec{r}) - \mu\right] / k_B T \right\}^{-1} \quad (23)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی بالا، با استفاده از تقریب TF برای

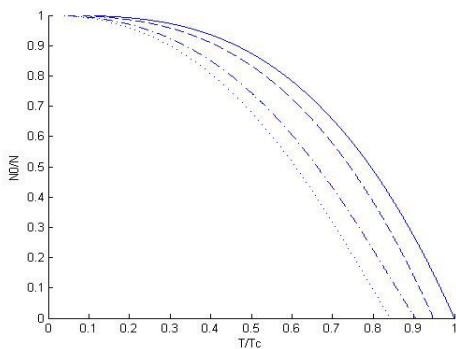
$$\text{پتانسیل میدان میانگین موثر } |V_{ext}(\vec{r}) - \mu| = V_{eff}(\vec{r}) - \mu, \text{ داریم}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - t^3 - \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \eta t^3 (1 - t^3)^{2/5}, \quad (24)$$

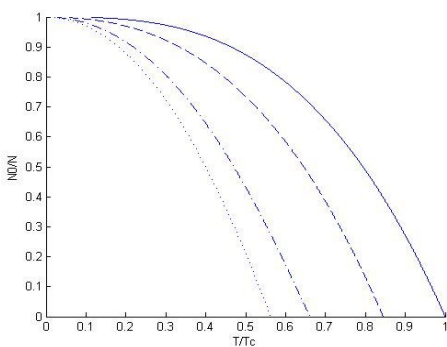
معادله‌ی بالا را در مقایسه با حد ترمودینامیکی و حد تعداد ذرات

محدود در تله‌ی پتانسیل نوسانگر هماهنگ (شکل (۱)) و در

پتانسیل نوسانگر ناهمسانگرد (شکل (۲)) رسم کرده‌ایم.



شکل ۱: تغییرات کسر چگالیده بر حسب T/T_c برای ذرات غیر برهمکنشی با $N=2000$ و $\eta=0$ (خط پیوسته)، تعداد ذرات محدود برای $N=2000$ و $\eta=0$ (خط چین)، ذرات برهمکنشی با $\eta=0.4$ (خط و نقطه)، و ذرات برهمکنشی با $\eta=0.6$ (نقطه چین) در پتانسیل نوسانگر هماهنگ رسم شده است.



شکل ۲: مشابه نمودار (۱) برای ذرات بوزونی در پتانسیل نوسانگر غیرهماهنگ 2000 اتم رویدیم، در تله‌ای با $\lambda = \sqrt{8}$.

$$a^3 n(0) = \frac{15^{2/5}}{6\pi} \left(N^{1/6} \frac{a}{a_{ho}} \right)^{12/5}. \quad (16)$$

با مقایسه‌ی E_{int}/N ، یا به‌طور معادل μ ، با انرژی گرمایی؛ اگر $k_B T < \mu$ ، اثرات مهم برهمکنش‌ها در رفتار ترمودینامیکی ناشی از آن انتظار می‌رود. یک پارامتر مفید نسبت بین پتانسیل شیمیایی محاسبه شده در دمای صفر در تقریب توماس-فرمی و دمای بحرانی برای ذرات غیر برهمکنشی در همان تله است:

$$\eta = \frac{\mu}{k_B T_c^0} = \alpha \left(N^{1/6} \frac{a}{a_{ho}} \right)^{2/5}. \quad (17)$$

در اینجا $\alpha = 15^{2/5} [\zeta(3)]^{1/3} / 2 \cong 1.57$ یک ضریب عددی است. اگر این مقادیر نوعی را برای پارامترهای آزمایش‌های در جریان استفاده کنیم، تغییرات η بین 0.35 تا 0.40 می‌شود. بنابراین اثرات برهمکنش نیز در مقادیری از T از مرتبه‌ی T_c^0 مشاهده خواهند شد.

برای یافتن چگالی چگالیده و در نتیجه دمای بحرانی با استفاده از نظریه‌ی هارتری-فوک (HF)، با در نظر گرفتن بوزون‌های غیر برهمکنشی در میدان میانگین خود شمول‌شان داریم

$$H_{HF} = \frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V_{eff}(\vec{r}) = \frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V_{ext} + 2gn(\vec{r}) \quad (18)$$

که $n(\vec{r})$ مجموع چگالی‌های مولفه‌های چگالیده و گرمایی است. چگالی گرمایی سیستم با فرمول‌بندی گاز ایده‌آل، داده می‌شود:

$$n_T(\vec{r}) = \lambda_T^{-3} g_{3/2} \left(e^{-[V_{eff}(\vec{r}) - \mu] / k_B T} \right) \quad (19)$$

چگالش بوز-اینشتین در دمایی شروع می‌شود که

$$N = \int d\vec{r} n_T(\vec{r}, T_c, \mu_c). \quad (20)$$

با بسط سمت راست معادله‌ی بالا در اطراف $\mu_c = 0$ و $T_c = T_c^0$ نتیجه‌ی زیر برای انتقال از دمای بحرانی به‌دست می‌آید.

