

بررسی و حل تحلیلی ارتعاشات چسبندگی-لغزش به روش خطی سازی

علی نصرتی^۱، انوشیروان فرشیدیان فر^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد؛ Ali_nti@yahoo.com

^۲ دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد؛ farshid@ferdowsi.um.ac.ir

چکیده

ارتعاشات چسبندگی-لغزش^۱، ارتعاشات خودمحرک غیرخطی است که در سیستم های دینامیکی مانند ماشین ابزار باعث تولید صدا و ناهمواری سطح قطعه می شود. مدل جرم روی تسمه متحرک^۲ با یک درجه آزادی برای توصیف ارتعاش ناشی از اصطکاک با فرمول اصطکاک که بیانگر اول کاهش و سپس افزایش نیروی اصطکاک نسبت به سرعت نسبی بین دو سطح می باشد، در نظر گرفته شده است. در این مقاله جهت کنترل دقیقتر این ارتعاشات حل تحلیلی دقیقتری به روش خطی سازی^۳ ارائه شده است. ابتدا معادلات مربوط به مدل ارتعاشی سیستم استخراج شده و سپس به روش خطی سازی عبارتی تحلیلی برای پاسخ مکانی جرم و حداکثر دامنه ارتعاشات در دو حالت لغزش خالص^۴ و چسبندگی-لغزش ارائه شده است. برای بررسی صحت روابط بدست آمده، جواب های حاصل از مثال عددی با نتایج تحلیل عددی و تحلیلی پرتوربیشن سایر محققین مقایسه شده است. نتایج حاصله نشان می دهد که تحلیل ارائه شده از دقت بالاتری نسبت به تحلیل های پیچیده تر دیگر پژوهشگرها برخوردار می باشد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات چسبندگی-لغزش، اصطکاک، خطی سازی

۱- مقدمه

وقتی سرعت نسبی بین دو جسم تغییر می کند ضریب اصطکاک مابین دو جسم نیز تغییر می کند و این تغییر ضریب اصطکاک باعث ایجاد ارتعاشات خودمحرک مانند ارتعاشات چسبندگی-لغزش در سیستم می شود. در بیشتر سیستم های دینامیکی که شامل اصطکاک خشک بین سطوح می باشد، در سرعت های کم نمودار نیرو-سرعت دارای شیب منفی است. شیب منفی را دمپینگ منفی در نظر گرفته می شود که در نوسانات تا زمانی که بالانسی بین تولید و اتلاف انرژی بدست آید موجب افزایش دامنه نوسان می شود [۱]. ارتعاشات چسبندگی-لغزش دارای دو فاز هستند، فاز چسبندگی که هیچ لغزشی بین قسمت ها نیست و نیروی اصطکاک محدود به نیروی اصطکاک ایستایی می شود و فاز لغزش که نیروی اصطکاک کمتری نسبت به نیروی ایستایی دارد.

ارتعاشات چسبندگی-لغزش در زندگی روزمره خیلی اتفاق می افتد و دارای ضررها و فایده هایی است که به برخی از آنها اشاره می شود: وقتی در راه می رویم یا گچی روی تخته می کشیم صدایی تولید می شود که به اسکوئل^۵ معروف است که ناشی از این ارتعاشات می باشد. چرخ قطار را مثل گوه توخالی و ریل را به صورت T شکل می سازند تا سطح اصطکاک ما بین آن دو افزایش یابد و باعث شود با اینکه قطار اکسل ثابتی دارد، در سر پیچ ها با سرعت عبور کند. این افزایش سطح اصطکاک باعث می شود در چرخ ها ارتعاشات خودمحرک رخ دهد و اسکوئل و نوسان به کوبه برسد. وقتی که ترمز گرفته می شود این ارتعاشات باعث تولید حرارت و صدا در آن می شود. یکی از موارد حائز اهمیت این پدیده در ماشین ابزارها مطرح می شود، که به صورت ارتعاش و اسکوئل در سیستم ایجاد شده و باعث گرم شدن قطعه و ابزار می شود. می توان گفت بدترین اثری که این پدیده روی قطعه می گذارد، ناصافی سطحی است. وقتی آرشه را روی سیم های ویولن می کشیم می توان یکی از فایده های این ارتعاش را مشاهده کرد و شنید. این پدیده در بخش های مختلفی از علوم همانند زمین شناسی، مکانیک سیالات و جامدات مورد استفاده و بررسی قرار گرفته است.

قدیمی ترین فرمول اصطکاک را لونارد داوینچی (۱۴۵۲-۱۵۱۹) ارائه کرد، او بیان کرد که نسبتی بین نیروی عمودی و نیروی اصطکاک است. Amontons در سال ۱۶۹۹ و Coulomb در سال ۱۷۸۵ به اصطکاک جنبشی رسیدند ولی اصطکاک ایستایی و جنبشی را یکسان می دانستند. آنها برای سرعت صفر، نیروی اصطکاک را در نظر نگرفته بودند و بیان کردند که نیروی اصطکاک می تواند صفر یا مقداری کمتر از جنبشی داشته باشد. Stiction در سال ۱۸۳۳ اصطکاک ایستایی را بیان کرد و برای سرعت صفر نیروی اصطکاک را تابعی از نیروی خارجی در نظر گرفت.

