جریان سکون متقارن محوری بر روی استوانه نامحدود همراه با حرکت محوری و دورانی متغیر با زمان استوانه و نفوذ سطحی متغیر با زمان سیال از دیواره آن

بهراد حقیقی[۱]، بهرنگ محمدی خلخالیان[۲]، اصغر برادران رحیمی[۳]
دانشکده مهندسی- دانشگاه فردوسی مشهد - صندوق پستی ۱۱۱۱- ۹۱۷۷۵

چکیده

در این مقاله جریان سکون شعاعی بر روی یک استوانه نامحدود با قدرت اولیه جریان آزاد $\bar{k}$ دارای حرکات محوری و دورانی تابع زمان همراه با مکش و دمش سطحی متغیر با زمان سیال از دیواره مورد بررسی و تحقیق واقع شده است. به ازای توابع زمانی خاص برای سرعت زاویه‌ای و سرعت محوری استوانه، با استفاده از تغییر متغیرهای مناسبی معادلات ناویراستوکس به معادلات کاملا تشابهی تبدیل شده و با حل این معادلات، تعدادی حل دقیق و کاملا تشابهی برای میدان سرعت بدست آمده است. عمومی‌ترین شکل این توابع زمانی خاص، تابع نوسانی واگرا و میرا می‌باشد که البته خود شامل توابع زمانی ساده‌تر نوسانی هارمونیک و نمایی نیز می‌باشد. برای سایر توابع زمانی، معادلات ناویراستوکس به صورت عددی و با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی حل شده‌اند و بر این اساس تعدادی حل نیمه‌تشابهی نیز بدست آمده‌اند. . کلیه حلهای فوق به ازای مقادیر مختلف اعداد رینولدز $\mathrm{Re} = \frac{\bar{k}a^2}{2\upsilon}$ و مقادیر انتخابی نرخ نفوذ سطحی بدون بعد $S(\tau) = \frac{U_0(\tau)}{\bar{k}a}$ بیان شده‌اند. که در آنها a شعاع استوانه، υ لزجت سینماتیکی، $\bar{\alpha}$ ضریب پخش حرارت می‌باشد.پس از بدست آوردن میدانهای سرعت برای توابع مذکور، مقادیر متناظر تنش برشی دیواره استوانه نیز برای مقادیر مختلف عدد رینولدز و نیز مقادیر انتخابی نرخ نفوذ سطحی بدون بعد ارائه شده است.

واژه های کلیدی: *جریان سکون متقارن محوری، معادلات ناویر استوکس، حل نیمه تشابهی، حل کاملاً تشابهی، مکش و دمش سطحی متغیر با زمان.*

مقدمه

یافتن حل دقیق برای معادلات ناویراستوکس با توجه به غیرخطی بودن این معادلات بسیار دشوار می‌باشد، به طوری که اصل برهم نهی که در جریان پتانسیل کارساز است، دیگر قابل اعمال نیست. هایمنز[۱] حل دقیقی برای معادلات ناویراستوکس حاکم بر جریان دو بعدی روی صفحه تخت ارائه داد. هومان[۲] یک حل دقیق برای حالت سه بعدی معادلات ناویراستوکس از جریان سکون متقارن محوری در مقابل صفحه تخت بدست آورد. هوارث[۳] و دیوی[۴] جریان سکون سه بعدی در مقابل یک صفحه تخت را برای حالت‌های غیرمتقارن بررسی کرده و نتایج خود را منتشر کرده‌اند. اولین‌بار وانگ[۵] حل دقیقی برای مسأله جریان سکون متقارن، روی یک استوانه نامحدود ساکن ارائه داد. گورلا[۶-۱۰] در یک سری از مقالات، جریان پایا و ناپایا و همچنین مسأله انتقال حرارت را برای جریان سکون متقارن روی استوانه متحرک با سرعت ثابت و نیز یک حالت خاص که استوانه دارای حرکت محوری نوسانی و بدون حرکت دورانی بود، را مورد بررسی قرار داد. این حالت‌های خاص در دو حالت حدی فرکانس نوسانی خیلی پایین و خیلی بالا به روش پرتوربیشن حل گردیدند. حسانین و همکارانش[۱۱] جریان متقارن محوری یک سیال ریزقطبی روی یک استوانه به طول بی‌نهایت را بررسی کردند و همچنین حل دقیقی برای مسأله انتقال حرارت در جریان متقارن محوری یک سیال ریزقطبی، روی استوانه برای حالت دما ثابت ارائه دادند. کانینگ، دیویس و ویدمان[۱۲]، مسأله جریان سکون روی استوانه چرخان با سرعت چرخشی ثابت و همراه با مکش و دمش سطحی با نرخ ثابت را بررسی کردند. تاخار، چامخا و نس[۱۳] اثر ناپایا بودن جریان سکون شعاعی متقارن محوری روی استوانه را همراه با اثر حرکت استوانه با سرعت محوری وابسته به زمان مورد مطالعه قرار دادند.

برادران رحیمی[۱۴] مسأله انتقال حرارت در جریان متقارن محوری روی یک استوانه را برای اعداد پرانتل بزرگ با استفاده از روش پرتوربیشن بررسی کرده است. اخیراً صالح و برادران رحیمی[۱۵-۱۹] در مجموعه‌ای از مقالات مسأله جریان سکون متقارن محوری بر روی استوانه نامحدود و انتقال حرارت از آن را برای حالات مختلف حرکت محوری و دورانی استوانه متغیر با زمان با مکش و دمش سطحی یکنواخت مورد بررسی قرار داده‌اند.

در این مقاله، مسأله جریان سکون محوری بر روی استوانه‌ای نامحدود دارای حرکات محوری و دورانی وابسته به زمان، همراه با نرخ نفوذ سطحی سیال متغیر با زمان، مورد بررسی قرار گرفته است.

