



: W1926

مدل‌سازی عددی حوضجه تست امواج و مطالعه انتشار و استهلاک موج در آن با روش SPH

SPH

سید احمد میرمحمدی^۱، محمد جواد کتابداری^۲، مهرداد حسنه فراهانی^۳

علیرضا شمخالچیان^۱، محمدرضا جعفرزاده^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد آب - داشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

۲- دانشیار گروه عمران - داشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

Jafarzad@un.ac.ir

Ahmad.mirmohammadi@gmail.com

خلاصه

خلاصه

در این تحقیق با شیوه سازی عددی یک حوضجه تست، انتشار و استهلاک موج با روشن لاگرانژی بدون مش SPH مدل شده است. در این روشن سیال مانند مجموعه ای از ذرات در نظر گرفته شده و معادلات ناویر استوکس به صورت لاگرانژی برای تمامی ذرات در هر گام زمانی حل می‌گردد. در مدل حاضر موج توسط یک موجساز پیستونی تولید شده و در طول مسیر حرکت می‌نماید. در این تحقیق با اجرای این مدل، دو قاز سیال و سطح آزاد قابل مشاهده و بررسی است. در این تحقیق با اجرای این بروانه، موجساز شروع به حرکت کرده و با تولید اولین موج، حرکت و استهلاک آغاز شده و در دیواره داخلی خم خشک شده و از اعبار فرضیات فوق کاسته می‌شود. در دیواره دارای قدرت و دقت زیادی در شیوه سازی سطوح آزاد پیچیده و ازهای کلیدی: مدل‌سازی عددی - روش SPH - انتشار موج - استهلاک موج

مورب، روش احجام محدود.

CODE: W3559

ازیابی فرضیات حل‌های تحلیلی جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده با روش‌های عددی

عددی

سید احمد میرمحمدی^۱، محمد جواد کتابداری^۲، مهرداد حسنه فراهانی^۳

۱- کارشناس ارشد سازه‌های دریایی، داشکده صنعتی امیر کبیر، داشکده مهندسی کشتی سازی و صنایع داریا^۱
۲- استادیار، داشکده صنعتی امیر کبیر، داشکده مهندسی کشتی سازی و صنایع دریایی^۲
۳- کارشناسی ارشد تبدیل ارزی، داشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان^۳

Ahmad.mirmohammadi@gmail.com

خلاصه

خلاصه

در این مقاله، با استفاده از روش عددی حجم محوله Roe-TVD^۱ صحت فرضیات حل‌های تحلیلی جریان فوق بحرانی در خم های با مقطع مستطیلی ارزیابی می‌شود و ملاحظه می‌شود که امواج فوق بحرانی جریان در مسیر خود در خم پیشین شده و در سطح آب فراز و نشیب شکل می‌گیرد. در جریانهای فرق بحرانی با عدد فرود ورودی کمتر از پنج و نیم، سرعت متوسط مقطع در طول خم نسبتاً ثابت است. فرض بدون اصطکاک بودن جریان، یا ثابت بودن انژوی کاملاً قابل قبول است و تغییر سرعت در دیواره خارجی کم می‌باشد. با افزایش عدد فرود ورودی، جریان در دیواره دارای خم خشک شده و از اعبار فرضیات فوق کاسته می‌شود. و ازهای کلیدی: کانال‌های خمیده، رژیم فوق بحرانی، جریان در کانال‌های روباز، امواج



ارزیابی فرضیات حل‌های تحلیلی جریان فوق بحرانی در کanal‌های خمیده با روش‌های عددی

علیرضا شمخالچیان، محمد رضا جعفرزاده

دانشجوی کارشناسی ارشد آب-دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

دانشیار گروه عمران-دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

shamkhalchian_alireza@yahoo.com, Jafarzad@um.ac.ir

خلاصه

در این مقاله، با استفاده از روش عددی حجم محدود Roe-TVD، صحت فرضیات حل‌های تحلیلی جریان فوق بحرانی در خم‌های با مقاطع مستطیلی ارزیابی می‌شود و ملاحظه می‌شود که امواج فوق بحرانی جریان در مسیر خود در خم پخش شده و در سطح آب فراز نشیب شکل می‌گیرد. در جریانهای فوق بحرانی با عدد فرود ورودی کمتر از پنج و نیم، سرعت متوسط مقطع در طول خم نسبتاً ثابت است. فرض بدون اصطکاک بودن جریان، یا ثابت بودن انرژی کاملاً قابل قبول است و تغییرات سرعت در دیواره خارجی کم می‌باشد. با افزایش عدد فرود ورودی، جریان در دیواره داخلی خم خشک شده و از اعتبار فرضیات فوق کاسته می‌شود.

کلمات کلیدی: کanal‌های خمیده، رژیم فوق بحرانی، جریان در کanal‌های روباز، امواج مورب، روش احجام محدود.