در سالهای بعد مشاهده شد که در بیشتر سیستم های دینامیکی وقتی سرعت نسبی بین دو سطح از صفر شروع به افزایش می کند پس از یک سرعت خاص که سرعت حداقل v_m گفته می شود ضریب اصطکاک دوباره افزایش می یابد. Panovko و همکارش [۲] نشان دادند سیستمی که دارای اصطکاک است در سرعت حداقل v_m دارای حداقل ضریب اصطکاک است و فقط زمانی ارتعاشات خودمحرک رخ می دهد که سرعت سیستم کمتر از این باشد و همچنین اثبات کردند زمانی نوسانات خودمحرک پایدار در سیستم

^۱ Stick-slip vibrations

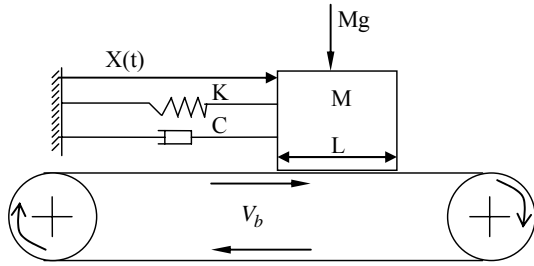
^۲ mass-on-moving-belt

^۳ linearization method

^۴ Pure-slip vibrations

^۵ Squeal

رخ می دهد که سیستم غیر خطی باشد. Feeny [۳] و Oden [۴] مروری وسیع بر تاریخچه اصطکاک خشک و پدیده چسبندگی-لغزش ارائه کردند.



شکل ۱: مدل ارتعاشات چسبندگی-لغزش با یک درجه آزادی

روی تسمه ای با سرعت ثابت V_b قرار دارد. این جرم در زمان t دارای موقعیت $X(t)$ از محور ثابت می باشد و در معرض نیروی جاذبه Mg ، نیروی فنر خطی KX ، نیروی دمپینگ CdX/dt و نیروی اصطکاک $Mg\mu(V_r)$ می باشد که در آن μ تابعی از سرعت نسبی بین جرم و تسمه است. معادلات حرکت سیستم را با توجه به شکل (۱) می توان به صورت زیر نوشت:

$$M\ddot{X} + KX + C\dot{X} + Mg\mu(V_r) = 0 \quad \text{for } \dot{X} \neq V_b \quad (\text{slip}) \quad (1)$$

$$\ddot{X} = 0, KX + C\dot{X} \leq Mg\mu_s \quad \text{for } \dot{X} = V_b \quad (\text{stick}) \quad (2)$$

که در آن،

$$V_r = \frac{dX}{dt} - V_b \quad (3)$$

اگر تغییر متغیرهای زیر برای بدون بعد کردن معادله حرکت در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned} \tau = \omega_0 t & \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M} & \quad x = \frac{X}{L} \\ v_b = \frac{V_b}{\omega_0 L} & \quad 2\beta = \frac{C}{\sqrt{KM}} & \quad \gamma^2 = \frac{g/L}{K/M} \end{aligned} \quad (4)$$

معادلات (۱) و (۲) به صورت زیر در می آیند:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + x + \gamma^2\mu(\dot{x} - v_b) = 0 \quad \text{for } \dot{x} \neq v_b \quad (5)$$

$$x + 2\beta v_b \leq \gamma^2\mu_s \quad \text{for } \dot{x} = v_b \quad (6)$$

که در آن γ^2 نسبت نیروی گرانش به نیروی فنر و β نسبت دمپینگ (حقیقی به بحرانی) را بیان می کند.

شکل (۲) تغییر ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی را نمایش می دهد. μ_s ضریب اصطکاک جسم قبل از آنکه لغزشی در سیستم رخ دهد می باشد. در یک سرعت خاص بعد از اینکه در سیستم لغزش صورت گرفت ضریب اصطکاک به حداقل خود می-رسد که آن سرعت را v_m و ضریب اصطکاک جنبشی را μ_m نامگذاری می کنند. تابع $\mu(v_r)$ را Panovko و Gubanova [۲] و Ibrahim [۸] به صورت زیر تخمین زده اند:

$$\mu(v_r) = \mu_s \operatorname{sgn}(v_r) - \frac{3}{2}(\mu_s - \mu_m) \left(\frac{v_r}{v_m} - \frac{1}{3} \left(\frac{v_r}{v_m} \right)^3 \right) \quad (7)$$

همانطور که در شکل (۲) دیده می شود، $|\mu| \leq \mu_s$ زمانی ظاهر

می شود که جسم روی تسمه متحرک ثابت است (فاز چسبندگی و $v_r = 0$) و هنگامیکه جسم شروع به لغزش می کند نیروی اصطکاک با افزایش سرعت کاهش می یابد (فاز لغزش و $v_r \neq 0$). برای سطوح

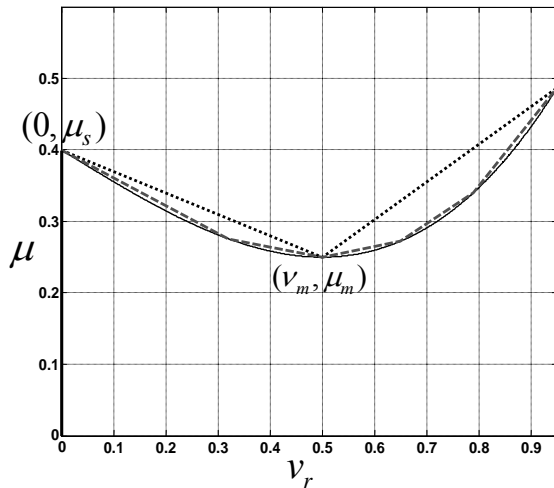
اولین بار پدیده اسکول که وابسته به پدیده چسبندگی-لغزش است در سال ۱۹۶۴ ارائه شد [۷]. تحلیل های مختلفی از اسکول در سیستم های دینامیکی ارائه شده است [۹و۸]، که از آنجمله McMillan [۱۰] با در نظر گرفتن هیستریزس تحلیلی عددی برای این ارتعاشات و پدیده اسکول ارائه کرد.

