# لم نیمن پیرسُن و بحث در یکتایی آزمون $MP$.

**چکیده:** لم نیمن پیرسن که توسط نیمن و پیرسن(۱۹۳۳)پایه گذاری شد یکی از پایه ای ترین مباحثِ آزمون فرضیه های آماری است. این لم در اغلب کتابهای استنباط آماری نیز آمده است. اما در بیشتر آنها خواننده را با پاره ای ابهامات مواجه می کند. در بعضی از آنها نیز تعمیم نتیجه یکتایی آزمون یافت شده توسط این لم ، نادرست است. در حقیقت این مطلب که آزمون بدست آمده بر اساس این لم برای فرضیه ساده در مقابل فرضیه ساده دیگر برابر است با هر پرتوانترین آزمون دیگر برای همین فرضیه ها همواره درست نیست. در این مقاله ابتدا به چند مرجع در این زمینه و نارسایی در آنها اشاره‌ی گذرایی می کنیم سپس صورت کامل تری از آن رابه صورت یک قضیه می آوریم و در ادامه به طرح چند مثال پرداخته می شود.

کلمات کلیدی : لم نیمن پیرسن ، فرضیه‌ساده ، یکتایی آزمون.

# ۱ مقدمه

لهمن (۱۹۹۷) درکتاب آمار استنباطی ، لم نیمن پیرسن را به صورت قضیه ای آورده است ، اما این ابهام که آیا برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ یکتایی پرتوانترین آزمون بدست آمده درست است یا نه ، وجود دارد. کسلا (۱۹۹۷) در کتاب آمار استنباطی ، این لم را به صورت قضیه آورده است ، اما برای همه $0 \leq \alpha \leq 1$ توضیحی نیست . روهتگی (۲۰۰۱) نیز در کتاب آمار استنباطی این لم را به صورت قضیه و بحث یکتایی آزمون بدست آمده توسط آن را تحت عنوان نکته ای در ادامه آورده است که همواره درست نیست.

# ۲ لم نیمن پیرسن

در این بخش صورت کامل تری از لم نیمن پیرسن را به صورت قضیه زیر می آوریم.

قضیه ۲/۱ : فرض کنید $P_0$ و $P_1$ تابع های احتمال به ترتیب متناظر با چگالی های $p_0$ و $p_1$ ، با اندازه $(measure)$ $\mu$ باشند .

الف ) شرط وجودی : برای فرضیه های $H_0 : p_0$ در مقابل $H_1 : p_1$ ، برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ ، آزمون $\varphi(x)$ وجود دارد که در دو شرط زیر صدق می کند .

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & p_1(x) > kp_0(x) \\ \gamma & p_1(x) = kp_0(x) \\ 0 & p_1(x) < kp_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

$$E_{H_0}(\varphi(X)) = \alpha \qquad (2)$$

ب)شرط کافی : اگر آزمون برای فرضیه های فوق در دو شرط ۱ و ۲ صدق کند ، آنگاه یک پرتوانترین آزمون در اندازه $\alpha$ برای فرضیه های ساده فوق است .

ج) شرط لازم (یکتایی) : اگر$\varphi$ به یکی از سه فرم ۳ و ۴ و ۵ ، در زیر باشد و$\varphi^*$ یک پرتوانترین آزمون در اندازه $\alpha = E_{H_0}(\varphi(X))$ باشد آنگاه $\varphi$ و $\varphi^*$ برابرند مگر روی مجموعه ای با اندازه $(\mu)$ صفر .

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & p_1(x) > kp_0(x) \\ 0 & p_1(x) < kp_0(x) \end{cases} \qquad (3)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & p_1(x) \geq kp_0(x) \\ 0 & p_1(x) < kp_0(x) \end{cases} \qquad (4)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & p_1(x) > kp_0(x) \\ 0 & p_1(x) \leq kp_0(x) \end{cases} \qquad (5)$$

نکته : توجه کنید که سه فرم فوق با یکدیگر متفاوت اند مثلا فرم ۳ و فرم ۵ متفاوت اند زیرا در فرم ۳ امکان رخ دادن $p_1(x) = kp_0(x)$ نیست اما در فرم ۵ این امکان وجود دارد و بنابراین آزمون برای آن تعریف می شود .

