# اندیشهٔ آماری

**سال دوازدهم، شماره دوم**
**تاریخ انتشار: پاییز و زمستان ۱۳۸٦**
**شماره پیاپی: ۲٤**

**صاحب امتیاز:** انجمن آمار ایران
**مدیر مسئول:** محمدقاسم وحیدی‌اصل
**سردبیر:** رحیم چینی‌پرداز





- براساس نامهٔ شماره ۳/۲۹۱۰/۱۳۷۴ مورخ ۱۳۷۹/۱۱/۸ کمیسیون بررسی نشریات علمی کشور درجهٔ علمی – ترویجی به نشریات آماری اعطاء شده است.

- **دبیرخانه مجله:** منیره گودرزی، لیلا روستا، زینب قلیزاده، زهرا ماجدی، محمد رضا یگانگی.
- **چاپ:** چاپخانه دانشگاه شهید چمران اهواز

# نامساوی هافدینگ برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی و برخی کاربردهای آن

محمد امینی [1]

چکیده:

در این مقاله ، نامساوی هافدینگ را برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم داده می‌شود، سپس در رابطه با شرایط برقراری همگرایی کامل با استفاده از این نامساوی نتایج جالبی را بدست می‌آوریم. در ادامه، یک نامساوی گشتاوری و بازه اطمینان برای میانگین جامعه با توزیع دلخواه را ارائه می‌نماییم، علاوه بر این نشان می‌دهیم این بازه اطمینان کوتاه‌تر از بازه اطمینان مجانبی میانگین جامعه است.

**واژه‌های کلیدی:** نامساوی هافدینگ، متغیرهای تصادفی وابسته منفی، همگرایی کامل، نامساوی گشتاوری، بازه اطمینان.

## ۱ مقدمه

نامساوی‌های نمایی در احتمال، به ویژه در قضایای حدی نقش کلیدی دارند، یکی از این نامساوی‌ها که اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط هافدینگ برای متغیرهای تصادفی به طور یکنواخت کراندار ارائه شد، نامساوی معروف هافدینگ است. آماردانان بسیاری روی این نامساوی تحقیق کردند، و نتایج جالبی نیز بدست آورده‌اند. سرفلینگ در [۵ و ٦] نتایج جالبی برای چندک‌ها و مجموع جزئی متغیرهای تصادفی در نمونه گیری بدون جایگزینی از یک جامعه متناهی بدست آورد. امینی و بزرگ نیا [۱ و ۲] با استفاده از نامساوی هافدینگ، رفتار مجانبی چندک‌ها و قانون اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی به طور یکنواخت کراندار را بدست آوردند. در این مقاله، یک نسخه دیگر از نامساوی هافدینگ را برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی و کراندار بدست می آوریم، و سپس با استفاده از این نامساوی همگرایی کامل و شرایط برقراری آن برای مجموع جزئی این نوع متغیرهای تصادفی را بیان می‌نماییم. علاوه براین، به عنوان کاربردی از این نامساوی، یک نامساوی گشتاوری برای مجموع جزئی متغیرهای تصادفی وابسته منفی کراندار، و یک بازه اطمینان در سطح $\alpha-1$ برای میانگین یک جامعه آماری بدست می آوریم. تعریف‌ها و لم زیر را در بخش‌های بعدی نیاز داریم.

**تعریف ۱** متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را به طور منفی وابسته $(ND)$ نامند اگر برای اعداد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هر دو نامساوی زیر برقرار باشد.

$$P\left[\prod_{i=1}^{n}(X_i \leq x_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i), \qquad (1)$$

[1] گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

و

$$P\prod_{i=1}^{n}(X_i > x_i) \le \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i). \qquad (2)$$

**تعریف ۲** دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \ge 1\}$ را به طور کامل به متغیر تصادفی $X$ همگرا نامند اگر برای هر $\varepsilon > 0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon)$ همگرا باشد.