حل های تحلیلی و عددی و آزمایشگاهی زیادی برای بدست آوردن دامنه و فرکانس این ارتعاشات انجام شده است. Tondl [۱۱] و Mitropolskii [۱۲] ارتعاشات خودمحرک را در مدل جرم-روی-تسمه توضیح دادند و دامنه ارتعاش را در زمانی که چسبندگی بین جرم و تسمه نیست تخمین زدند. Sakamoto [۱۳] منحنی های چسبندگی-لغزش را در فاز لغزش به روش آزمایشگاهی با در نظر گرفتن جابجایی عمودی بدست آورد. Elmer [۱۴] ارتعاشات چسبندگی-لغزش و لغزش خالص سیستم جرم روی تسمه متحرک بدون دمپر و توابع مختلف اصطکاک مورد بررسی قرار داد و برای حالت سطوح روغن کاری شده، منحنی جابجایی-سرعت را به روش انتگرال عددی بدست آورد. Thomsen [۱۵] به روش پرتوربیشن فرمولی برای نوسانات چسبندگی-لغزش سیستم هایی که تفاوت خیلی کمی بین اصطکاک جنبشی و ایستایی در اصطکاک لغزنده است ارائه کرد و نشان داد که اگر تحریک خارجی با فرکانس بالا و دامنه کم به سیستم وارد شود، دامنه این ارتعاشات کاهش می یابد.

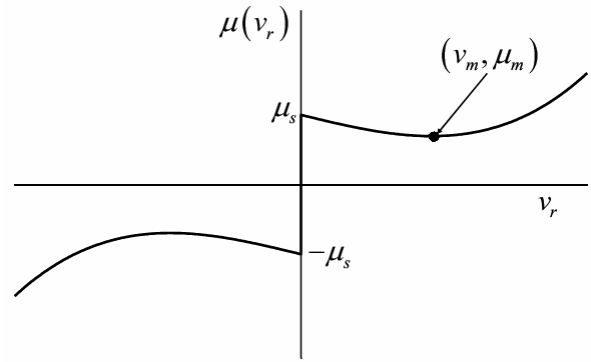
Thomsen و Fidlín [۱۶] فرمولی دقیقتر به روش پرتوربیشن برای دامنه این ارتعاشات ارائه کردند. در این مقاله ابتدا مدل دینامیکی و معادله های حاکم بر سیستم ارائه می گردد، سپس معادله حرکت سیستم به روش خطی سازی تحلیل گردیده و در انتها برای بررسی صحت نتایج بدست آمده، نتایج حاصل با نتایج تحلیل عددی و تحلیل پرتوربیشن سایر محققین مقایسه می شود.

۲- مدل ارتعاشات چسبندگی-لغزش و معادلات آن

مدل های مختلفی برای ارتعاشات چسبندگی-لغزش در نظر گرفته شده است، مدل یک بعدی با یک درجه آزادی جرم-روی-تسمه متحرک همانند شکل (۱) مرسوم ترین مدل گسسته ای است که برای ارتعاشات چسبندگی-لغزش در نظر گرفته می شود [۹]. جرم M با مشخصه طولی L بوسیله فنر و دمپر به محوری ثابت متصل است و



شکل ۳: تقریب منحنی ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی با ۲ خط ۵، (.....)، و پارامترهای ثابت
 $\mu_s = 0.4, \mu_m = 0.25, v_m = 0.5$



شکل ۲: تغییر ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی لغزنده [۲].

روغنکاری شده منحنی نیروی اصطکاک-سرعت شبیه به این منحنی توسط Stribeck در سال ۱۹۰۲ ارائه شد که به منحنی استریبک^۱ معروف است.

۳- تحلیل معادله حرکت

از آنجائیکه معادله دیفرانسیل حرکت غیر خطی می باشد، پاسخ دقیقی برای این مسئله وجود ندارد و معمولاً از انتگرال عددی و روش پرتوریشن استفاده می کنند. در این مقاله از روش تبدیل معادله دیفرانسیل غیر خطی به معادله ای جزء به جزء خطی استفاده شده است. به این منظور تابع اصطکاک درجه ۳ را به فرم زیر تبدیل می-کنیم:

$$\mu(v_r) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad (۸)$$

$$\mu_n = \mu_{0n} \operatorname{sgn}(\dot{x} - v_b) + k_{1n}[(\dot{x} - v_b) + v_{r0n}]$$

در آن k_1 شیب، μ_0 عرض از مبدأ و v_{r0} طول از مبدأ هر خط است، شکل (۳) نمونه ای از تقریب ۲ و ۵ خطی برای سیستمی با پارامترهای $\mu_s = 0.4, \mu_m = 0.25, v_m = 0.5$ می باشد. از معادله (۸) و (۵) نتیجه می شود،

$$\ddot{x}_n + k_{2n}\dot{x}_n + x_n = k_{3n} \quad (۹)$$

که در آن:

$$k_{2n} = 2\beta + \gamma^2 k_{1n} \quad (۱۰)$$

$$k_{3n} = \gamma^2[-\mu_{0n} \operatorname{sgn}(v_m) + k_{1n}(v_b - v_{r0n})]$$

در ادامه تحلیل معادلات (۶) و (۹) با تقریب ۲ خطی در دو حالت ارتعاشات لغزش خالص که همیشه $\dot{x} < v_b$ و ارتعاشات چسبندگی-لغزش که $\dot{x} \leq v_b$ و جسم به طور متناوب به تسمه می-چسبد، ارائه می گردد.