اثبات :

الف ) تابع $\alpha(c)$ را به صورت $\alpha(c) = P_{H_0}(p_1(X) > cp_0(X)) = P_{H_0}(\frac{p_1(X)}{p_0(X)} > c)$ تعریف می کنیم ، داریم $1 - \alpha(c) = P_{H_0}(\frac{p_1(X)}{p_0(X)} \leq c)$ . یعنی تابع $\alpha(c)$ غیر صعودی و از راست پیوسته است . همچنین داریم : $P_{H_0}(\frac{p_1(X)}{p_0(X)} = c) = \alpha(c^-) - \alpha(c)$ و $\alpha(\infty) = 0$ و $\alpha(-\infty) = 1$ . فرض کنید $0 \leq \alpha \leq 1$ داده شده باشد ، $c_0$ را طوری انتخاب می کنیم که $\alpha(c_0) \leq \alpha \leq \alpha(c_0^-)$ که $c_0$ در مجموعه اعداد حقیقی توسعه یافته وجود دارد .آزمون $\varphi(x)$ را به صورت زیر معرفی می کنیم .

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & p_1(x) > c_0 p_0(x) \\ \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0^-) - \alpha(c_0)} & p_1(x) = c_0 p_0(x) \\ 0 & p_1(x) < c_0 p_0(x) \end{cases} \qquad (6)$$

با انتخاب $k = c_0$ و $\gamma = \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0^-) - \alpha(c_0)}$ آزمون به شکل ۱ در می آید . در اینجا دو نکته اهمیت دارد . یکی اینکه $\gamma$ زمانی بی معنی است که $P_{H_0}(\frac{p_1(X)}{p_0(X)} = c_0) = 0$ این نکته ، نگرانی در مورد بی معنی بودن $\gamma$ را برطرف می کند . دیگر اینکه $c_0$ یکتاست ، مگر اینکه بازه ای مانند $(c', c'')$ باشد که برای هر $c$ در آن ، $\alpha(c) = \alpha$ . در این صورت اگر $C = \left\{x : p_0(x) > 0, c' < \frac{p_1(x)}{p_0(x)} < c''\right\}$ و $P_{H_0}(C) = \alpha(c') - \alpha(c''^-) = 0$ . یعنی $\int_C p_0(x) d\mu = 0$ و در نتیجه $\mu(C) = 0$ . این نشان می دهد که اگر انتخاب $c_0$ یکتا نباشد هر مقدار آن می تواند برای ساختن آزمون بکار رود و مشکلی پیش نمی آید .

ب) نشان می دهیم برای فرضیه های مورد نظر، آزمون یافت شده در ۱ ، پرتوانترین است . فرض کنید $\varphi$ آزمونی باشد که شرط های ۱ و ۲ را دارد و $\varphi^*$ هر آزمون دیگر که ، $E_{H_0}(\varphi(X)) \leq \alpha$ . $S^+$ و $S^-$ را زیر مجموعه هایی از فضای نمونه می گیریم که به ترتیب $\varphi(x) - \varphi^*(x) > 0$ و $\varphi(x) - \varphi^*(x) < 0$ داریم :

$$\int (\varphi - \varphi^*)(p_1 - kp_0) d\mu = \int_{S^+ \cup S^-} (\varphi - \varphi^*)(p_1 - kp_0) d\mu \geq 0$$

لذا

$$\int (\varphi - \varphi^*) p_1 d\mu \geq k \int (\varphi - \varphi^*) p_0 d\mu \geq 0$$

این نشان می دهد که $\varphi$ یک پرتوانترین آزمون در سطح $\alpha$ است .