---

[۱] دانشجوی دکتری مکانیک، ۰۹۱۵۵۵۱۱۲۳۵ ، behrad_haghighi@yahoo.com (نویسنده مخاطب)
[۲] کارشناس ارشد مکانیک
[۳] استاد گروه مکانیک

معرفی مسأله

برای درک بهتر مسأله جریان سکون بر روی استوانه، شکل (۱) را در نظر بگیرید. جریان در مختصات استوانه‌ای r ، ϕ و z با اجزاء سرعت متناظر u , v , w در نظر گرفته شده است. استوانه به طول نامحدود و به شعاع a بوده و این استوانه دارای حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای $\omega(t)$ حول محور z و نیز دارای حرکت محوری در راستای محور خود با سرعت محوری $V(t)$ می‌باشد. در شکل(۱) حالت $U_0(t) > 0$ نشان داده شده است که بیانگر مکش سطحی به داخل استوانه است. از آن‌جا که جریان از همه طرف به صورت متقارن به استوانه برخورد می‌کند، بنابراین جریان دارای تقارن محوری می‌باشد. جریان بر روی استوانه به صورت شعاعی و به طرف استوانه بوده و در برخورد با آن به سکون رسیده و تشکیل دایره سکون را می‌دهد (r=a, z=0). ضمناً به خاطر وجود این جریان، جریان موازی محور استوانه (در راستای محور z) ایجاد می‌گردد که مقدار بزرگی آن بستگی به فاصله از دایره سکون دارد. علاوه بر جریان‌های شعاعی و محوری، جریان سومی نیز پیرامون استوانه و در راستای محور ϕ ایجاد می‌گردد که این جریان به واسطه حرکت دورانی استوانه ایجاد می‌شود.

معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان فوق، همان معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه‌ای سه بعدی می‌باشند. البته با توجه به اینکه فرض شده استوانه نامحدود باشد و با توجه به اینکه هیچ‌کدام از شرایط مرزی تابع محور zها نمی‌باشد از این‌رو پروفیل‌های سرعت u , v نمی‌توانند تابع z باشد. در داخل لایه مرزی معادلات پیوستگی و اندازه حرکت حاکم بر جریان متقارن در مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + r\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \upsilon(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}) \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{uv}{r} = \upsilon(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}) \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \upsilon(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}) \qquad (۴)$$

و شرایط مرزی میدان سرعت، حاکم بر معادلات فوق عبارتند از:

$$r = a \quad : \quad u = -U_0(t), v = a\omega(t), w = V(t) \qquad (۵)$$

$$r \to \infty \quad : \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\bar{k}, \lim_{r\to\infty} rv = 0, w = 2\bar{k}z \qquad (۶)$$

که $U_0(t)$ نرخ نفوذ سطحی سیال به داخل استوانه بوده، $\omega(t)$ و $V(t)$ به ترتیب همان سرعت دورانی و سرعت محوری استوانه می‌باشند.

معادلات نیمه‌تشابهی

با استفاده از روش‌های تشابهی کردن معادلات که در مراجع[۲۶] تا [۲۸]بیان شده‌اند و با استفاده از روش سعی و خطا، نهایتاً تغییر متغیرهای زیر برای کاستن معادلات ناویراستوکس به معادلات تشابهی بی‌بعد بدست آمده‌اند:

$$u = -\bar{k}\frac{a}{\sqrt{\eta}}F(\eta,\tau) \qquad (۷)$$

$$v = \frac{a}{\sqrt{\eta}}G(\eta,\tau) \qquad (۸)$$

$$w = 2\bar{k}F'(\eta,\tau)z + H(\eta,\tau) \qquad (۹)$$

$$p = \rho\bar{k}^2 a^2 P \qquad (۱۰)$$

که $\tau = 2\bar{k}t$ و $\eta = (\frac{r}{a})^2$ به ترتیب زمان بی‌بعد و شعاع بی‌بعد هستند، تغییر متغیرهای فوق به طور خودکار در معادله پیوستگی صدق می‌کنند و با قرار دادن آنها در معادلات مومنتوم، روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\eta F''' + F'' + \mathrm{Re}[1 - (F')^2 + FF'' - \frac{\partial F'}{\partial \tau}] = 0 \qquad (۱۱)$$

$$\eta G'' + \mathrm{Re}[FG' - \frac{\partial G}{\partial \tau}] = 0 \qquad (۱۲)$$

$$\eta H'' + H' + \mathrm{Re}[FH' - F'H - \frac{\partial H}{\partial \tau}] = 0 \qquad (۱۳)$$

ضمناً با انتگرال گیری از روابط دربرگیرنده ترم فشار بدون بعد P، رابطه زیر برای توزیع فشار بدست می‌آید:

$$P - P_0 = -[\frac{F^2}{2\eta} + \frac{1}{\mathrm{Re}}F' + 2(\frac{z}{a})^2 - \frac{1}{2\bar{k}^2}\int_1^\eta \frac{G^2(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta] \qquad (۱۴)$$

در روابط بالا، علامت پرایم(′)، بیانگر مشتق نسبت η به بوده و $\mathrm{Re} = \frac{\bar{k}a^2}{2\nu}$ همان عدد رینولدز است. با توجه به شرایط مرزی میدان سرعت ـ روابط (۵) و (۶) ـ شرایط مرزی برای معادلات (۱۱) تا (۱۳) به شکل زیر خواهند بود:

$$\eta = 1 \quad : \quad F = S(\tau), F'(0) = 0, G = \omega(\tau), H = V(\tau) \qquad (۱۵)$$

$$\eta \to \infty \quad : \quad F' = 1, G = 0, H = 0 \qquad (۱۶)$$

که در آن $S(\tau) = \frac{U_0(\tau)}{\bar{k}a}$، نرخ نفوذ سطحی بدون بعد می‌باشد.