**لم ۱** ([۶]) فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی با $EX = \mu$ و $P[a < X < b] = 1$ $(a < b)$ باشد، آن گاه برای هر عدد حقیقی و نامنفی $h$،

$$E\left[e^{h(x-\mu)}\right] \le e^{\frac{h(b-a)^2}{8}}$$

و

$$E\left[e^{h|x-\mu|}\right] \le 2e^{\frac{h(b-a)^2}{8}}$$

## ۲ تعمیم نامساوی هافدینگ

در این بخش نامساوی هافدینگ را برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی کراندار تعمیم می‌دهیم. علاوه بر این برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی که الزاماً کراندار نیستند نیز یک نسخه از این نامساوی را به دست می‌آوریم.

**قضیه ۱** فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی وابسته منفی باشند و $P[a_k < X_k < b_k] = 1, \quad k = 1, 2, ..., n$. آنگاه برای هر $x > 0$،

$$P[S_n - ES_n \ge x] \le \exp(-\frac{2x^2}{A_n}) \qquad (3)$$

که در آن $A_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2$.

**اثبات:** قرار دهید، $Y_k = X_k - EX_K, \quad k = 1, 2, ..., n$ داریم $P[|Y_k| \le b_k - a_k] = 1$. اکنون از این که امید ریاضی حاصل‌ضرب متغیرهای تصادفی وابسته منفی که نامنفی هستند کوچکتر از حاصل‌ضرب امید ریاضی آنها می‌باشد و چون توابع یکنوا از متغیرهای تصادفی وابسته منفی نیز وابسته منفی هستند، برای هر $h > 0$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} E\left[e^{h(S_n - ES_n)}\right] &= E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{hY_k}\right] \le \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{hY_k}\right] \\ &\le \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{-\frac{h^2(b_k - a_k)^2}{8}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{h^2 A_n}{8}\right\}. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از نامساوی مارکوف داریم:

$$P[S_n - ES_n \ge x] \le \exp\left\{-hx + \frac{h^2 A_n}{8}\right\}$$

طرف راست نامساوی فوق به ازای $h = \frac{4x^2}{A_n}$ مینیمم می‌شود در نتیجه برای هر $x > 0$،

$$P[S_n - ES_n \ge x] \le \exp(-\frac{2x^2}{A_n}).$$

**نتیجه ۱** اگر شرایط قضیه ۱ برقرار باشد آن گاه برای هر $x > 0$،

$$P[|S_n - ES_n| \ge x] \le 2\exp(-\frac{2x^2}{A_n}) \qquad (4)$$

**نکته ۱** اگر $a_k = a, b_k = b, \forall k = 1, 2, \dots, n$ یعنی $X_1, X_2, \dots, X_n$ به طور یکنواخت کراندار باشند، آن گاه قضیه ۲ در [۱] بدست می‌آید. یعنی برای هر $x > 0$،

$$P[|S_n - ES_n| \ge x] \le 2\exp\left\{-\frac{2x^2}{n(b-a)^2}\right\} \qquad (5)$$

**نتیجه ۲** فرض کنید شرایط قضیه ۱ برقرار باشد.

الف — اگر برای هر $x = \varepsilon . n^{\beta}$، $\varepsilon > 0,\ \beta > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2n^{2\beta}.\varepsilon^2}{A_n}\right\} < \infty$ آن گاه همگرایی زیر به طور کامل برقرار است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - EX_k) = 0 \qquad (6)$$

ب — اگر $A_n = O(n^{\alpha})$ و $0 < \alpha < 2\beta$. آن گاه برای هر $\beta > 0$، داریم $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2n^{2\beta}.\varepsilon^2}{A_n}\right\} < \infty$ و در نتیجه (۶) برقرار است.

**قضیه ۲** اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی وابسته منفی با $E(X_n) = 0$ و $E(X_n^2) < \infty$ باشند، آن گاه برای هر $x > 0$،

$$P(|S_n| \ge x) \le 2\exp\left(-\frac{x^2}{2B_n \sum_{k=1}^{n} C_k^2}\right) \qquad (7)$$

که در آن $C_k = esssup\frac{|X_k|}{\sqrt{B_n}},\quad k = 1, 2, \dots, n$ و $B_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2$.