۱. مقدمه

هنگامی که یک جریان فوق بحرانی وارد کanal خمیده‌ای می‌شود بر اثر انحنای دیواره‌های کanal، مجموعه‌ای از امواج مورب در سطح آب ایجاد می‌شوند. پیدا کردن شکل کلی، موقعیت و ارتفاع این امواج در دیواره‌ها مورد علاقه محققین متعددی بوده است. کارمن^۱ و ناپ و اینپ^۲ از اولین کسانی بودند که با اعمال فرضیاتی، روابطی نظری برای تعیین موقعیت امواج و ارتفاع سطح آب در خم ارائه کردند [۱]. در سال‌های اخیر از روش‌های عددی و بررسی‌های آزمایشگاهی برای مطالعه این نوع جریان‌ها استفاده می‌شود. ولیانی و کالیفی^۳ با استفاده از روش عددی حجم محدود HLL جریان در خم را مدل‌سازی کردند [۲]. رینر و هاگر^۴ نیز بطور آزمایشگاهی جریان فوق بحرانی در خم را بررسی نمودند [۳]. در این مقاله جریان فوق بحرانی در خم با استفاده از روش عددی Roe-TVD شبیه سازی می‌شود، آنگاه فرضیات حل‌های تحلیلی کارمن و ناپ - اینپ بر اساس نتایج مستقل بدست آمده از روش عددی Roe-TVD مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

۲. هیدرولیک جریان در خم‌ها

در شکل ۱، امواج فوق بحرانی مثبت و منفی در یک خم ترسیم شده است. اولین فراز موج در دیواره خارجی با زاویه θ از ورودی خم و اولین نشیب، درست روبروی آن در دیواره داخلی تولید می‌شوند. موقعیت فراز و نشیب این امواج از هندسه کanal و مشخصات جریان بدست می‌آید [۴].

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2b}{(2r_c + b) \tan \beta} \quad (1)$$

در معادله (۱)، b عرض کanal خمیده، r_c شعاع خم تا خط مرکزی و زاویه β بر حسب عدد فرود ورودی کanal (Fr_0) تعریف می‌شود.

-
1. Karman
 2. Knap and Ippen
 3. Valiani and Caleffi
 4. Reinauer and Hager

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Fr_0}\right) ; \quad Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (2)$$

در معادله (۲) پارامترهای V_0 , h_0 به ترتیب عمق و سرعت آب در ورودی کanal(کanal بالا دست) و g شتاب جاذبه می‌باشد. در محاسبات نظری فرض بر آن است که پس از تشکیل اولین موج، مجموعه امواج متواالی با فراز و نشیب‌های پی در پی در امتداد خم در زوایای $(2\theta, 3\theta, \dots)$ ، عیناً بدون استهلاک مطابق شکل توسعه پیدا می‌کنند.

کارمن با فرضیات ۱ - جریان دو بعدی در کanal افقی با مقطع مستطیلی ۲- سرعت متوسط ثابت بر سطح مقطع ۳- جریان بدون اصطکاک، پروفیل سطح آب را در دیواره بدست آورد [۵].

$$\alpha = \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Fr^2 - 1}} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{Fr^2 - 1}} + \alpha_0 \quad 0 < \alpha < \theta \quad (3)$$

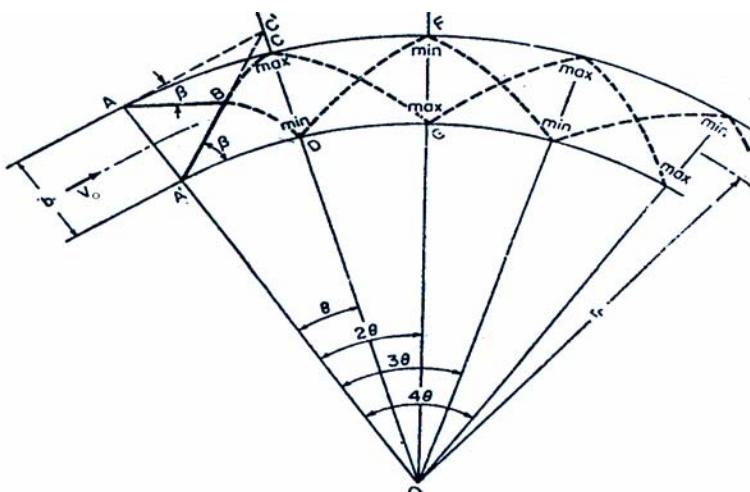
در معادله (۳)، α زاویه خم از ابتدای آن، α_0 مقدار ثابت و $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$ عدد فرود می‌باشد. پارامترهای h و V_0 عمق آب دیواره در زاویه α و

سرعت آب در کanal بالا دست هستند. در دهانه ورودی خم، $\alpha = 0$ و عدد فرود مشخص است بنابراین می‌توان مقدار ثابت α_0 را محاسبه کرد.