معادلات کاملاً تشابهی

چنانچه نرخ نفوذ سطحی ثابت بوده و تابع زمان نباشد(ثابت = S)، آنگاه معادله نیمه‌تشابهی (۱۱) به معادله کاملاً تشابهی زیر کاهش می‌یابد:

$$\eta F''' + F'' + \mathrm{Re}[1 - (F')^2 + FF''] = 0 \qquad (۱۷)$$

که این معادله خودتشابهی برای اولین بار توسط وانگ[۵] بدست آمد و حل گردید. ولی در تحقیق حاضر نرخ نفوذ سطحی تابع زمان بوده، بنابراین به روش حل معادله فوق در قسمت بعدی

اشاره خواهد شد. معادلات نیمه‌تشابهی(۱۲) و (۱۳) نیز می‌تواند به معادله دیفرانسیل دقیق تبدیل شود. برای این کار فرض می‌کنیم که توابع G و H به صورت زیر قابل تفکیک باشند:

$$\begin{cases} G(\eta,\tau) = g(\eta).\phi(\tau) \\ H(\eta,\tau) = h(\eta).V(\tau) \end{cases} \quad (۱۸)$$

با قرار دادن متغیرهای تفکیک شده فوق در معادلات (۱۲) و (۱۳) معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\eta\frac{g''}{g'} + \frac{g'}{g} + \mathrm{Re}\,F\frac{g'}{g} = \mathrm{Re}\frac{\frac{d\phi(\tau)}{d\tau}}{\phi(\tau)} \quad (۱۹)$$

$$\eta\frac{h''}{h'} + \frac{h'}{h} + \mathrm{Re}(F\frac{h'}{h} - F') = \mathrm{Re}\frac{\frac{dV(\tau)}{d\tau}}{V(\tau)} \quad (۲۰)$$

در معادلات فوق سمت چپ عبارت فقط تابع η و سمت راست فقط تابع τ می‌باشد. از این‌رو این معادلات فقط زمانی جواب خواهند داشت که مساوی عدد ثابتی باشند. براین اساس تنها توابع ϕ و Vای که این امکان را فراهم می‌سازند به شکل زیر هستند:

$$\phi(\tau) = b.Exp[(\alpha + i\beta)\tau] \quad (۲۱)$$

$$V(\tau) = b.Exp[(\lambda + i\delta)\tau] \quad (۲۲)$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ بوده و α، β، δ، λ و b همگی اعداد ثابتی هستند. اکنون تفکیک پذیری تابع فوق در شرایط مرزی‌اش امتحان می‌شود:

$$G(1,\tau) = \omega(\tau) = g(1).\phi(\tau) \to g(1) = 1 \quad (۲۳)$$

$$H(1,\tau) = V(\tau) = h(1).V(\tau) \to h(1) = 1 \quad (۲۴)$$

$$\omega(\infty,\tau) = 0 = h(\infty).\phi(\tau) \to g(\infty) = 0 \quad (۲۵)$$

$$H(\infty,\tau) = 0 = h(\infty).V(\tau) \to h(\infty) = 0 \quad (۲۶)$$

با توجه به تفکیک‌پذیری شرایط مرزی، معادله (۲۱) و (۲۲) را به ترتیب در معادلات (۱۹) و (۲۰) قرار می‌دهیم تا معادلات دیفرانسیل دقیق زیر بدست آید:

$$\eta g'' + \mathrm{Re}(Fg' - \alpha g - i\beta g) = 0 \quad (۲۷)$$

$$\eta h'' + h' + \mathrm{Re}(Fh' - F'h - \lambda h - i\delta h) = 0 \quad (۲۸)$$

نکته اینکه در رابطه(۲۱) مقدار $b = 0$ بیانگر حالت استوانه بدون دوران است که همان حالتی است که وانگ[۵] در نظر گرفته است. اگر $b \neq 0$ و $\alpha = \beta = 0$ باشد، حالت استوانه با دوران با سرعت ثابت بدست می‌آید که توسط کانینگ[۱۲] مطالعه شده است. اگر $b \neq 0$، $\alpha \neq 0$ و $\beta = 0$ باشد حالت دوران استوانه با سرعت نمایی بدست می‌آید. اگر $b \neq 0$، $\beta \neq 0$ و $\alpha = 0$ باشد، حالت دوران هارمونیک استوانه بدست خواهد آمد. وقتی که α، β و b همگی مخالف صفر هستند، حالت دوران نوسانی واگرا و میرای استوانه حاصل می‌شود، که با توجه به مثبت یا منفی بودن α، این نوسانات تشدید و یا تضعیف می‌شوند. اما در رابطه(۲۲) بحث مشابهی به ازای مقادیر مختلف λ، δ و b برای حرکت محوری استوانه داریم.

روش حل معادلات

حل کاملاً تشابهی

برای حل معادلات تشابهی (۲۷) و (۲۸) فرض می‌کنیم که توابع $g(\eta)$ و $h(\eta)$ توابعی مختلط باشند:

$$g(\eta) = g_1(\eta) + ig_2(\eta) \quad (۲۹)$$

$$h(\eta) = h_1(\eta) + ih_2(\eta) \quad (۳۰)$$

با قرار دادن روابط (۲۹) و (۳۰) به ترتیب در معادلات (۲۷) و (۲۸) سیستم معادلات دیفرانسیل کوپله زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \eta g_1'' + \mathrm{Re}(Fg_1' - \alpha g_1 - i\beta g_2) = 0 \\ \eta g_2'' + \mathrm{Re}(Fg_2' - \alpha g_2 - i\beta g_1) = 0 \end{cases} \quad (۳۱)$$

$$\begin{cases} \eta h_1'' + h_1' + \mathrm{Re}(Fh_1' - F'h_1 - \lambda h_1 - i\delta h_2) = 0 \\ \eta h_2'' + h_2' + \mathrm{Re}(Fh_2' - F'h_2 - \lambda h_2 - i\delta h_1) = 0 \end{cases} \quad (۳۲)$$

