



مدلسازی و تحلیل انتقال مواد دانه‌ای توسط صفحه مرتعش

جواد گوهریان^۱، حمید اختراعی طوسی^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ javad.goharian@gmail.com

^۲ استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ ekhteraee@um.ac.ir

چکیده

تحلیل مورد درست آزمائی قرار گرفت. اقسام مختلفی از فرآیند انتقال ارتعاشی مدلسازی و تاثیر فرکانس روی کیفیت انتقال بررسی شد.

این مقاله به بررسی فرآیند انتقال مواد دانه‌ای^۱ توسط ارتعاشات می‌پردازد. بدین منظور با در نظر گرفتن دانه‌ها به عنوان کره‌های ویسکوالاستیک، متغیرهای حرکتی به کمک حل معادلات انتقال و دوران هر دانه بدست می‌آیند. بر این اساس ضمن معرفی یک مدل پایه، عوامل موثر بر سرعت انتقال مواد مورد ارزیابی قرار گرفته، تاثیر فرکانس یک صفحه مرتعش روی قابلیت انتقال مطالعه می‌شود. نتایج مویده آنستکه در فرکانس‌های بالا به ازاء جریان ورودی و دامنه ارتعاش ثابت، تغییر فرکانس تاثیریری بر سرعت انتقال ندارد.

کلمات کلیدی: مدلسازی عددی، روش عناصر مجزا، انتقال ارتعاشی مواد، مکانیک مواد دانه‌ای.

۱. مقدمه

۲. روش عناصر مجزا

روش عناصر مجزاء مبتنی بر کاربرد مکرر معادلات حرکت نیوتنی برای تحلیل یک مجموعه متشکل از تعداد زیادی عنصر مجزا می‌باشد. وجود کامپیوترهای پرسرعت کاربرد این شیوه تحلیل و پرداختن به مدلسازی مواد دانه‌ای را موجه نموده است. در این روش تحلیل، مجموعه‌ای متشکل از N دانه با ابعاد و خواص معین ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. حرکت انتقالی و دورانی دانه i ام، توسط قانون دوم نیوتن برای مرکز جرم آن به صورت زیر بیان می‌شود:

انتقال مواد در صنایع مختلف از اهمیت فن آوری و اقتصادی زیادی برخوردار است. یکی از روش‌های مهم انتقال مواد، کاربرد لرزش و ارتعاش است. در پیوند با این فرآیند در این مقاله مدلسازی عددی حرکت مواد دانه‌ای بعنوان ابزار مناسبی برای مطالعه پدیده انتقال این مواد مورد توجه قرار گرفته است.

کلادنی^۱ (۱۷۸۷) از اولین افرادی است که بر روی پدیده ارتعاشی بستر مواد دانه‌ای مطالعه نموده است [۱]. باخمن^۲ (۱۹۴۰) و کویل^۳ (۱۹۵۴) نشان داده‌اند که رفتار بستر مواد مرتعش تحت تاثیر عمق بستر است [۱]. در سالهای اخیر افراد زیادی در زمینه مدلسازی حرکت دانه‌ها به تحقیق و تفحص پرداخته‌اند. بررسی حرکت مواد دانه‌ای درون کوره دوار [۲]، جداسازی محوری مواد دانه‌ای درون یک سبندر دوار [۳] و مدلسازی فرایند آسیاب کردن به روش عناصر مجزا [۴] از زمره پژوهشهای مرتبط با حرکت و انتقال دانه‌ها می‌باشند.

نیروی \vec{F}_i و گشتاور \vec{M}_i بر روی دانه i ام به جرم m_i و ممان اینرسی J_i اعمال می‌شوند. نیروها و گشتاورها تابعی از موقعیت \vec{r}_j ، وضعیت زاویه‌ای φ_j ، سرعت خطی \vec{v}_j و زاویه‌ای ω_j دانه هستند. مدل‌های در نظر گرفته شده برای مولفه‌های عمودی و مماسی این نیروها در ادامه معرفی شده است.

هرتز نیروی عکس‌العملی بین دو کره ویسکوالاستیک را بصورت تابعی از تغییر شکل ξ ، ثابت اتلاف انرژی A ، مدول یانگ Y و نسبت پواسون ν به شرح زیر معرفی نموده است [۶]:

$$F^n = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \left(\xi^{3/2} + A\sqrt{\xi} \frac{d\xi}{dt} \right) \quad (2)$$

که در آن R_{eff} شعاع موثر دو دانه برخورد کننده i و j به صورت زیر است.

$$R_{eff} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \quad (3)$$

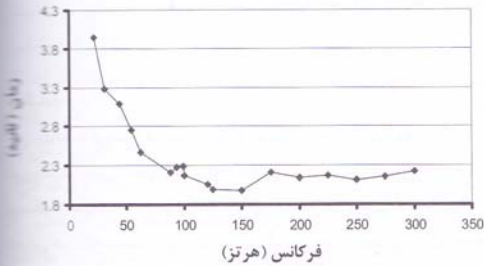
از سوئی برای مولفه مماسی نیروی تماس دو دانه طبق مدل نیرویی هاف می‌توان نوشت [۶]:

$$F^t = -\text{sign}(v_{rel}^t) \cdot \min \{ \gamma^t \cdot |v_{rel}^t|, \mu \cdot |F^n| \} \quad (4)$$

که در آن v_{rel}^t سرعت نسبی دو دانه در نقطه برخورد، μ ضریب اصطکاک کلمب و γ^t ثابت میرایی است.