نایپ و این شروط اول و دوم کارمن را پذیرفتند و رابطه زیر را برای پروفیل سطح آب ارائه دادند، [۴]:

$$\frac{h}{h_0} = Fr_0^2 \sin^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \quad 0 < \alpha < \theta \quad (4)$$

در معادله (۴)، h ارتفاع آب در زاویه α و h_0 ارتفاع آب در کanal ورودی به خم تعریف می‌شود. اگر از معادله (۱) موقعیت فراز (نشیب) موج تعیین گردد می‌توان با استفاده از روابط (۳) یا (۴) ارتفاع بیشینه (کمینه) آن را محاسبه کرد. مطالعات آزمایشگاهی نایپ و این نشان داد که سرعت مماسی در دیواره خارجی نسبتاً ثابت می‌باشد.



شکل ۱- تشکیل امواج مورب جریان فوق بحرانی در یک خم [۱].

۳. معادلات آب‌های کم عمق

با استفاده از معادلات آب‌های کم عمق، مشخصات جریان فوق بحرانی در کanal‌های خمیده به دست می‌آید. شکل دیفرانسیلی معادلات آب‌های کم عمق در دو بعد به صورت زیر است [۶]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (5)$$

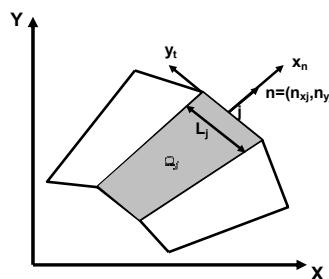
در معادله (۵)، U بردار متغیرهای بقاء، F بردار شار در راستای محور x و G بردار جملات چشمی می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}; G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}; S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(s_{0x} - s_{fx}) \\ gh(s_{0y} - s_{fy}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

در این معادلات، h تراز سطح آب در هر نقطه، g شتاب ثقل، u مؤلفه سرعت متوسط گیری شده در عمق در راستای $x(y)$ و S_{0x} و S_{0y} به ترتیب شیب بستر و شیب اصطکاک در جهت $x(y)$ می‌باشد. در این تحقیق با فرض کانال افقی و صرفظیر کردن از اصطکاک، مؤلفه‌های بردار جملات چشمی صفر می‌شوند.

۴. الگوی دو بعدی روش عددی Roe

از آنجاییکه حل تحلیلی معادلات آب‌های کم عمق دو بعدی برای خم‌ها وجود ندارد از حل عددی برای بدست آوردن مشخصات جریان استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۲، سیستم معادلات (۵) به صورت رابطه (۷) جداسازی می‌شود [۷].



شکل ۲- سیستم مختصات اصلی و محلی برای محاسبه شار دو بعدی.

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^{nb} (F_j^* n_{x,j} + G_j^* n_{y,j}) L_j + S_j \Delta t \quad (7)$$

Ω_i مساحت سلول، L_j طول وجه، $(n_{x,j}, n_{y,j})$ مؤلفه‌های بردار نرمال خارجی به وجه مشترک j ، Δt گام زمانی، بالاترین شماره گام زمانی و nb تعداد وجهه سلول می‌باشد. (در این مقاله به علت این که از سلول‌های چهار گوش استفاده شده است، $nb=4$ می‌باشد.).

مقادیر شار عددی F^* و G^* در رابطه (۷) با استفاده از روش Roe به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F^* = \frac{1}{2}(F_L + F_R) + \frac{1}{2}[\tilde{A}](U_R - U_L) \quad G^* = \frac{1}{2}(G_L + G_R) + \frac{1}{2}[\tilde{A}](U_R - U_L) \quad (8)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = n_x \tilde{u} + n_y \tilde{v} \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{c} \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{c} \quad (9)$$

$$|\tilde{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |\tilde{\lambda}_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\tilde{\lambda}_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\tilde{\lambda}_3| \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \frac{\partial F}{\partial U} = R |\tilde{\Lambda}| R^{-1} \quad (10)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -n_y & \tilde{u} + \tilde{c} n_x & \tilde{u} - \tilde{c} n_x \\ n_x & \tilde{v} + \tilde{c} n_y & \tilde{v} - \tilde{c} n_y \end{bmatrix}; \quad R^{-1} = \frac{1}{2\tilde{c}} \begin{bmatrix} 2\tilde{c}(\tilde{u}n_y - \tilde{v}n_x) & -2\tilde{c}n_y & 2\tilde{c}n_x \\ \tilde{c} - \tilde{u}n_x - \tilde{v}n_y & n_x & n_y \\ \tilde{c} + \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y & -n_x & -n_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