۳-۱- ارتعاشات لغزش خالص

با فرض نبودن هیستریزیس در سیستم همیشه سرعت جسم کمتر از تسمه است، در نتیجه،

$$k_{3n} = \gamma^2[\mu_{0n} + k_{1n}(v_b - v_{r0n})] \quad n = 1, 2 \quad (۱۱)$$

بنابراین معادله (۹) تبدیل به یک معادله دیفرانسیل خطی می شود. برای خط اول با فرض شرایط اولیه $x_1(t_1) = \alpha_{11}$ و $\dot{x}_1(t_1) = \alpha_{21}$ پاسخ

آن به صورت زیر می باشد،

$$x_1 = e^{-\frac{k_{21}t}{2}} [A_1 \cos(k_{41}t) + B_1 \sin(k_{41}t)] + k_{31}, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (۱۲)$$

$$\dot{x}_1 = e^{-\frac{k_{21}t}{2}} [C_1 \cos(k_{41}t) + D_1 \sin(k_{41}t)] \quad t \in [t_1, t_2] \quad (۱۳)$$

که در آن:

$$A_1 = \frac{-e^{-\frac{k_{21}t_1}{2}}}{k_{41}} \left\{ \left[(\alpha_{11} - k_{31}) \frac{k_{21}}{2} + \alpha_{21} \right] \sin(k_{41}t_1) - k_{41}(\alpha_{11} - k_{31}) \cos(k_{41}t_1) \right\}$$

$$B_1 = \frac{e^{-\frac{k_{21}t_1}{2}}}{k_{41}} \left\{ \left[(\alpha_{11} - k_{31}) \frac{k_{21}}{2} + \alpha_{21} \right] \cos(k_{41}t_1) - k_{41}(\alpha_{11} - k_{31}) \sin(k_{41}t_1) \right\} \quad (۱۴)$$

$$k_{41} = \sqrt{1 - \frac{k_{21}^2}{4}},$$

$$C_1 = -\frac{k_{21}}{2} A_1 + B_1 k_{41},$$

$$D_1 = -\frac{k_{21}}{2} B_1 - A_1 k_{41}$$

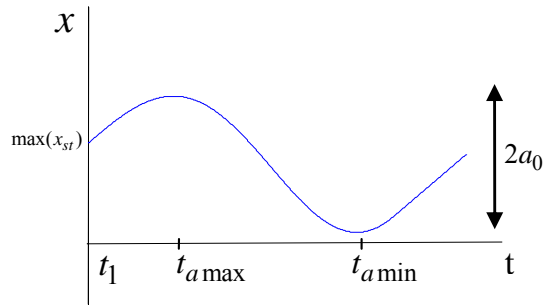
از پاسخ معادله $\dot{x}_1 = v_m$ بدست آورده می شود. شرایط اولیه خط و معادله دوم $x_2(t_2) = x_1(t_2)$ و $\dot{x}_2(t_2) = \dot{x}_1(t_2)$ می باشد و پاسخ آن به صورت زیر است:

$$x_2 = e^{-\frac{k_{22}t}{2}} [A_2 \cos(k_{42}t) + B_2 \sin(k_{42}t)] + k_{32}, \quad t \in [t_2, t_3] \quad (۱۵)$$

$$\dot{x}_2 = e^{-\frac{k_{22}t}{2}} [C_2 \cos(k_{42}t) + D_2 \sin(k_{42}t)] \quad t \in [t_2, t_3] \quad (۱۶)$$

که در آن:

^۱ Stribeck curve



شکل ۴: جابجایی x و سرعت \dot{x} نسبت به زمان در یک سیکل از ارتعاشات چسبندگی-لغزش.

زمانی که فاز چسبندگی شروع می شود t_3 می باشد و مقدار زمانی که فاز چسبندگی t_s طول می کشد برابر است با:

$$t_s = \frac{x_1(t_1) - x_2(t_3)}{v_b} \quad (26)$$

بنابراین معادله جابجایی در فاز چسبندگی:

$$x_{st}(t) = v_b t \quad t \in [t_3, t_3 + t_s] \quad (27)$$

$$\dot{x}_{st}(t) = v_b \quad t \in [t_3, t_3 + t_s] \quad (28)$$

و پاسخ کلی سیستم در هر سیکل به صورت زیر خواهد بود،

$$x(t) = x_{st}(t_1 : t_3) + x_{st}(t_3 : t_3 + t_s) \quad (29)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{st}(t_1 : t_3) + \dot{x}_{st}(t_3 : t_3 + t_s) \quad (30)$$

زمان حداکثر جابجایی در هر سیکل از معادله $\dot{x}_1 = 0$ بدست می آید که برابر است با:

$$t_{a \max} = \frac{\arctan\left(\frac{C_1}{D_1}\right)}{k_{41}} \quad (31)$$

برای حداقل جابجایی دو حالت وجود دارد، اگر $t_{a \max} + \pi$ از t_2 کمتر شود زمان حداقل جابجایی $t_{a \min} = t_{a \max} + \pi$ می باشد و اگر بیشتر باشد در معادله خط دوم رخ می دهد و

$$t_{a \min} = \frac{\arctan\left(\frac{C_2}{D_2}\right)}{k_{42}} \quad (32)$$

بنابراین با فرض اینکه حداقل جابجایی در معادله خط دوم رخ دهد، حداکثر دامنه ارتعاشات چسبندگی-لغزش a_0 عبارت است از،

$$a_0 = \frac{1}{2} [x_1(t_{a \max}) - x_2(t_{a \min})] \quad (33)$$

برای تقریب با خط های بیشتر نیز به همین صورت می توان روابط لازم را استخراج نمود.