ج) اگر $\varphi$ به فرم ۳ باشد و در ۲ نیز صدق کند ، فرض کنید $\varphi^*$ پرتوانترین آزمون در سطح $\alpha$ برای فرضیه های فوق باشد و مجموعه $S$ به صورت زیر باشد .

$$S = (S^+ \cup S^-) \cap \{x : p_1(x) \neq kp_0(x)\}$$

که $S^+$ و $S^-$در قسمت ب) معرفی شدند . فرض کنید $\mu(S) > ۰$ چون تابع $(\varphi - \varphi^*)(p_۱ - kp_۰)$ روی $S$ مثبت است ، نتیجه می شود

$$\int_{S^+ \cup S^-} (\varphi - \varphi^*)(p_۱ - kp_۰) d\mu = \int_S (\varphi - \varphi^*)(p_۱ - kp_۰) d\mu > ۰$$

همچنین داریم $k\int(\varphi - \varphi^*)p_۰ d\mu \geq ۰$ این نشان می دهد که $\varphi$ از $\varphi^*$ پرتوانتر است و این تناقض است . لذا $\mu(S) = ۰$ و این نشان می دهد $\varphi$ با $\varphi^*$ برابر است مگر روی مجموعه ای با اندازه صفر .
فرض کنید $\varphi'$ آزمون دلخواهی است که در ۲ صدق می کند و روی $A_۱ = \{x : p_۱(x) \neq kp_۰(x)\}$ به شکل $\varphi$ ( شماره ۳ ) باشد و$\varphi^*$ پرتوانترین آزمونی در اندازه $\alpha$ باشد . $\varphi'$ و $\varphi^*$ روی $A_۱$ برابرند $a.e.$ . زیرا:

$$\int (\varphi' - \varphi^*)(p_۱ - kp_۰) d\mu = \int_{A_۱ \cap (S^+ \cup S^-)} (\varphi' - \varphi^*)(p_۱ - kp_۰) d\mu$$

$$= \int_S (\varphi - \varphi^*)(p_۱ - kp_۰) d\mu > ۰$$

حال باید دید تحت چه شرایطی ، این دو آزمون روی $A_۲ = \{x : p_۱(x) = kp_۰(x)\}$ برابرند $a.e.$ . داریم :

$$E_{H_۰}(\varphi'(X)) = \alpha$$

و

$$E_{H_۰}(\varphi^*(X)) = \alpha$$

بنابراین

$$\int \varphi' p_۰(x) d\mu = \int_{A_۱} \varphi' p_۰(x) d\mu + \int_{A_۲} \varphi' p_۰(x) d\mu = \alpha$$

$$\int \varphi^* p_۰(x) d\mu = \int_{A_۱} \varphi^* p_۰(x) d\mu + \int_{A_۲} \varphi^* p_۰(x) d\mu = \alpha$$

از برابری $\varphi'$ و $\varphi^*$ روی $A_1$ نتیجه می شود .

$$\int_{A_2} \varphi^* d\mu = \int_{A_2} \varphi' d\mu \qquad ۷$$

تنها در صورتی که فرمهای ۴ و ۵ برای $\varphi'$ رخ دهد ، از ۷ نتیجه می شود که $\varphi^* = \varphi' \quad a.e.$ . لذا اثبات کامل می شود .

نکته : برای فرضیه های ذکر شده در بالا، پرتوانترین آزمون درکلاس آزمون های در سطح $\alpha$ ، پرتوانترین آزمونی در اندازه $\alpha$ ولذا پرتوانترین آزمون در کلاس آزمون های در اندازه $\alpha$ برای همان فرضیه‌هاست.

مثال ۲/۲ : فرض کنید $p_1$ و $p_0$ چگالی های یکنواخت پیوسته با پارامترهای به ترتیب $(0, \theta_1)$ و $(0, \theta_0)$ باشند که $\theta_1 > \theta_0$ و $\mu$ اندازه لبگ باشد . برای آزمون $H_0 : p_0$ در مقابل $H_1 : p_1$ با استفاده از یک نمونه تصادفی به حجم ۱ ، $X$ ، برای هر $0 < \alpha < 1$ پرتوانترین آزمون یکتا نیست . اما برای $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ آزمون موجود بر اساس لم نیمن پیرسن یکتاست .آزمون های زیر در اندازه $0 \leq \alpha \leq 1$ پرتوانترین هستند .

