چهلمین کنفرانس ریاضی کشور
40TH ANNUAL IRANIAN MATHEMATICS CONFERENCE
دانشگاه صنعتی شریف
Sharif University of Technology
انجمن ریاضی ایران
Iranian Mathematicsl Society
پذیرفته شده برای ارائه
موجود در http://aimc40.ir/node/260

روش عناصر متناهی برای حل مسأله کنترل بهینه مرزی

نوشین داودی　　اصغر کرایه چیان　　مرتضی گچ پزان
noosin2003@yahoo.com
دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی

ما در این مقاله یک روش برای حل یک نمونه مسأله کنترل بهینه غیر استاندارد که با معادلات دیفرانسیل معمولی همراهی می شود، ارائه می دهیم. با استفاده از روش عددی عناصر متناهی و تقریب گالرکین برای معادلات دیفرانسیل معمولی یک فرمول بندی مجدد بر روی مسأله انجام می گیرد. سپس با استفاده از اصل ماکزیمم مسأله کنترل بهینه را خطی می کنیم که در نتیجه مسأله کنترل با روش های برنامه ریزی خطی قابل حل خواهد بود.

۱ مقدمه

فرض کنید $\Omega = (a, b)$ بازه بازی در R باشد. مسأله کنترل مرزی مقید را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned} \min\ \max_{\Omega} \quad & y(x), \\ s.t. \quad & Ly(x) = f, \quad x \in (a, b), \\ & y(x) \geq \psi, \quad x \in [a, b], \\ & y(a) = \tilde{\alpha}, \\ & y(b) = \tilde{\beta}. \end{aligned} \tag{۱}$$

که درآن $\tilde{\alpha}$ مجهول و f و ψ توابعی معلوم می باشند، و $\tilde{\beta}$ نیز معلوم باشد و $L = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d}{dx}\right)$. پس از به کارگیری روش گسسته سازی عناصر متناهی و تقریب گالرکین مسأله بهینه سازی با بعد متناهی به صورت زیر بیان می شود[۱و۳]،

$$\begin{aligned} min\ max \quad & \{\ \alpha, \tilde{\alpha}\}, \\ s.t \quad & A\alpha\ +\ \tilde{A}\tilde{\alpha} = F, \\ & \alpha \geq \Psi, \\ & \tilde{\alpha} \geq \tilde{\Psi}. \end{aligned} \tag{۲}$$

۲ اصل ماکزیمم

قضیهٔ ۱ . فرض کنید $y \in H^1(a,b)$ و $Ly \leq 0$ در (a,b)، آنگاه، $\sup_{(a,b)} y \leq \sup_{\{a,b\}} y$.

اثبات. [۲]

۳ خطی سازی مسأله

برای خطی سازی این مسأله قرار می دهیم $s = max\{\alpha, \tilde{\alpha}\}$. فرض کنید e یک بردار n بعدی با درایه های ۱ باشد، پس تابع هدف $minimax$ به تابع هدف $min\ s$ تبدیل می شود و قیود $\alpha \leq es$ و $\tilde{\alpha} \leq s$ به شرایط مسأله اضافه می شوند. با فرض $f \leq 0$ ، $\max\limits_{(a,b)} \psi > \tilde{\beta}$، مدل خطی مسأله به صورت زیر در می آید.

$$\begin{aligned} & min \quad s, \\ & s.t \quad s - \tilde{\alpha} \geq 0, \\ & \qquad A\alpha + \tilde{A}\tilde{\alpha} = F, \\ & \qquad \alpha \geq \Psi, \\ & \qquad \tilde{\alpha} \geq \tilde{\Psi}. \end{aligned} \tag{3}$$

۴ نتایج عددی

فرض کنید Ω بازه $(0,1)$ باشد. مسأله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{llll} \min \max\limits_{\Omega} & y(x) & & \\ s.t. \quad Ly(x) & = & -1 & x \in (a,b) \\ \qquad y(x) & \geq & 2ln2((x+1)^{-1} - 1) + ln(x+1) + 1 & x \in [a,b] \\ \qquad y(a) & = & \tilde{\alpha} & \\ \qquad y(b) & = & 1 & \end{array} \tag{4}$$

که عملگر L نیز به صورت زیر تعریف شود $Ly = -\frac{d}{dx}((x+1)^2\frac{dy}{dx})$.جواب واقعی این مسأله عبارت است از $y = 2ln2((x+1)^{-1} - 1) + ln(x+1) + 1$ و مقدار کنترل بهینه مرزی برابر است با ۱.
نتایج به دست آمده از حل مسأله برنامه ریزی خطی (۳) به صورت زیر می باشد .$\tilde{\beta} = y(0) = 1$

مراجع

[1] P.G. Ciarlet, J.L.Lions, *Handbook of numerical analysis,Vol.2, North-Holland, New York,* 1991.

شکل ۱: نمودار مقایسه y و تقریب آن

شکل ۲: نمودار خطای تقریب y

[2] D.Gilbarge, N.s.Trudinger, *Elliptic partial differential equation of second order, Springer, Berlin,* 2001.

[3] M.M.Kostreva, A.L. Ward, *Optimal control of a system governed by an elliptic partial differential equation,* CAM J. 114(2000)173.