$$A_2 = \frac{-e^{\frac{k_{22} t_2}{2}}}{k_{42}} \left\{ \left[(\alpha_{12} - k_{32}) \frac{k_{22}}{2} + \alpha_{22} \right] \sin(k_{42} t_2) - k_{42} (\alpha_{12} - k_{32}) \cos(k_{42} t_2) \right\}$$

$$B_1 = \frac{e^{\frac{k_{22} t_2}{2}}}{k_{42}} \left\{ \left[(\alpha_{12} - k_{32}) \frac{k_{22}}{2} + \alpha_{22} \right] \cos(k_{42} t_2) - k_{42} (\alpha_{12} - k_{32}) \sin(k_{42} t_2) \right\} \quad (17)$$

$$k_{42} = \sqrt{1 - \frac{k_{22}^2}{4}}$$

$$C_2 = -\frac{k_{22}}{2} A_2 + B_2 k_{42}$$

$$D_2 = -\frac{k_{22}}{2} B_2 - A_2 k_{42}$$

t_3 نیز مانند معادله قبل از پاسخ $\dot{x}_2 = v_m$ بدست می آید. این روند برای هر سیکل دوباره تکرار می شود، در نتیجه پاسخ کلی سیستم:

$$x(t) = x_1(t_1 : t_2) + x_2(t_2 : t_3) + \dots \quad (18)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t_1 : t_2) + \dot{x}_2(t_2 : t_3) + \dots \quad (19)$$

برای بدست آوردن دامنه هر سیکل می توان از شرط $\dot{x}_1 = 0$ استفاده نمود، در نتیجه زمان حداکثر و حداقل جابجایی که به ترتیب در سیکل اول و دوم قرار دارد برابر است با:

$$t_{a \min} = \frac{\arctan\left(\frac{C_1}{D_1}\right)}{k_{41}} \quad (20)$$

$$t_{a \max} = \pi + \frac{\arctan\left(\frac{C_1}{D_1}\right)}{k_{41}} \quad (21)$$

و حداکثر دامنه در ارتعاشات لغزش خالص:

$$a_1 = \frac{1}{2} [x_{1,2}(t_{a \max}) - x_1(t_{a \min})] \quad (22)$$

$x_{1,2}$ معرف معادله جابجایی خط اول در سیکل دوم می باشد.

۳-۲- ارتعاشات چسبندگی-لغزش

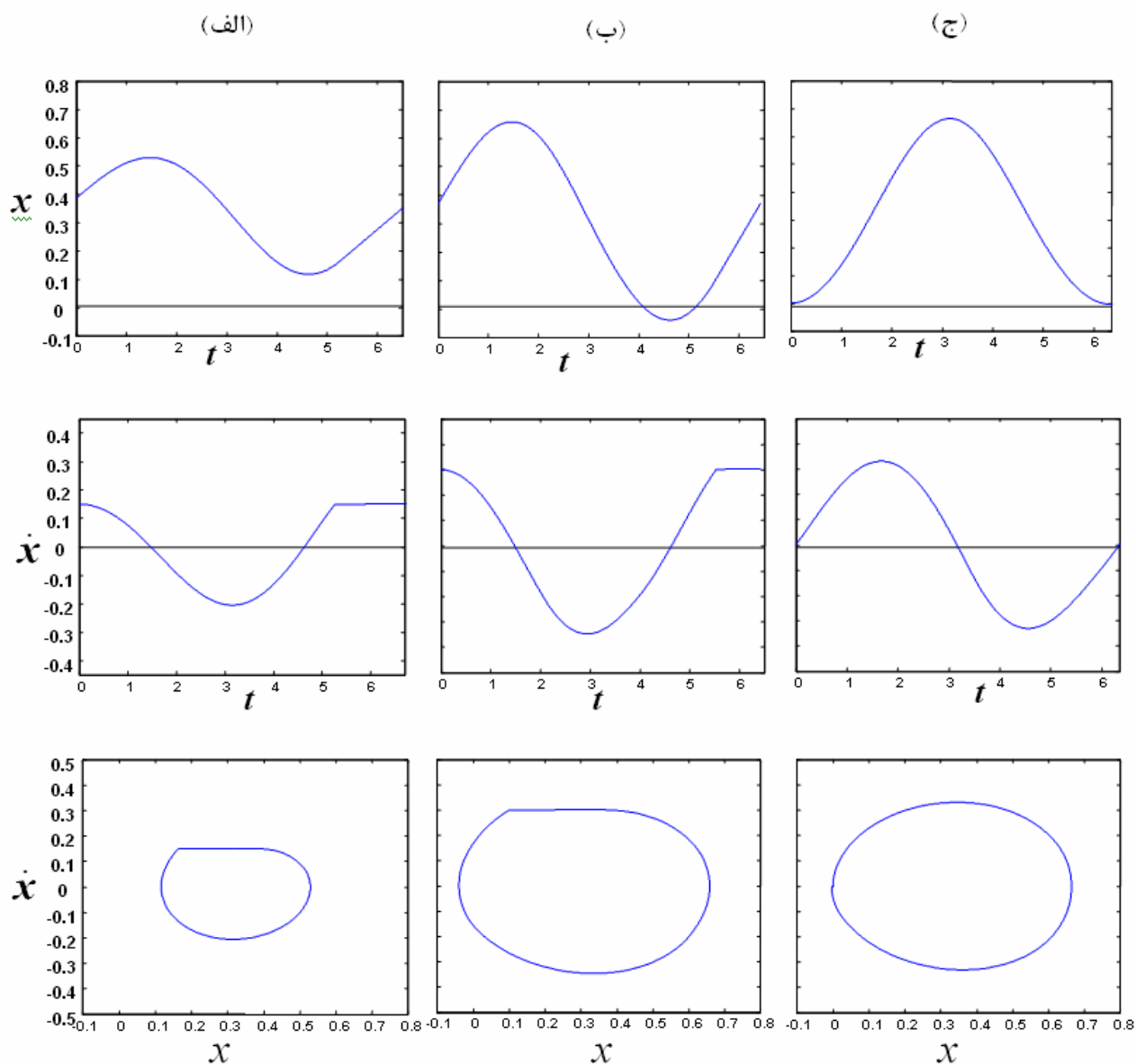
شکل (۴) یک سیکل از این ارتعاش را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود در این حالت ۲ فاز وجود دارد یکی وقتی جسم بطور متناوب به تسمه می چسبد ($\dot{x} = v_b$) و فاز دیگر که جسم روی تسمه می لغزد که همیشه $\dot{x} < v_b$ می باشد. حداکثر دامنه چسبندگی ($\max(x_{st})$) از معادله (۶) بدست می آید، در نتیجه:

$$\max(x_{st}) = \gamma^2 \mu_s - 2\beta v_b \quad (23)$$

فاز لغزش از زمانی آغاز می شود که فاز چسبندگی تمام شده است و جسم شروع به لغزیدن می کند، بنابراین مقادیر اولیه معادله لغزش در هر سیکل $\dot{x}_1(t_1) = v_b$ و $x_1(t_1) = \max(x_{st})$ خواهد بود. t_2 از پاسخ معادله $\dot{x}_1 = v_m$ و t_3 از معادله $\dot{x}_2 = v_b$ بدست آورده می شود. ادامه تحلیل فاز لغزش مانند بخش قبلی می باشد و پاسخ مکانی جرم در فاز لغزش x_{st} عبارت است از:

$$x_{st}(t) = x_1(t_1 : t_2) + x_2(t_2 : t_3) \quad t \in [t_1, t_3] \quad (24)$$

$$\dot{x}_{st}(t) = \dot{x}_1(t_1 : t_2) + \dot{x}_2(t_2 : t_3) \quad t \in [t_1, t_3] \quad (25)$$



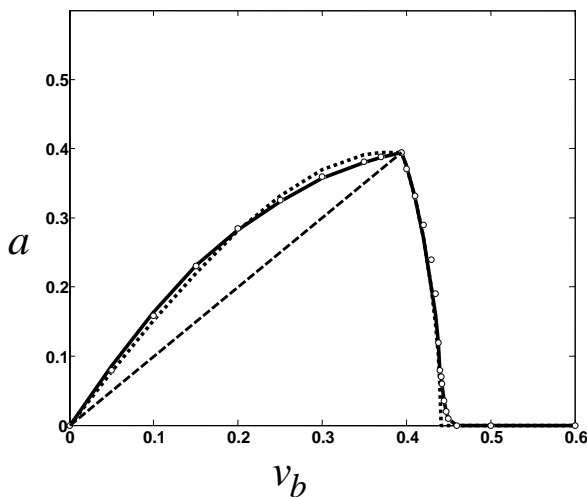
شکل ۵: جابجایی-زمان (ردیف اول)، سرعت-زمان (ردیف وسط) و جابجایی-سرعت (ردیف پایین) برای یک سیکل ارتعاشات پایدار چسبندگی-لغزش سیستم با ۳ سرعت تحریک مختلف، (الف) $v_b = 0.15$ ، (ب) $v_b = 0.3$ و (ج) $v_b = 0.41$.

۴- مثال عددی و بررسی صحت نتایج

سیستمی با شرایط اولیه $\alpha_1 = \alpha_2 = t_1 = 0$ و پارامترهای ثابت $\gamma^2 = 1, \beta = 0.05, \mu_s = 0.4, \mu_m = 0.25, v_m = 0.5$ نسبت به سرعت های مختلف تحریک منحنی های لازم بدست آورده شده است. شکل (۳) تغییر ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی را بر اساس مقادیر ارائه شده نمایش می دهد، که برای تحلیل، این منحنی با ۲ و ۵ خط تقریب زده شده است.

شکل (۵) جابجایی-زمان، سرعت-زمان و جابجایی-سرعت برای یک سیکل ارتعاشات پایدار چسبندگی-لغزش سیستم را نمایش می دهد که تخمین تحلیلی برای جابجایی و سرعت، $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ ، از روابط (۱۸) و (۱۹) برای ارتعاشات لغزش خالص و روابط (۲۹) و (۳۰) برای ارتعاشات چسبندگی-لغزش استفاده شده است. هر ستون از شکل ها پاسخ برای یک سرعت تحریک تسمه v_b را نمایش می دهد و بقیه پارامترها یکسان می باشد. سرعت تحریک تسمه از مقدار

صفر هر چقدر بیشتر می شود دامنه نوسان چسبندگی-لغزش افزایش می یابد، ولی از سهم فاز چسبندگی نسبت به فاز لغزش در دامنه ارتعاش کاهش می یابد، همانطور که در ستون دوم دیده می شود با افزایش سرعت تحریک دامنه ارتعاش چسبندگی-لغزش نسبت به ستون اول تقریباً ۲ برابر شده است و سهم فاز چسبندگی نیز به همان نسبت کاهش می یابد. فاز چسبندگی با افزایش سرعت کاهش می یابد و زمانی که صفر شود ارتعاشات چسبندگی-لغزش به ارتعاشات لغزش خالص تبدیل می شود که در ستون سوم یک نمونه از این ارتعاشات دیده می شود. برای بدست آوردن سرعتی که ارتعاشات لغزش خالص شروع می شود (v_{b0}) از معادله (۲۵) و شرط اینکه معادله $\dot{x}_{sl} = v_b$ دارای جواب نباشد استفاده شده که در این صورت $v_{b0} = 0.396$ خواهد شد. همانطور که در شکل (۶) برای سرعت تحریک $v_b = 0.5$ مشاهده می شود با افزایش بیشتر سرعت تحریک دامنه ارتعاشات کاهش می یابد و از یک سرعتی بیشتر دیگر



شکل ۸: تغییر حداکثر دامنه نوسان جسم نسبت به سرعت تسمه با $\mu_s - \mu_m = 0.15$. شیبه سازی عددی، (○) تحلیل با تقریب ۵ خط، (---) حل تحلیلی از مرجع [۱۶] و (---) حل تحلیلی از مرجع [۱۵].