$$\frac{\delta T_c^0}{T_c^0} = -1.3 \frac{a}{a_{ho}} N^{1/6} = -0.45 \eta^{5/2}. \quad (21)$$

سپس با استفاده از چگالی توماس-فرمی (TF) می‌توانیم پتانسیل شیمیایی را برآورد کنیم [۴]

$$\frac{\mu(N_0, T)}{k_B T_c^0} \cong \frac{\mu(N, T=0)}{k_B T_c^0} \left(\frac{N_0}{N} \right)^{2/5} = \eta (1 - t^3)^{2/5}. \quad (22)$$



انتظار می‌رود با تصحیحات جدیدتر در پتانسیل شیمیایی و با استفاده از تقریب‌های دقیق‌تر برای استفاده از میدان میانگین و در نتیجه معادله‌ی گراس-پیتایوسکی به عنوان مثال، به‌کارگیری پتانسیل‌ها و میدان‌های دقیق‌تر، بدون استفاده از تقریب میدان میانگین، مستقیماً از انرژی آزاد لاندائو استفاده شود و دمای بحرانی را نزدیک‌تر به دمای مشاهده شده برای آزمایش‌های در جریان بیابیم.

مراجع

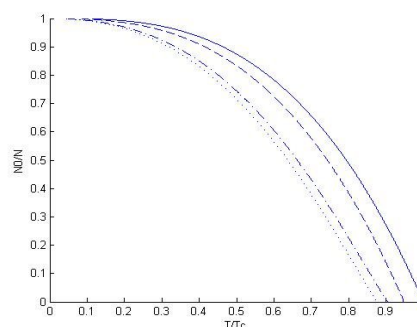
- [1] W. Ketterle, and N. J. van Druten, Bose-Einstein Condensation of a Finite Number of Particles in One or Three Dimensions, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
- [2] K. Kirsten, and D. J. Toms, Bose-Einstein Condensation of Atomic Gases in a General Harmonic-Oscillator Confining Potential Trap, *Phys. Rev. A* **54**, 4188 (1996).
- [3] H. Haugerud, T. Haugest, and F. Ravndal, A More Accurate Analysis of a Bose-Einstein Condensation in the Harmonic Traps, *Phys. Lett A* **225**, 18 (1997).
- [4] F. Dalfovo, Giorgini, Lev. P. Pitavskii, and S. Stringari, Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999)
- [5] K. Huang *Statistical Mechanics*, Wiley, New York (1987).
- [6] P. A. Ruprecht, M. J. Holland, and K. Burnett, Very Cold Indeed: The Nanokelvin Physics of Bose-Einstein Condensation, *Phys. Rev. A* **51**, 4704 (1995).
- [7] G. Baym, and C. J. Pethick, Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Einstein Condensation Rubidium Gas, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 16 (1996).
- [8] E. Lundh, C. J. Pethick, and H. Smith, Zero – Temperature Properties of a Trapped Bose – Condensed Gas: Beyond the Thomas – Fermi Approximation, *Phys. Rev. A* **55**, 2126 (1997)
- [9] F. Dalfovo, L. Pitaevskii, and S. Stringari, Order Parameter at Boundary of Trapped Bose Gas, *Phys. Rev. A* **54**, 4213 (1996).

نتیجه‌گیری

معادله‌ی (۲۴) را برای حد توماس-فرمی به‌دست می‌آوریم، با حذف شرط $\eta|a|^3 \ll 1$ که برای سیستم رقیق است، و با جایگزینی معادله‌ی (۱۶) در (۱۴) و به‌دست آوردن η ، توسط معادله‌ی (۱۷) می‌توانیم کسر چگالیده را برای حد فراتر از نظریه‌ی میدان متوسط نیز به‌دست آوریم:

$$\eta \approx (\alpha + \alpha') (N^{1/6} \frac{a}{a_{ho}})^{2/5} \approx 2.1964982 (N^{1/6} \frac{a}{a_{ho}})^{2/5} \quad (25)$$

که در آن $\alpha' = 0.6264982$ است. در نتیجه با افزودن α' به η به‌دست آمده از معادله‌ی (۱۷)، تغییرات η را در محدوده‌ی 0.4896652 تا 0.5596174 به‌دست می‌آوریم. با رسم نمودار کسر چگالیده برحسب دما در شکل (۳)، دمای بحرانی را برای این تصحیح را به‌دست آوریم که منحنی نقطه‌چین نشان دهنده‌ی این حد جدید است. در نتیجه ملاحظه می‌کنیم با افزایش η ، نمودار از دمای بحرانی مشاهده شده در آزمایشگاه دورتر شده است. با این وجود، عدم اطمینان آزمایشگاهی هنوز خیلی بیشتر از ارائه‌ی یک نتیجه‌ی تعریف شده است.



شکل ۳: نمودار کسر چگالیده برحسب دما برای حد سیستم غیر رقیق در $\eta = 0.5$ (نقطه چین)، در مقایسه با حد ترمودینامیکی (خط پیوسته)، حد ذرات محدود (خط چین) و $\eta = 0.4$ (خط و نقطه) در پتانسیل نوسانگر هماهنگ نشان داده شده است.