مقادیر متوسط \tilde{u} و \tilde{v} در روش Roe به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\tilde{u} = \frac{u_L \sqrt{h_L} + u_R \sqrt{h_R}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} \quad \tilde{v} = \frac{v_L \sqrt{h_L} + v_R \sqrt{h_R}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} \quad \tilde{h} = \sqrt{h_L h_R} \quad \tilde{c} = \sqrt{g \frac{h_L + h_R}{2}} \quad (12)$$

متغیرهای با اندیس L و R بر موز سلول و در سمت چپ و راست آن تعریف شده‌اند. برای رسیدن به دقت مرتبه دو، متغیرهای اولیه در هر سلول به صورت تابعی خطی نوشته می‌شوند. برای کنترل نوسانات، از محدود کننده شبی استفاده می‌شود. در این مقاله از محدود کننده شبی استفاده می‌گردد و بنابراین در هر راستای S مقادیر U به شرح زیر بیان می‌شوند [8]:

$$U_n(s, t_n) = \tilde{U}_i^n + \sigma_i^n (s - s_i) \quad s_{i-\frac{1}{2}} < s < s_{i+\frac{1}{2}} \quad s_i = s_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta s \quad (13)$$

$$\sigma_i^n = \min \text{mod} \left(\frac{\tilde{U}_i^n - \tilde{U}_{i-1}^n}{\Delta s}, \frac{\tilde{U}_{i+1}^n - \tilde{U}_i^n}{\Delta s} \right); \quad \min \text{mod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{if } |a| < |b| \text{ and } ab > 0 \\ b & \text{if } |b| < |a| \text{ and } ab > 0 \\ 0 & \text{if } ab \leq 0 \end{cases}$$

مقدار متوسط بردار متغیرهای بقا است که در هر گام از حل عددی به دست می‌آید. لازم است شرط کورانت-فردریخ-لوی (CFL)، برای همگرایی عددی در تمام سلول‌ها برقرار باشد.

$$N_{CFL} = \frac{|V_i| + \sqrt{gh_i}}{(\Omega_i / P_i) / \Delta t} \leq 1 \quad (14)$$

که در آن V_i مقدار سرعت برآیند و P_i محیط سلول i می‌باشد.

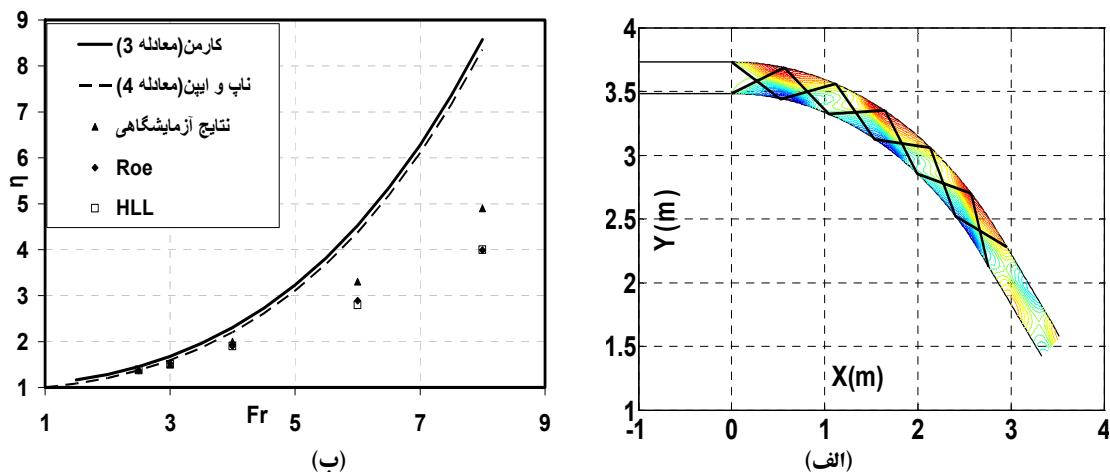
۵. شبیه سازی جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده با روش‌های عددی و آزمایشگاهی

رینر و هاگر در سال ۱۹۹۷ جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده را به طور آزمایشگاهی مطالعه کردند. مشخصات هندسی یکی از کانال‌های مورد بررسی آنها به شرح زیر بود [3]:

$$\text{عرض کanal} = 0.25m \quad \text{زاویه خم} = 51^\circ \quad \text{شعاع تا خط مرکزی کanal} = 3.607m$$