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > \theta_0 \\ \alpha & x < \theta_0 \end{cases} \qquad ۸$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > \theta_0(1-\alpha) \\ 0 & x < \theta_0(1-\alpha) \end{cases} \qquad ۹$$

آزمون $\varphi_1$ بر اساس لم نیمن پیرسن بدست آمده است . در حقیقت این تابع $\alpha(c)$ است که مشخص می کند پرتوانترین آزمون برای چه $\alpha$ هایی یکتاست یا نیست . هر چند در روند اثبات یکتایی نشان مستقیمی از این تابع نبود اما سه صورت ۳ و ۴ و ۵ آزمون هایی در سطح آن مقادیری از $\alpha(c)$ اند که تابع $\alpha(c)$ پیوسته است .

مثال ۲/۳ : خانواده توزیع های به فرم $f_\theta(x) = Q(\theta)h(x); \theta \leq x \leq a, a \in R$ را در نظر بگیرید . می خواهیم فرضیه $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل

$H_۱ : \theta = \theta_۱$ در سطح $۰ \leq \alpha \leq ۱$ آزمون کنیم . برای این منظور داریم :

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۰ & \theta_۰ \leq x < \theta_۱ \\ \frac{Q(\theta_۱)}{Q(\theta_۰)} & \theta_۱ \leq x < a \end{cases}$$

بنابراین تابع $\alpha(c)$ به صورت زیر است .

$$\alpha(c) = \begin{cases} ۱ & c < ۰ \\ \frac{Q(\theta_۰)}{Q(\theta_۱)} & \frac{Q(\theta_۱)}{Q(\theta_۰)} > c \geq ۰ \\ ۰ & c \geq \frac{Q(\theta_۱)}{Q(\theta_۰)} \end{cases}$$

ملاحظه می شود برای $\frac{Q(\theta_۰)}{Q(\theta_۱)} < \alpha < ۱$ و $۰ < \alpha < \frac{Q(\theta_۰)}{Q(\theta_۱)}$ پرتوانترین آزمون ، یکتا نیست . اما برای سه مقدار $\alpha = ۱$ و $\alpha = \frac{Q(\theta_۰)}{Q(\theta_۱)}$ و $\alpha = ۰$ آزمون موجود بر اساس لم نیمن پیرسن یکتاست .
برای $۰ < \alpha < \frac{Q(\theta_۰)}{Q(\theta_۱)}$ آزمون بر اساس لم نیمن پیرسن به صورت زیر است :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha\frac{Q(\theta_۱)}{Q(\theta_۰)} & \theta_۱ \leq x < a \\ ۰ & \theta_۰ \leq x < \theta_۱ \end{cases}$$

برای بقیه $\alpha$ ها نیز آزمون بسادگی حاصل می شود .

ممکن است حالاتی بوجوی آید که $\alpha(c)$ روی یک بازه ، پیوسته و نزولی اکید باشد در اینصورت برای مقادیر تابع $\alpha(c)$ روی آن بازه ، آزمون موجود بر اساس لم نیمن پیرسن ، یکتاست . در موارد زیادی این تابع همواره پیوسته و نزولی اکید است ، یعنی برای هر $\alpha$ ، آزمون موجود بر اساس لم نیمن پیرسن یکتاست . در خانواده توزیع های گسسته ، برای حداکثر تعداد شمارا $\alpha$ آزمون موجود بر اساس لم نیمن پیرسن ، یکتاست .

# مراجع


1. Casella , G ; Berger , R . (1997) .*Statistical Inference* .

2. Lehmann , E.L. ; Casella , G . (1997) . *Theory of Point Estimaton* , $2^{nd}$ . Springer , New York .

3. Rohatgi , V ; Ehsanes Saleh . (2001) .*An Introduction to Probability and Statistics* , Second Edition . Wiley , New York .