اثبات: قرار دهید، $Y_k = \frac{X_k}{\sqrt{B_n}},\quad k = 1, 2, \dots, n$ داریم $P[|Y_k| \le C_k] = 1$. پس بنا به قضیه ۱ برای هر $x > 0$

$$\begin{aligned} P[|S_n| > x] &= P\left[\frac{|S_n|}{\sqrt{B_n}} > \frac{x}{\sqrt{B_n}}\right] \\ &\le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n \sum_{k=1}^{n} C_k^2}\right\}. \end{aligned}$$

**نتیجه ۳** فرض کنید شرایط قضیه ۲ برقرار باشد.

الف — اگر برای هر $\varepsilon > 0,\ \beta > 0$، $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2n^{2\beta}.\varepsilon^2}{B_n \sum_{k=1}^{n} C_k^2}\right\} < \infty$ آن گاه همگرایی زیر به طور کامل برقرار است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} (X_k) = 0 \qquad (8)$$

ب — اگر $B_n \sum_{k=1}^{n} C_k^2 = O(n^{\alpha})$ و $0 < \alpha < 2\beta$، آن گاه برای هر $\beta > 0$، داریم $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2n^{2\beta}.\varepsilon^2}{B_n \sum_{k=1}^{n} C_k^2}\right\} < \infty$ و در نتیجه (۸) برقرار است.

## ۱.۲ یک نامساوی گشتاوری

قضیه زیر یک نامساوی گشتاوری مفید برای مجموع جزئی متغیرهای تصادفی وابسته منفی و کراندار ارائه می‌دهد.

**قضیه ۳** فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی وابسته منفی باشند و $P[a_k < X_k < b_k] = 1,\quad k = 1, 2, \dots, n$. آن گاه برای هر $r > 0$

$$E|S_n - ES_n|^r \le \frac{\Gamma(r/2 + 1)}{2^{r/2-1}} (A_n)^{r/2} \qquad (9)$$

اثبات: بنا به قضیه ۱ داریم،

$$\begin{aligned} E|S_n - ES_n|^r &= \int_0^{\infty} r x^{r-1} P[|S_n - ES_n| > x] dx \\ &\le 2r \int_0^{\infty} x^{r-1} \exp\left\{-\frac{2x^2}{A_n}\right\} \\ &= r\left(\frac{A_n}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \int_0^{\infty} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma(\frac{r}{2}+1)}{2^{\frac{r}{2}-1}} (A_n)^{\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

**نتیجه ۴** اگر $a_k = a, b_k = b, \forall k = 1,2,\ldots,n$ و $E(X_k) = \mu$ آن گاه برای هر $r > 0$

$$E|S_n - n\mu|^r \le \frac{\Gamma(r/2+1)}{2^{r/2-1}}(n)^{r/2}(b-a)^{r/2}$$

## ۳ بازه اطمینان برای میانگین جامعه

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی وابسته منفی باشند با $E(X_k) = \mu$ و $P[a_k < X_k < b_k] = 1$، $k = 1,2,\ldots,n$. آن گاه بنا به تبصره ۱ برای هر $r > 0$ داریم،

$$P[|S_n - n\mu| \le x] \ge 1 - 2\exp\left\{-\frac{2x^2}{n(b-a)^2}\right\}$$

اگر قرار دهیم $\alpha = 2\exp\left\{-\frac{2x^2}{n(b-a)^2}\right\}$ آن گاه یک بازه اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ برای $\mu$ عبارت است از،

$$(\bar{X} - \frac{u}{n},\ \bar{X} + \frac{u}{n}) \qquad (10)$$

که در آن $u = (b-a)\sqrt{\frac{n}{2}\ln(\frac{2}{\alpha})}$. از طرفی بنا به قضیه حد مرکزی، برای مقادیر به اندازه بزرگ $n$، یک بازه اطمینان تقریبی در سطح $(1-\alpha)$ برای $\mu$ عبارت است از،

$$(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{b-a}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{b-a}{\sqrt{n}}) \qquad (11)$$

با مقایسه دو بازه (۱۰) و (۱۱) مشاهده می‌شود که طول بازه تقریبی در سطح $(1-\alpha)$ همواره بزرگتر از طول بازه اطمینان بدست آمده از طریق نامساوی هافدینگ است.