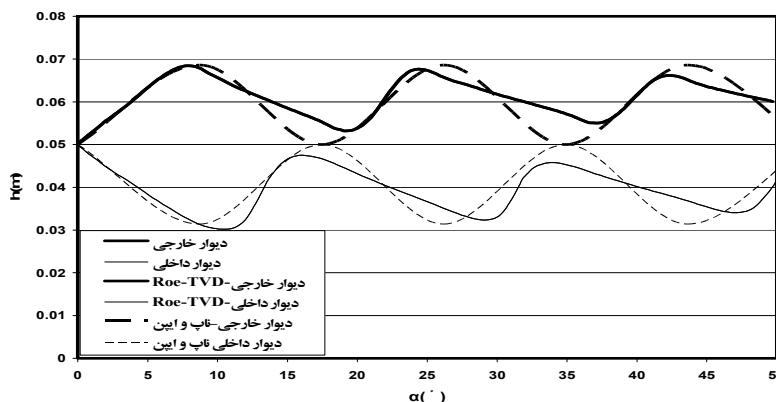
در سال ۲۰۰۵ ولیانی و کالفی کانال خمیده رینر و هاگر را با استفاده از روش حجم محدود HLL مدل سازی کردند [2]. در شکل ۳-الف، نتایج بدست آمده از مدل عددی انجام شده در این مقاله (روش Roe-TVD) برای کانال خمیده رینر و هاگر با روش تحلیلی ناپ-ایپن به ازای عدد فرود ۲/۵ مقایسه شده است. منحنی‌های تراز مربوط به روش عددی می‌باشد و خطوط توپر، موقعیت امواج مورب را از رابطه (۱) مشخص می‌کند. در شکل ۳-ب نیز نسبت عمق اولین فراز موج به عمق جریان در کانال بالا درست (۶) حاصله از روش عددی Roe-TVD، روش عددی HLL ولیانی و کالفی، روابط نظری کارمن و ناپ-ایپن به همراه نتایج آزمایشگاهی رینر و هاگر ترسیم شده است. عدد فرودهای ورودی برابر ۲/۵، ۳، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ در نظر گرفته شد. عمق اولیه در تمام حالات برابر ۵ cm بود. همانطور که در شکل ۳-ب مشاهده می‌شود، به ازای اعداد فرود مختلف، پاسخ روش‌های عددی HLL و Roe-TVD، بسیار نزدیک به یکدیگر است. همچنین در اعداد فرود کمتر از ۴، جواب‌های عددی و روابط نظری بسیار نزدیک به نتایج آزمایشگاهی است در حالیکه با افزایش عدد فرود، فاصله جواب‌های عددی و نظری از نتایج آزمایشگاهی بیشتر می‌شود. این افزایش اختلاف در روابط نظری با آزمایشگاهی بیشتر می‌باشد.

در شکل ۴ پروفیل طولی جریان در دیوارهای داخلی و خارجی بر اساس نتایج عددی و پیش‌بینی‌های ناپ-ایپن به ازای عدد فرود ۲/۵ نشان داده شده است، همانطور که ملاحظه می‌شود منحنی اولین موج و اعمق فراز و نشیب آن در مدل عددی به مقادیر نظری بسیار نزدیک است. در ادامه، امواج عددی به طور طبیعی پخش می‌شوند اما امواج نظری مطابق فرض، عیناً تکرار می‌گردد. بدیهی است که فرض اخیر چندان معقول به نظر نمی‌رسد. بنابراین بررسی صحت سایر مفروضات حل تحلیلی ضروری به نظر می‌رسد.



شکل ۳-الف) موقعیت امواج بر اساس حل عددی و رابطه ناپ و این-ایپن برای خم رینر و هاگر در عدد فرود ۵/۲.

.۳-ب) مقایسه نتایج عددی با روابط نظری و آزمایشگاهی ($\eta = h_{\max} / h_0$)



شکل ۴- مقایسه پروفیل طولی جریان در دیوارهای داخلی و خارجی بر اساس نتایج عددی Roe-TVD و رابطه نظری ناپ-ایپن.