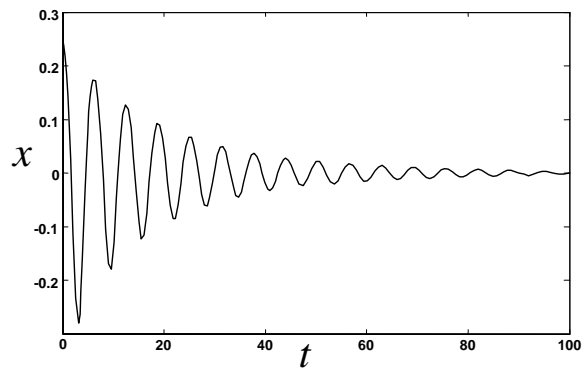
ایستایی و حداقل ضریب اصطکاک جنبشی ($\mu_s - \mu_m$) مقداری کم باشد و به کمک تبدیل ون-در-پل^۱ معادله دیفرانسیل حرکت را به فرم استاندارد تبدیل نمود، سپس با روش میانگین گیری^۲ دامنه ارتعاشات را بدست آورد. Thomsen و همکارش Fidlin [۱۶] برای ارتعاشات لغزش خالص از همان روش میانگین گیری استفاده کردند و برای ارتعاشات چسبندگی-لغزش، فاز لغزش و چسبندگی را بطور جداگانه تحلیل نمودند، جابجایی در فاز لغزش را به روش پرتوربیشن و در فاز چسبندگی به صورت خطی نسبت به زمان بدست آوردند.

در شکل (۸) نتایج حاصل از تقریب ۵ خطی با نتایج بدست آمده توسط Thomsen [۱۵]، Thomsen و Fidlin [۱۶] و حل عددی شیبه سازی، مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می-شود در $\mu_s - \mu_m = 0.15$ تحلیل به روش خطی سازی در ناحیه چسبندگی-لغزش از مرجع [۱۵] دقیقتر و تقریباً با مرجع [۱۶] برابر می باشد. همانطور که در شکل (۹) نیز مشاهده می شود زمانی که مقدار تفاضل $\mu_s - \mu_m$ بیشتر می شود ($\mu_s = 0.4, \mu_m = 0.1$) دقت روش آنها خیلی کاهش می یابد، در صورتیکه روش تحلیلی ارائه شده از دقت بالاتری برخوردار می باشد.

۴-نتایج کلی

مدل جرم روی تسمه متحرک با یک درجه آزادی برای توصیف ارتعاش ناشی از اصطکاک با فرمول اصطکاکی که بیانگر اول کاهش و سپس افزایش نیروی اصطکاک نسبت به سرعت نسبی بین دو سطح می باشد، در نظر گرفته شد. معادله دیفرانسیل غیرخطی حرکت را به کمک روش خطی سازی به معادله خطی تبدیل نموده و

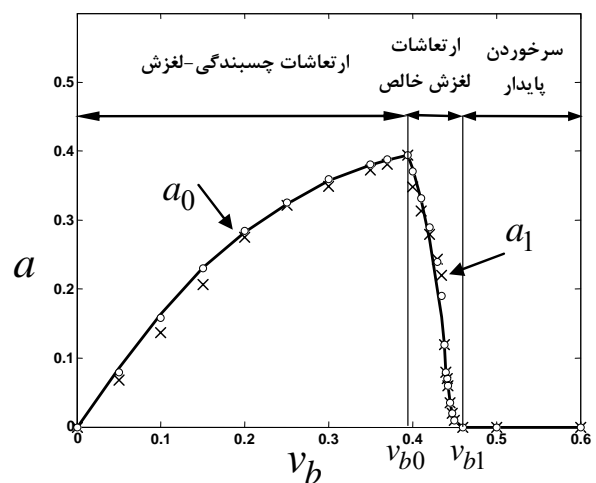
^۱ Van-Der-Pol transformation
^۲ Averaging method



شکل ۶: پاسخ سیستم به سرعت تحریک $v_b = 0.5$.

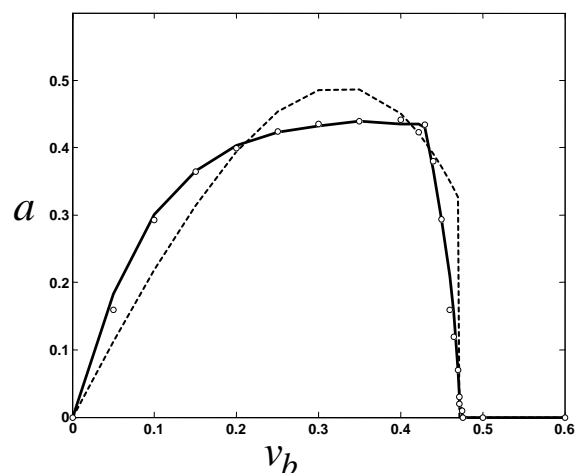
هیچگونه ارتعاشی در سیستم نداریم و نوسانات سیستم میرا می-شود.