که شرایط مرزی این معادلات با توجه به روابط(۲۳) تا (۲۶) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \eta = 1 \ : \ g_1 = 1, g_2 = 0 \\ \eta \to \infty \ : \ g_1 = 0, g_2 = 0 \end{cases} \quad (۳۳)$$

$$\begin{cases} \eta = 1 \ : \ h_1 = 1, h_2 = 0 \\ \eta \to \infty \ : \ h_1 = 0, h_2 = 0 \end{cases} \quad (۳۴)$$

سیستم معادلات کوپله(۳۱) و (۳۲) با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۳۳) و (۳۴) برای اعداد مختلف Re، α، β، λ، δ، b و توابع مختلف نرخ نفوذ سطحی سیال از سطح استوانه با استفاده از روش رانگ ـ کوتای مرتبه۴، همراه با استفاده از روش پرتابی حل گردیده‌اند.

حل نیمه تشابهی

از آن‌جا که حل کاملاً تشابهی معادلات (۱۲) و (۱۳) تنها قابلیت تحلیل تعداد اندکی از حالت‌های مختلف حرکت محوری و دورانی استوانه را دارد و همچنین ممکن است که امکان جداسازی متغیرهای مستقل برای برخی از توابع سرعت وجود نداشته باشد، بنابراین به حل نیمه‌تشابهی(۱۱) تا (۱۳) پرداخته می‌شود. این معادلات برای توابع مختلف زمانی $S(\tau)$، $V(\tau)$ و $\omega(\tau)$ با روش تفاضل محدود حل شده‌اند. دستگاه معادلات جبری بدست آمده در هر پله زمانی منجر به یک ماتریس سه قطری می‌گردد که با الگوریتمTDM قابل حل می‌باشد. برای بدست آوردن جواب در هر پله زمانی، جواب پله زمانی قبلی به عنوان حدس اول جواب پله زمانی فوق در نظر گرفته شده و با تکرار، جواب آن پله زمانی بدست می‌آید. برای پله زمانی اول $(\tau = 0)$ فرض می‌کنیم که شرایط حالت دائم برای کلیه زمانهای $\tau \leq 0$ برقرار بوده و معادلات حالت دائم را براساس $S(0)$، $V(0)$ و $\omega(0)$ با حدس پروفیل‌های اولیه F، H و G به روش تکرار حل می‌کنیم. سپس با قدم گذاشتن در زمان، جواب پله‌های زمانی بعدی را به دست می‌آوریم. شرط همگرایی تکرارها و رسیدن به جواب این است که

تغییرات ایجاد شده در هر نقطه از F، H و G در دو تکرار متوالی، از مقدار بسیار کوچک ε کمتر باشد.

تنش برشی

مقدار تنش برشی بر روی سطح دیواره استوانه، براساس رابطه زیر که از مرجع[۱۲] برگرفته شده است محاسبه می‌گردد:

$$\sigma = \mu[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v}{r})\hat{e}_\varphi + \frac{\partial w}{\partial r}\hat{e}_z]_{r=a} \qquad (۳۵)$$

ترم اول رابطه فوق مقدار تنش برشی دیواره استوانه در جهت ϕ و ترم دوم مقدار تنش برشی دیواره استوانه در جهت محور z می‌باشد. در رابطه بالا μ همان لزجت سیال است. با قرار دادن تعاریف(۷) الی (۹) در رابطه(۳۵) مقدار تنش برشی برای حل‌های نیمه‌تشابهی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = 2\mu[G'(1,\tau) - \omega(\tau)]\hat{e}_\varphi + \frac{2\mu}{a}[2\bar{k}zF''(1,\tau)z + H'(1,\tau)]\hat{e}_z \qquad (۳۶)$$

ارایه نتایج و بحث

در شکل(۲) نمایه تابع F در زمانهای مختلف رسم و با هم مقایسه شده‌اند. ملاحظه می‌شود که در زمانهای بزرگتر منحنی تابع F زودتر به حالت خطی می‌رسد، یا به عبارت دیگر لایه مرزی در زمانهای بزرگتر، کوچکتر است، چرا که مقدار تابع $S(\tau) = (a\tau + b)$ با گذشت زمان افزایش یافته، یعنی مقدار مکش (با توجه به این که مقادیر $S(\tau)$ مثبت هستند، لذا مکش سطحی برقرار است) افزایش یافته که منجر به کاهش ضخامت لایه مرزی شده است. شکلهای(۳) و(۴)، مشتق دوم تابع $F(\eta,\tau)$ را در زمان (τ) مشخص، به ترتیب به ازای مقادیر مختلف عدد رینولدز و توابع مختلف مکش و دمش سطحی نمایش می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش عدد رینولدز و افزایش مکش سطحی مقدار F'' بیشتر شده، در نتیجه ضخامت لایه مرزی کاهش و مطابق رابطه(۳۵) مقدار تنش برشی روی سطح افزایش می‌یابد.