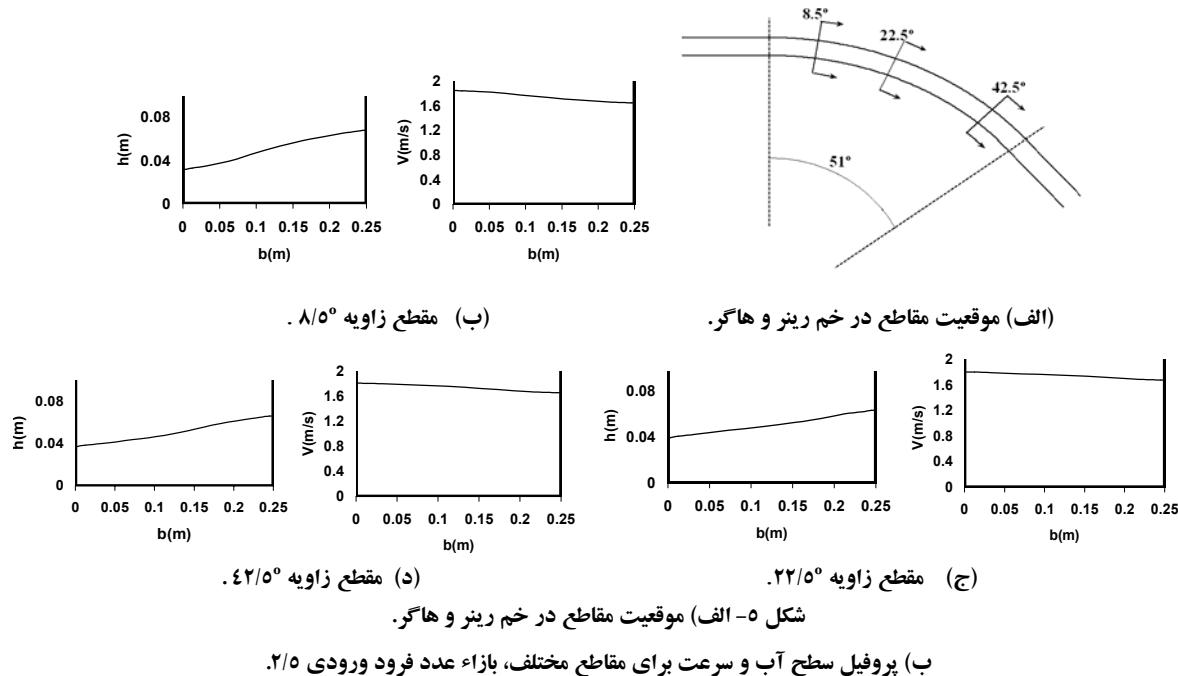
۶. ارزیابی فرضیات حل‌های تحلیلی با استفاده از روش‌های عددی

همانطور که در بخش ۲ ذکر شد کارمن و ناپ-ایپن با اعمال فرضیاتی توانستند حل تحلیلی جریان را در کانال‌های خمیده به دست آورند. فرض اول مربوط به ماهیت جریان و هندسه کانال است و قابل مناقشه نیست. در ادامه مقاله صحت فرض‌های بعدی مستقلأً با استفاده از حل معادلات آب‌های کم عمق به کمک روش‌های عددی بررسی می‌شوند.

۶-۱. فرض ثابت بودن سرعت متوسط در طول کanal

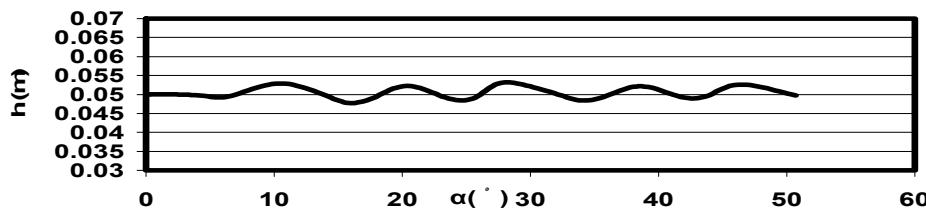
برای تحقیق در مورد فرض فوق، سه مقطع با زوایای $5^\circ/5^\circ/5^\circ$ و $22^\circ/5^\circ/5^\circ$ از ابتدای خم درنظر گرفته شد، در شکل ۵-الف موقعیت مقاطع نشان داده شده است. در شکل‌های ۵-ب تا ۵-د پروفیل سطح آب و سرعت در این مقاطع، به ازای عدد فرود ورودی $5/2$ رسم شده است. همانطور که دیده می‌شود تغییرات سطح آب در هر مقطع تقریباً خطی و نسبت به محور مرکزی کanal، متقارن معکوس می‌باشد به همین جهت سطح مقطع جریان در طول خم ثابت باقی می‌ماند. بنابراین با توجه به ثابت بودن دبی جریان، فرض ثابت بودن سرعت متوسط در هر مقطع در طول خم منطقی می‌باشد.

در شکل ۶ پروفیل سطح آب در شعاع مرکزی خم ترسیم شده است. ملاحظه می شود که عمق سطح آب، با تغییراتی کمتر از ۵ درصد، تقریباً ثابت و برابر عمق جریان ورودی به خم (۵ cm) می باشد.



شکل ۵-الف) موقعیت مقاطع در خم رینر و هاگر.

ب) پروفیل سطح آب و سرعت برای مقاطع مختلف، بازه عدد فرود ورودی ۰/۵-۲/۵.



شکل ۶-پروفیل سطح آب در خط مرکزی کانال برای عدد فرود ورودی ۰/۵-۲/۵.

جدول ۱-سرعت متوسط مقاطع مختلف (m/s) به ازای اعداد فرود گوناگون.