شکل (۷) حداکثر دامنه نوسان a_0 و a_1 که بترتیب برای حالت چسبندگی-لغزش و لغزش خالص می باشد را بر اساس روابط (۳۳) و (۲۲) نسبت به سرعت های مختلف تسمه در دو حالت تقریب ۲ و ۵ خطی نمایش می دهد. در این شکل نتایج حاصل از این پژوهش و تحلیل های عددی شیبه سازی، مقایسه شده اند. با توجه به شکل هر چقدر تعداد خط های تقریب بیشتر می شود نتیجه دقیقتر می-شود بطوریکه در حالت ۵ خطی تفاوت ناچیزی بین حل عددی و تحلیلی وجود دارد و دقت بالای این روش را می رساند. در این شکل ۳ ناحیه از هم جدا شده است، ناحیه اول ارتعاشات چسبندگی-لغزش که با افزایش سرعت تحریک حداکثر دامنه نیز افزایش می یابد، حداکثر دامنه در سرعت $v_{b0} = 0.396$ به حداکثر خودش می رسد. بعد از این سرعت، ناحیه دوم ارتعاشات لغزش خالص است که با افزایش سرعت حداکثر دامنه ارتعاش کاهش می یابد و تقریباً بعد از سرعت $v_{b1} = 0.45$ که ناحیه سوم شروع می شود ارتعاشی در سیستم نداریم. در ناحیه سوم سرخوردن پایدار، جسم در جای خود ساکن می شود و تسمه در زیر آن با سرعت ثابت حرکت می کند. Thomsen [۱۵] با فرض اینکه تفاضل ضریب اصطکاک



شکل ۷: تغییر حداکثر دامنه نوسان جسم نسبت به سرعت تسمه با $\mu_s - \mu_m = 0.15$. شیبه سازی عددی، (×) تحلیل با تقریب ۲ خط، (○) تحلیل با تقریب ۵ خط.

- [3]- Feeny, B., and Guran, A., and Hinrichs, N., and Popp, K., "A historical review on dry friction and stick-slip phenomena," *Asme Appl. Mech. Rev.*, vol. 51(5), pp. 321-341, 1998.
- [4]- Oden, J. T., and Martins, J. A. C., "Models and computational methods for dynamic friction phenomena," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 52, pp. 527-634, 1985.
- [5]- Hunt, J. B., and Torbe, I., and Spencer, G. C., "The phase-plane analysis of Sliding motion," *Wear*, Vol. 8, pp. 455-465, 1965.
- [6]- Bilkay, O., and Anlagan, O., "Computer simulation of stick-slip motion in machine tool slideways," *Tribology International*, vol. 37, pp. 347-351, 2004.
- [7]- Bowden, F. P., and Tabor, D., *The friction and lubrication of solids*, Oxford University Press, 1964.
- [8]- Ibrahim, R. A., "Friction-induced vibration, chatter, Squeal, and chaos part II: dynamics and modeling," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 47, pp. 227-253, 1994.
- [9]- Popp, K., and Stelzer, P., "Stick-slip vibrations and chaos," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 332, pp. 89-105, 1990.
- [10]- McMillan, A. J., "A non-linear friction model for self-excited vibrations," *J. Sound and Vibration*, vol. 205(3), pp. 323-335, 1997.
- [11]- Tondl, A., *Quenching of Self-Excited Vibrations*, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [12]- Mitropolskii, Y.A., and Nguyen, V. D., *Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [13]- Sakamoto, T., "Normal displacement and dynamic friction characteristics in a stick-slip process," *Tribology International*, vol. 20, pp. 25-31, 1987.
- [14]- Elmer, F. J., "Nonlinear dynamics of dry friction," *J. Phys., A-Math, General*, Vol. 30, pp. 6057-6063, 1997.
- [15]- Thomsen, J. J., "Using fast vibrations to quench friction-induced oscillations," *J. Sound Vibration*, vol. 228(5), pp. 1079-1102, 1999.
- [16]- Thomsen, J. J., and Fidlin, A., "Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes," *J. Non-Linear Mechanics*, vol. 38, pp. 389-403, 2003.



شکل ۹: تغییر دامنه نوسان نسبت به سرعت تسمه با $\mu_s - \mu_m = 0.3$.
 (—) شبیه سازی عددی، (○) تحلیل با خط ۵ و (---) حل تحلیلی از مرجع [۱۶].

سپس برای موقعیت های مخلف جرم و دامنه این ارتعاشات عبارت تحلیلی دقیقتری تخمین زده شد.

با تغییر سرعت تحریک تسمه v_b سه محدوده در سیستم ایجاد شد، ۱- محدوده ارتعاشات چسبندگی-لغزش که سرعت تسمه $v_b \leq v_{b0}$ می باشد و جسم بطور متناوب به تسمه می چسبد، در این محدوده با افزایش سرعت دامنه این ارتعاشات افزایش می یابد. ۲- ناحیه ارتعاشات لغزش خالص که سرعت تسمه در محدوده $v_{b0} < v_b \leq v_{b1}$ قرار دارد، با افزایش سرعت در این منطقه از دامنه ارتعاش کاسته می شود. ۳- اگر سرعت تسمه $v_b > v_{b1}$ باشد نوسانات سیستم دمپ می شود، جرم در نقطه ای ساکن و تسمه با سرعت ثابت از زیر آن می گذرد، از سرعت v_{b1} بیشتر را محدوده سرخوردن پایدار می نامند.

مثالی عددی با تقریب ۲ و ۵ خطی ارائه شد و با حل عددی شبیه سازی و روابط تحلیلی مرجع های [۱۵] و [۱۶] مقایسه انجام گرفت. همانطور که مشاهده شد با افزایش تعداد خط تقریبی دقت این روش افزایش می یابد و در حالت تقریب با ۵ خط نتایج از دقت بالاتری نسبت به روش ارائه شده Thomsen برخوردار است، بطوریکه اگر تفاضل $\mu_s - \mu_m$ بیشتر شود و به 0.3 برسد دقت جواب آن خیلی کاهش می یابد.

همانطور که بررسی شد این روش حتی با تقریب تعداد کم ۵ خط بر خلاف روش های تحلیلی دیگر پژوهشگرها که پیچیده هستند، از دقت بالاتری برخوردار می باشد و می توان از آن در کنترل دقیقتر سیستم های دینامیکی استفاده کرد.

مراجع

- [1]- Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.
- [2]- Panovko, Y. G., and Gubanov, I. I., *Stability and Oscillations of Elastic Systems; Paradoxes, Fallacies and New Concepts*, Consultants Bureau, New York, 1965.