در شکل(۵) نمایه تابع G برحسب η در زمانهای مختلف برای سرعت دورانی $\omega(\tau) = \tau$ رسم شده‌است. این نمودار به گونه‌ای است که با گذشت زمان مقدار تابع G رو به افزایش است، چرا که سرعت دورانی استوانه $(\omega(\tau) = \tau)$ یک تابع صعودی نسبت به زمان است. شکل (۶) تابع $g_1(\eta)$ را برای مقادیر $\alpha = \beta = 0$ یعنی سرعت دورانی $\omega(\tau) = b$ (سرعت ثابت) و برای مقادیر مختلف عدد رینولدز نشان می‌دهند. با دقت در شکل(۶) مشخص می‌شود که افزایش عدد رینولدز، باعث شده که تابع $g_1(\eta)$ سریعتر به مقدار ثابت مجانب گردد، این مطلب برای تابع $g_1'(\eta)$ در شکل(۷) نیز صادق است. بعبارت دیگر می‌توان چنین بیان کرد که با افزایش عدد رینولدز، از عمق نفوذ سرعت دورانی استوانه در سیال اطراف کاسته می‌شود. تاثیر توابع مختلف زمانی مکش و دمش سطحی بر تابع $g(\eta)$ شکل(۸) نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار مکش سطحی، از عمق نفوذ سرعت دورانی استوانه در سیال اطراف کاسته شده است، چرا که در حالت $S(\tau) = \tau + 1$ که بیانگر مکش بیشتر است نسبت به حالت $S(\tau) = \tau - 1$ (که حتی در $\tau < 1$ بیانگر دمش سطحی است)، نمودارهای $g(\eta)$ زودتر به مقادیر ثابت مجانب شده‌اند.

نمایه مربوط به سرعت محوری $V(\tau) = \sin(2\pi\tau)$ که بیانگر حرکت محوری نوسانی استوانه است، در شکل(۹) نشان داده شده‌است. توابع $h_1(\eta)$ و $h_1'(\eta)$ برای مقادیر $\delta = 1$ و $\lambda = 0$ یعنی سرعت محوری $V(\tau) = b.\exp(i\tau) = b[\cos(\tau) + i.\sin(\tau)]$ و برای اعداد رینولدز مختلف به ترتیب در شکل‌های(۱۰) و (۱۱) و به ازای توابع زمانی مختلف مکش و دمش سطحی در شکل(۱۲) نشان داده شده‌اند. با افزایش عدد رینولدز و افزایش مقدار مکش سطحی، عمق نفوذ سرعت محوری استوانه در سیال اطراف کم می‌شود.

از آنجا که حرکت محوری و دورانی استوانه تابع زمان می‌باشد، لذا تنش برشی مماسی و محوری به ازای دو تابع زمانی مختلف برای $V(\tau)$ و $\omega(\tau)$ رسم شده‌اند. تاثیر عدد رینولدز بر روی تنش برشی محوری به ازای تابع سرعت محوری نوسانی کاهنده در شکل (۱۳) و اثر توابع مختلف زمانی مکش و دمش سطحی بر روی تنش برشی مماسی بازای تابع سرعت دورانی نوسانی در شکل (۱۴) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، مشخص است که افزایش میزان مکش سطحی و افزایش عدد رینولدز منجر به افزایش تنش برشی مماسی می‌شود که منطبق بر همان نتیجه‌ای است که از نمودارهای توابع F، G و H و رابطه (۳۵) استنتاج می‌شود. افزایش تنش برشی برای توابع سرعت نوسانی، با افزایش دامنه نوسان تنش همراه است.

نتیجه‌گیری

مطالب ارائه شده در این مقاله را می‌توان به این شکل جمع‌بندی کرد که با افزایش مقدار مکش و افزایش عدد رینولدز، از ضخامت لایه مرزی کاسته می‌شود و همین امر موجب افزایش مقدار تنش برشی روی سطح استوانه می‌شود. علاوه بر آن با افزایش اعداد رینولدز و مقدار مکش از عمق نفوذ سرعت دورانی استوانه در سیال اطراف کاسته می‌شود.

همچنین از بررسی تنش برشی مماسی و محوری به ازای دو تابع زمانی مختلف برای $V(\tau)$ و $\omega(\tau)$ مشخص می‌شود که افزایش عدد رینولدز باعث افزایش تنش برشی محوری و افزایش میزان مکش سطحی منجر به افزایش تنش برشی مماسی می‌شود.

مراجع

[1] Hiemenz, K., “Die Grenzchicht an einem in den gleichformingen Flussigkeitsstrom eingetauchten graden Kreiszylinder,” Dinglers Polytech. J.236, pp. 321-410, 1911.

[2] Homann, F.Z., “Der Einfluss grosser Zahighkeit bei der Strmung um den Zylinder und um die Kugel,” Zeitsch. Angew. Math. Mech. 16, pp. 153-164, 1936.

[3] Howarth, L., “The boundary layer in three dimensional flow,” Part II. “The flow near a stagnation point,” Phill. Mag. Series7,42, pp. 1433-1440, 1951.

[4] Davey, A., “Boundary layer flow at a saddle point of attachment,” Journal of Fluid Mechanics, Vol. 10, pp. 593-610, 1951.

[5] Wang, C., “Axisymmetric stagnation flow on a cylinder,” Quaterly of applied Mathematics, Vol. 10, pp. 207-213, 1974.

[6] Gorla, R.S.R., “Heat transfer in axisymmetric stagnation flow on a cylinder,” Applied Scientific Research J., Vol.32, pp. 541-533, November 1976.

[7] Gorla, R.S.R., “Non-similar axisymmetric stagnation flow on a moving cylinder,” Int. J. Engineering Science, 16, pp. 392-400, 1978.

[8] Gorla, R.S.R., “Unsteady viscous flow in the vicinity of an axisymmetric stagnation point on a cylinder,” Int. J. Engineering Science,17, pp.87-93, 1979.

[9] Gorla, R.S.R., “Transient response behavior of an axisymmetric stagnation flow on a circular cylinder due to time dependent free stream velocity,” Lett. Appl. Eng. Sci., 16, pp. 493-502, 1978.

[10] Gorla, R.S.R., “Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a cylinder,” Dev. Mech.9 pp. 286-288, 1977.

[11] Hassanien, I.A., and Salma, A.A., “Flow and heat transfer of a micropolar fluid in an axisymmetric stagnation flow on a cylinder,” Energy Convers, Mgmt, Vol.38, No.3, pp. 301-310, 1997.