$Fr \backslash Section$	$a=0^\circ$ (کانال بلاست)	$a=8.5^\circ$	$a=22.5^\circ$	$a=42.5^\circ$
2.5	1.7505	1.7456	1.7459	1.7424
3	2.1006	2.0940	2.0959	2.0919
4	2.8009	2.7937	2.7842	2.7780
5.5	3.8512	3.8443	3.3726	3.7843
6	4.2013	4.1926	3.8299	4.1337
8	5.6017	5.5899	5.0643	5.4455

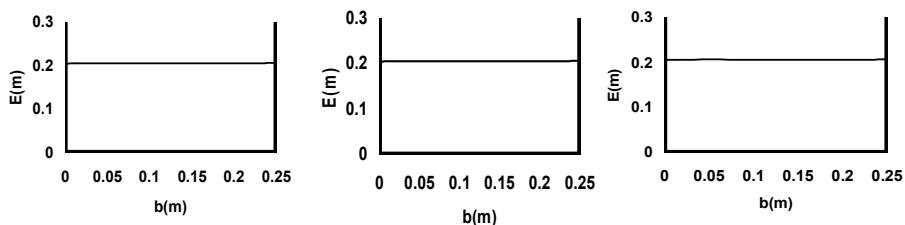
جدول ۲-درصد تغییرات سرعت متوسط به ازای اعداد فرود مختلف.

$Fr \backslash Section$	$a=8.5^\circ$	$a=22.5^\circ$	$a=42.5^\circ$
2.5	0.2814	0.2645	0.4629
3	0.3139	0.2235	0.4168
4	0.2564	0.5949	0.8169
5.5	0.1784	12.4281	1.7373
6	0.2059	8.8392	1.6090
8	0.2106	9.5936	2.7884

در جدول ۱ سرعت‌های متوسط در سه مقطع و به ازای اعداد فرود ورودی مختلف به خم ارائه شده است. جدول ۲، بیانگر درصد تغییرات سرعت متوسط در طول کanal به سرعت متوسط کanal بالا درست به ازای اعداد فرود مختلف می‌باشد. تجربیات عددی و تحلیل‌های نظری نشان می‌دهد که حداکثر تغییرات سرعت متوسط به ازای $Fr \leq 5.5$ از یک درصد کمتر است بنابراین فرض ثابت بودن سرعت متوسط در طول خم حداقل در این محدوده جریان فرض مناسبی به نظر می‌رسد. در جریان‌های با $Fr > 5.5$ ، خشک شدگی جریان در دیواره داخلی خم اتفاق می‌افتد و بنابراین فرض جریان در کanal مستطیلی بهم می‌خورد.

۶-۲. فرض جویان بدون اصطکاک

در صورتیکه از اصطکاک در خم صرفنظر شود انرژی مخصوص $(E = h + v^2/2g)$ در تمام مقاطع ثابت باقی می‌ماند. در شکل ۷ انرژی مخصوص در سه مقطع $42/5^\circ$ ، $22/5^\circ$ و $8/5^\circ$ ترسیم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در هر مقطع انرژی مخصوص ثابت و برابر انرژی مخصوص در سایر مقاطع است، در جدول ۳ مقدار انرژی مخصوص متوسط در مقاطع فوق و به ازای اعداد فرود ورودی مختلف درج شده است. در جدول ۵، درصد تغییرات انرژی مخصوص در طول کanal نسبت به انرژی مخصوص کanal بالا درست به ازای اعداد فرود مختلف ارائه شده است. تجربیات عددی و تحلیل‌های نظری نشان می‌دهد که حداکثر تغییرات انرژی مخصوص به ازای $Fr \leq 5.5$ در حدود یک درصد است بنابراین فرض ثابت بودن انرژی مخصوص متوسط در طول خم نیز حداقل در این محدوده جریان فرض مناسبی به نظر می‌رسد. در جریان‌های با $Fr > 5.5$ همانطور که ذکر شد خشک شدگی جریان در دیواره داخلی خم اتفاق می‌افتد و فرض جریان در کanal مستطیلی بهم می‌خورد.



الف) انرژی مخصوص مقطع $8/5^\circ$. ب) انرژی مخصوص مقطع $22/5^\circ$. ج) انرژی مخصوص مقطع $42/5^\circ$.

شکل ۷- انرژی مخصوص برای مقاطع مختلف.

جدول ۳- انرژی مخصوص مقاطع مختلف به ازای اعداد فرود مختلف.