### ۱.۳ مثال ها

**مثال ۱** اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی با توزیع توام دیرکله و تابع چگالی زیر باشند،

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \times (1 - \sum_{i=1}^n x_i)^{\alpha_0 - 1} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i - 1}$$

که در آن $\sum_{i=1}^n x_i \le 1, x_i \ge 0, \alpha \ge 0$. آن گاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ وابسته منفی هستند [۳] و برای هر $k = 1,2,\ldots,n$ داریم $P[a_k < X_k < b_k] = 1$. بنابراین $A_n = n$ و در نتیجه برای هر $\beta > \frac{1}{2}$، همگرایی زیر به طور کامل برقرار است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k) = 0$$

علاوه بر این یک بازه اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ برای $EX_k = \mu$ عبارت است از:

$$(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{\alpha})},\ \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{\alpha})})$$

**مثال ۲** اگر

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim Multi(m, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

آنگاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی وابسته منفی هستند [۴] و برای هر $k = 1,2,\ldots,n$ داریم $P[0 < X_k < m] = 1$. بنابراین $A_n = nm$ و در نتیجه برای هر $\beta > \frac{1}{2}$، همگرائی زیر به طور کامل برقرار است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k) = 0$$

**مثال ۳** فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه به روش بدون جایگزینی از جامعه متناهی با مقادیر $X_۱, X_۲, ..., X_n$ باشد. اگر $a = \min_{۱\le i\le n} X_i$ و $b = \max_{۱\le i\le n} X_i$ آنگاه متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, ..., X_n$ وابسته منفی هستند [۴] و برای هر $k = ۱, ۲, ..., n$ داریم $P[a < X_k < b] = ۱$. بنابراین $A_n = n(b-a)$ و در نتیجه برای هر $\beta > \frac{۱}{۲}$، همگرایی زیر به طور کامل برقرار است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^\beta} \sum_{k=۱}^{n} (X_k - EX_k) = ۰$$

علاوه بر این یک بازه اطمینان در سطح $(۱-\alpha)$ برای $EX_k = \mu$ عبارت است از:

$$\left[\bar{X} - \frac{(b-a)}{\sqrt{۲n}}\sqrt{\ln(\frac{۲}{\alpha})},\ \bar{X} + \frac{(b-a)}{\sqrt{۲n}}\sqrt{\ln(\frac{۲}{\alpha})}\right] \quad (۱۲)$$

**نکته ۲** سر فلینگ [۵] برای این مسئله یک کران بزرگتر به صورت زیر بدست آورد. برای هر $x > ۰$ و $f_n^* = \frac{n-۱}{N}$:

$$P[|S_n - ES_n| \ge x] \le ۲\exp(-\frac{۲x^۲}{n(b-a)^۲(۱-f_n^*)})$$

و سپس با استفاده از آن یک بازه اطمینان در سطح $(۱-\alpha)$ برای $\mu$ ساخت که طول این بازه از طول بازه (۱۲) بزرگتر است.

## مراجع

[1] Amini, M. and Bozorgnia, A. (2000), Negatively dependent bounded random variables probabilities inequalities and strong law of large numbers, *Journal of App. Math. Stoch. Analysis*, 13, 261-267.

[2] Amini, M. and Bozorgnia, A. (2000), The strong law of large numbers and asymptotic behavior of quantiles for ND random variables, *Problems in Applied Mathematics and Computational Intelligence*, ,57-60.

[3] Block, H.W., Savit, T.H. and Shaked, M. (1982), Some concepts of negative dependence, *The Annals of Probability*, 10, 765-773.

[4] Hoeffding, W. (1963), Probability inequalities for sums of bounded random variables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58, 13-30.

[5] Joag-Dev, K. and Proshan, F. (1983), Negative association random variables and thier applications, *The Annals of Statistics*, 11, 286-295.

[6] Serfling, R.J. (1974), Probability inequalities for the sum in sampling without replacment, *The Annals of Statistics*, 2, 39-48.

[7] Serfling, R.J. (1980), *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* John Wiley and Sons, New York.