[12] Cunning, G.M., Davis, A.M.J., and Weidman, P.D., “Radial stagnation flow 0on a rotating cylinder with uniform transpiration,” Journal of Engineering Mathematics, 33, pp.113-128, 1998.

[13] Takhar, H.S., Chamkha, A.J., and Nath, G., “unsteady axisymmetric stagnation point flow of a viscous fluid on a cylinder,” Int. Journal of Engineering Science, 37, pp. 1943-1957, 1999.

[14] Rahimi, A.B., “Heat transfer in an axisymmetric stagnation flow on a cylinder at high prandtl numbers using perturbation techniques,” International Journal of Engineering Science, 1999.

[15] Saleh, R., and Rahimi, A.B., “Axisymmetric stagnation point flow of a viscous fluid on a moving cylinder with time dependent axial velocity,” International Journal of engineering, vol. 17, No.1, February 2004.

[16] Saleh, R., and Rahimi, A.B., “Axisymmetric radial stagnation point flow of a viscous fluid on a rotating cylinder with time dependent axial angular velocity,” Int. J. of Science and Technology, vol.12, No.4, fall 2005.

[17] Saleh, R., and Rahimi, A.B., “Stagnation flow and heat transfer on a moving cylinder with transpiration and high Reynolds number consideration,” Journal of Science and Technology, Transaction B, Vol.28, No.B4, 2004.

[18] Rahimi, A.B., and Saleh, R., “Axisymmetric stagnation point flow and heat transfer of a viscous fluid on a rotating cylinder with time dependent angular velocity,” Journal of fluids engineering, (Jan 2007).

[19] Saleh, R., and Rahimi, A.B., “Axisymmetric stagnation point flow and heat transfer of a viscous fluid on a moving cylinder with time dependent axial velocity and uniform transpiration,” Journal of Fluid Engineering-transaction of ASME, Vol.126, No.5, November 2004.

[20] schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw Hill Book Company Inc., New York, 1968.

[21] Sherman, F.S., Viscous Flow, McGraw-hill, New York, pp.746, 1990.

[22] Meksyn, D., "New methods in laminar boundary layer theory", Pergomon Press, (1961).

[23] O'Neill, M.E., and Chorlton, F., "Viscous and Compressible Fluid Dynamics", John Wiley & Sons (1989)

[24] Marques, F., Sanchez, J., and Weidman, P.D., "Generalized Couette Poiseuille flow with boundary mass transfer", J. Fluid Mech. 374, pp. 221-249, (1998).

[25] Dorrepal, J.M., “An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation point flow in two dimensions,” J. Fluid Mech., 163, pp. 141-147, 1986.

[26] Hansen, Arthur, G., Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering, Prantice-hall, Inc. Englewood Clifis, New Jersy, 1985.

[27] Ma, P.K.H, and Hui, W.H., "Similarity solution of the two-dimensional unsteady boundary layer equations", J. Fluid Mech. Vol.216, pp.537-559, (1990).

[28] Blueman, G.W., and Cole, J.D., "Similarity Method for Differential Equations", Springer, New York, (1974).

[29] F.G.Blottner, Finite difference methods of solution of boundary layer equations, AIAA.J. 8(1970) 193-205.

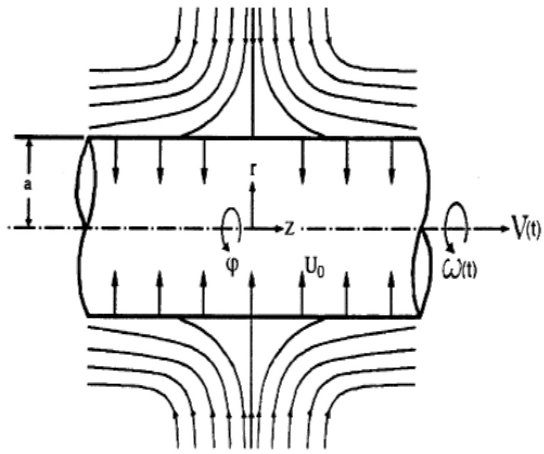
[30] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[31] Anderson, Dale A., Tannenhill, John C., and Pletcher, Richard H., Computational fluid mechanics and heat transfer, McGraw-hill, 1984.

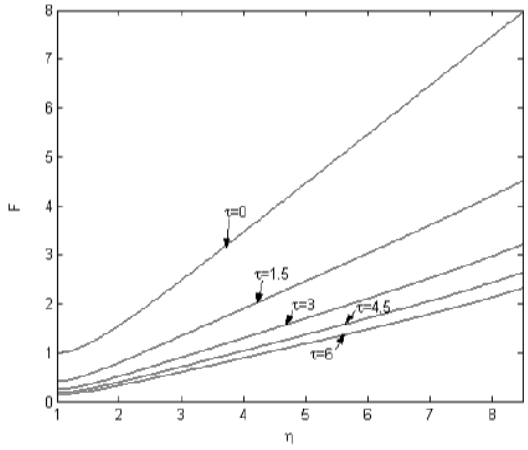
[32] Sewell, G., "The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations", Wiley Interscience, second edition, (2005).

[33] Ovsiannikov, L.V., "Group Analysis of Differential Equations", Academic Press, New York, (1982).
[34] Kevorkian, J., "Partial Differential Equations (Analytical Solution Techniques)", Wadsworth & Brooks, (1989).
[35] Solin, P., "Partial Differential Equation and the Finite Element Method", Wiley Interscience, (2005).
[36] Livesley, R.K., "Mathematical Methods for Engineers", John Wiley & Sons, (1989).