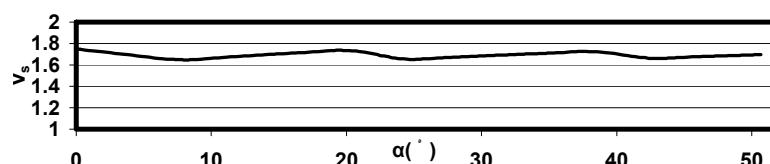
Fr \ Section	$\alpha=0^\circ$ (کanal بالا درست)	$\alpha=8.5^\circ$	$\alpha=22.5^\circ$	$\alpha=42.5^\circ$
2.5	0.2063	0.2061	0.2059	0.2056
3	0.2750	0.2746	0.2742	0.2738
4	0.4500	0.4493	0.4461	0.4452
5.5	0.8060	0.8052	0.6862	0.7818
6	0.9500	0.9480	0.8573	0.9232
8	1.6500	1.6457	1.4551	1.5658

جدول ۴- درصد تغییرات انرژی مخصوص مقاطع مختلف نسبت به کanal بالا درست.

Fr \ Section	$\alpha=8.5^\circ$	$\alpha=22.5^\circ$	$\alpha=42.5^\circ$
2.5	0.0764	0.1517	0.2915
3	0.1292	0.2812	0.4300
4	0.1578	0.8718	1.0597
5.5	0.0971	14.8589	2.9945
6	0.2094	9.7611	2.8186
8	0.2623	11.8139	5.1020

۳-۶. بررسی ثابت بودن سرعت در دیوار خارجی

مطالعات آزمایشگاهی ناپ-ایین نشان داد که سرعت در طول دیوار خارجی ثابت است. در شکل ۸ پروفیل سرعت مماسی در دیوار خارجی (V_s) بر اساس نتایج حل عددی Roe-TVD برای عدد فرود $2/5$ ترسیم شده است. در جدول ۵ سرعت مماسی و تغییرات نسبی آن در دیوار خارجی به ازای اعداد فرود مختلف درج شده است. همانطور که دیده می شود حداکثر تغییرات نسبی سرعت کمتر از 4% درصد است. با توجه به این نکته و با درنظر گرفتن شکل ۸، فرض ثابت بودن سرعت مماسی در دیوار خارجی مناسب است.



شکل ۸- پروفیل سرعت مماسی در دیوار خارجی بر اساس حل عددی Roe-TVD

جدول ۵- سرعت مماسی در دیوار خارجی در مقاطع مختلف.

$Fr \backslash section$	$\alpha=0^\circ$ (کانال پلاست)	$\alpha=8.5^\circ$	$\alpha=22.5^\circ$	$\alpha=42.5^\circ$	حداکثر نسبی تغییرات سرعت مماسی (%)
2.5	1.7489	1.8479	1.8012	1.8071	2.5240
3	2.0987	1.9817	2.0644	2.0444	4.0040
4	2.7990	2.6738	2.7028	2.6616	1.5232
5.5	3.8512	3.7258	3.6974	3.7483	4.1584
6	4.1993	4.0741	4.0325	4.0869	1.3310
8	5.5994	5.4677	5.3953	5.4593	1.3227

۷. نتیجه‌گیری

جريان عددی در کانالهای خمیده با مقطع مستطیلی با استفاده از روش عددی Roe-TVD مدل‌سازی شد. نتایج عددی نشان می‌دهد که امواج فوق بحرانی جريان در مسیر خود در خم پخش می‌شوند. دو فرض ثابت بودن سرعت متوسط مقطع در طول کانال و بدون اصطکاک بودن جريان، یا ثابت بودن انرژی تأیید می‌شوند. همچنین تغییرات سرعت در دیواره خارجی نسبتاً کم می‌باشد. با افزایش عدد فرود ورودی، جريان در دیواره خم داخلی خشک می‌شود و از دقت فرضيات فوق کاسته می‌شود.

۸. مراجع

- Chow, V. T., (1986), "Open Channel Hydraulics," McGraw-Hill Intern, 680p.
- Valiani, A. and Caleffi, V., (2001), "Brief Analysis Of Shallow Water Equations Suitability To Numerically Simulate Supercritical Flow In Sharp Bends," ASCE Vol. 131, No. 10, 912-916.
- Reinauer, R. and Hager, H., (1997), "Supercritical Bend Flow," ASCE, Vol. 123(3), 208-218.
- Knapp, R. T., (1951), "Design Of Channel Curves For Supercritical Flow," 2nd paper in High-velocity flow in open channels: A symposium, Transactions, ASCE, Vol. 116, 296-325.
- Kármán T. V., (1938), "Eine Praktische Anwendung Der Analogie Zwischen Ueberschall-Strömung In Offenen Gerinnen," ZAMM, 18, 49-56.
- Toro, E., (2001), "Shock Capturing Methods For Free Surface Shallow Flows," John Wiley, ChiChester, New York, 308p.
- Gomez, L., (2005), "An Unstructured Finite Volume Model For Unsteady Turbulent Shallow Water Flow With Wet-dry Fronts Numerical Solver And Experimental Validation," thesis doctoral, UNIVERSIDAD DE A CORUNA, 248p.
- Leveque, R.j., (2002), "Finite Volume Methods For Hyperbolic Systems," Cambridge University press, New York, 558p.