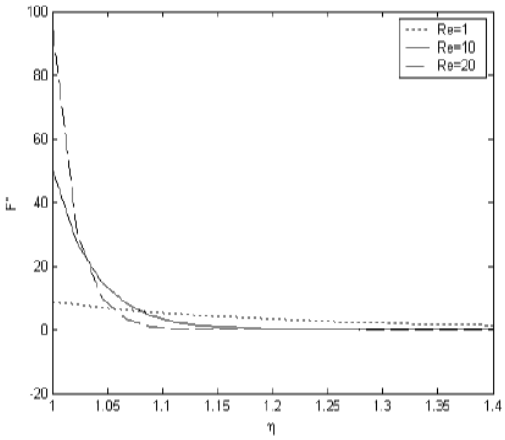
شکل‌ها و نمودارها



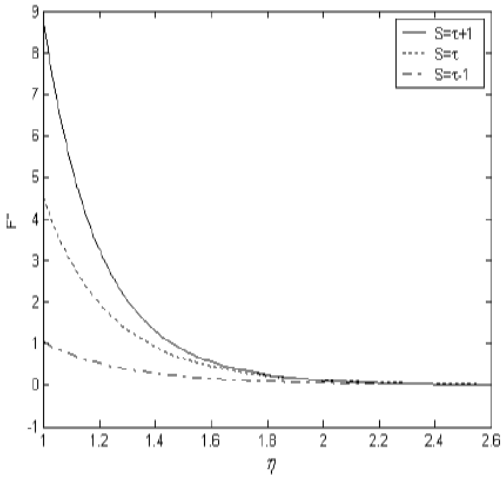
شکل ۱- شماتیک جریان سکون شعاعی بر روی استوانه همراه با حرکت محوری و دورانی استوانه و نفوذ سطحی سیال از دیواره آن



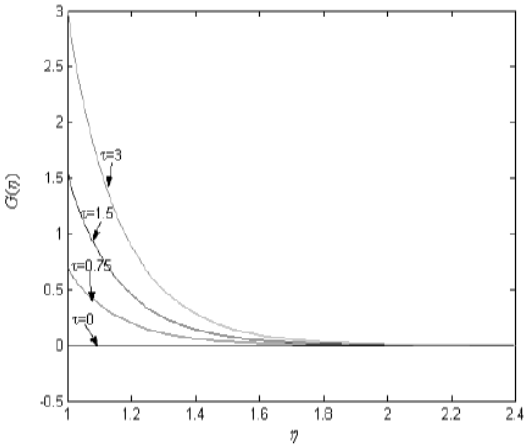
شکل۲- نمودار تابع F برای تابع دمش و مکش سطحی $S(\tau)=(a\tau+b)$ به ازای $\mathrm{Re}=1\ \&\ a=b=1$



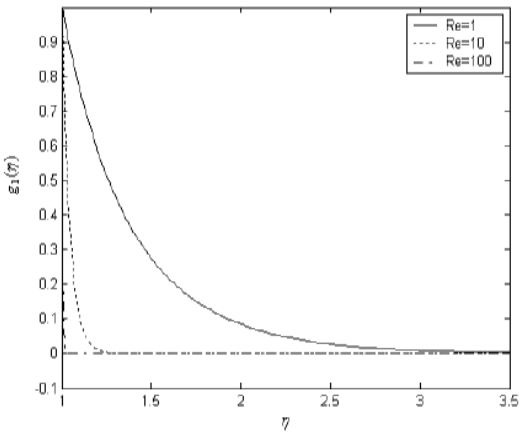
شکل۳- نمودار تابع F'' برای مقادی‌ر مختلف عدد ری‌نولدز در $\tau=1.5$



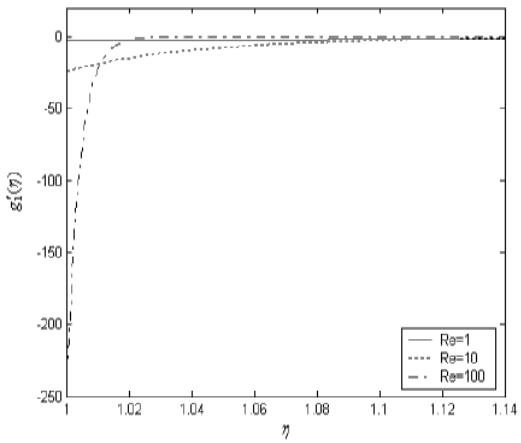
شکل۴- نمودار تابع F'' به ازای مقادیر مختلف رینولدز برای تابع مکش و دمش سطحی $s(\tau)=(a\tau+b)$ به ازای $\tau=1.5\ \&\ a=b=1$



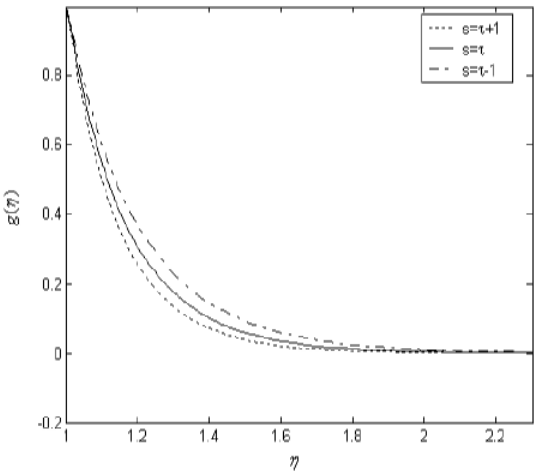
شکل۵- نمای‌ه تابع G بر حسب η در زمانهای مختلف برای تابع حرکت دورانی $\omega(\tau)=\tau$ به ازای $\mathrm{Re}=1$



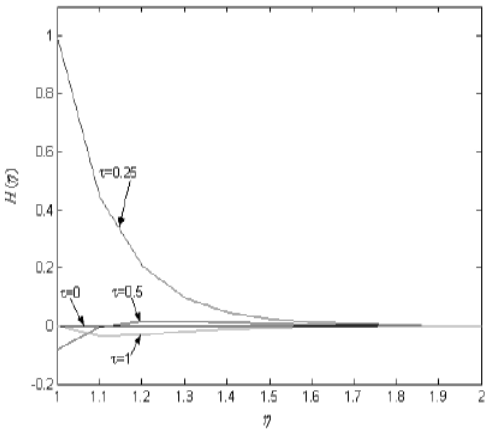
شکل۶- شکل(۶): تاثیر عدد رینولدز روی تابع $g_1(\eta)$ به ازای $\alpha = \beta = 0$



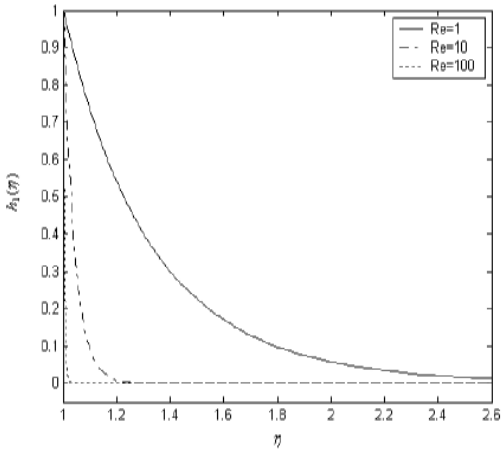
شکل۷- تاثیر عدد رینولدز روی تابع $g_1'(\eta)$ به ازای $\alpha = \beta = 0$



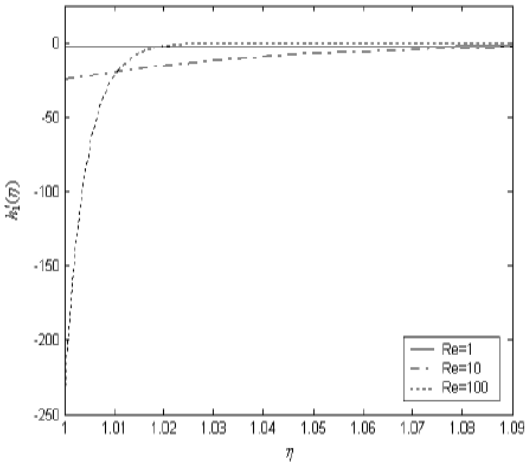
شکل۸- تاثیر توابع زمانی مختلف مکش و دمش سطحی روی تابع $g(\eta)$ به ازای $\mathrm{Re} = 1 \& \alpha = \beta = 0$



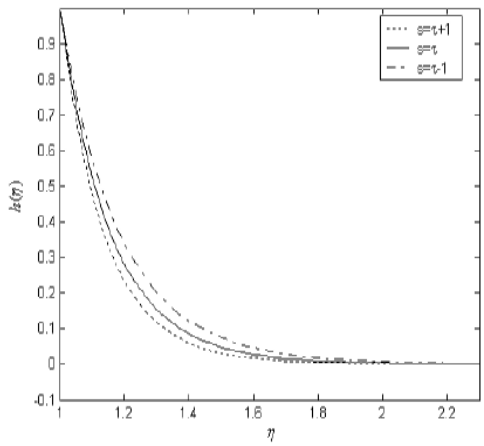
شکل۹ نمایه تابع H بر حسب η در زمانهای مختلف برای تابع حرکت دورانی $V(\tau) = \sin(\tau)$ به ازای $\mathrm{Re} = 1$



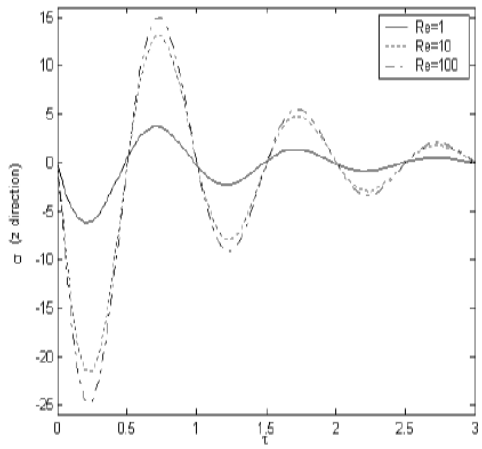
شکل۱۰- تاثیر عدد رینولدز روی تابع $h_1(\eta)$ به ازای $\lambda = 0 \quad \& \ \delta = 1$



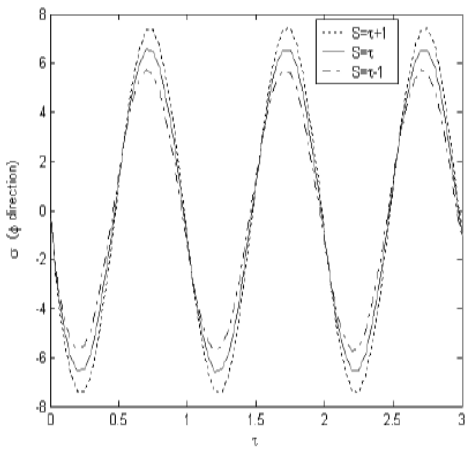
شکل۱۱- تاثیر عدد رینولدز روی تابع $h_1'(\eta)$ به ازای $\lambda = 0 \quad \& \ \delta = 1$



شکل۱۲- تاثیر توابع زمانی مختلف مکش و دمش سطحی روی
تابع $h(\eta)$ **به ازای** $\mathrm{Re}=1 \& \ \lambda=\delta=0$



شکل۱۳- تاثیر عدد رینولدز روی تنش برشی محوری برای
$V(\tau)=\exp(-\tau).\sin(\tau)$



شکل۱۴- تاثیر توابع زمانی مختلف مکش و دمش سطحی روی
تنش برشی مماسی برای $\omega(\tau)=\sin(\tau)$