Granular Materials
Chladn
Bachmann
Kral
Discrete Element Method

اجراء این برنامه بدلیل حجم زیاد محاسبات، طولانی می باشد. به منظور کاهش زمان پردازش با توجه به رفتار مجانبی محلی شکل ۲، دوره اجراء برنامه به زمانی محدود شده است که خروجی به سطح ۸۰٪ دبی ورودی می رسد. نتایج مدل سازی فرآیند برای ۱۸ فرکانس مختلف در شکل ۴ به نمایش درآمده است.



شکل ۴: تاثیر فرکانس بر زمان پایدار شدن پدیده انتقال لرزشی

۴. نتیجه گیری و جمع بندی

بر پایه تحلیل انتقال لرزشی مواد دانه ای مشخص شد که روش عناصر متناهی شیوه مناسبی برای بررسی این فرآیند می باشد. نتایج تحلیل حاکی از آنست که در صورت ثابت ماندن جریان ورودی پس از سیری شدن یک دوره کوتاه حالت پایداری در انتقال مواد شکل می گیرد علاوه بر آن سرعت انتقال لرزشی تحت تاثیر فرکانس لرزش است بطوریکه با افزایش فرکانس سرعت انتقال مواد نیز افزایش می یابد. با این وجود در فرکانس های بالا تغییر فرکانس تاثیری بر سرعت انتقال نخواهد داشت.

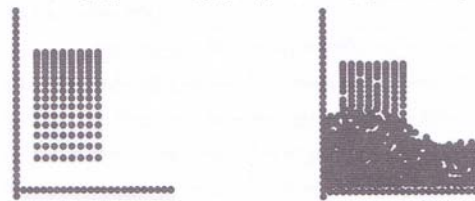
مراجع

[1]- Wassgren, C., *Vibration of granular materials*, PhD Thesis, California Institute of Technology, 1997.
 [2]- Bernard, P., and Dziugys, A., "Numerical simulation of the motion of granular material using object-oriented techniques," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 1983-2007, 2002.
 [3]- Rapaport, D., "studies of axial granular segregation in a rotating cylinder," *J. Phys. Rev.*, Vol. 65, 061306.
 [4]- Yu, A., "DEM simulation of the flow of grinding media in IsaMill," *Journal of Minerals Engineering*, Vol. 19, pp. 984-994, 2006.
 [5]- Poschel, T., Schwager, T., and Saluena, C., "Vertically shaken column of spheres. Onset of fluidization," *Europ. Phys. J. C*, Vol. 4, 233, 2001.
 [6]- Brilliantov, N., Spahn, F., Hertzsch, J., and Poschel, T., "A model for collisions in granular gases," *J. Phys. Rev.*, Vol. 53, 1996.

۳. مدل سازی ریزش و انتقال مواد دانه ای بر اثر ارتعاش

پس از نگارش نرم افزار مناسب بر پایه مدل عناصر مجزا صحت مدل ریاضی و برنامه نگارش یافته به محک سنجش زده شد. بدین منظور نتایج حاصل از بازآفرینی پدیده موسوم به سیالی شدن با نتایج تجربی مرجع [۵] مقایسه گردیده. پس از حصول اطمینان از کارائی روش، فرآیند انتقال مواد مورد مدل سازی قرار گرفت.

در آغاز دانه ها با دبی ورودی ۸۰۰ کیلوگرم بر ثانیه شروع به ریزش نموده و پس از رسیدن و برخورد با صفحه ای مرتعش به دلیل تاثیر متقابل سایر دانه ها مانند شکل ۱ به جلو رانده می شوند. برای محدود نمودن تعداد دانه های مورد بررسی هردانه ای که از انتهای صفحه عبور نماید پس از ثبت زمان خروج از حوزه مطالعه حذف گردیده، زمان ثبت شده برای محاسبه دبی خروجی استفاده می شود.

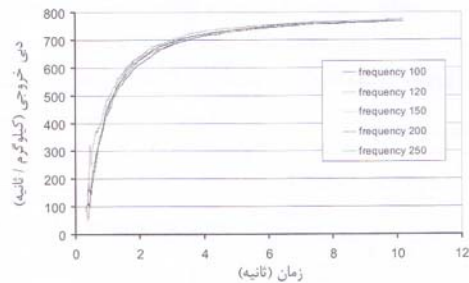


$t = 0.2 \text{ sec}$

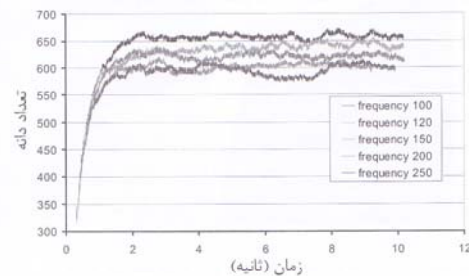
$t = 6 \text{ sec}$

شکل ۱: دو نما از بازسازی فرآیند ریزش دانه ها روی صفحه مرتعش

شکل ۲ نشان دهنده دبی خروجی بر حسب زمان در ۵ فرکانس ارتعاشی متفاوت می باشد. همانطور که در شکل ۲ دیده می شود با افزایش فرکانس، حالت پایدار در زمان کوتاهتری شکل گرفته و دبی خروجی به مقدار دبی ورودی میل میکند. شکل ۳ نشان دهنده تعداد دانه های روی صفحه در طول زمان می باشد.



شکل ۲: دبی خروجی از انتهای صفحه مرتعش در طول زمان



شکل ۳: تعداد دانه موجود روی صفحه در طول زمان

مدلسازی و تحلیل انتقال مواد دانه‌ای توسط صفحه مرتعش

جواد گوهریان^۱، حمید اختراعی طوسی^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ javad.goharian@gmail.com
^۲ استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ ekhteraee@um.ac.ir

چکیده

در حالیکه پیش فرض اغلب تحلیل‌های مکانیکی وجود یک محیط مادی پیوسته یا همبند است بسیاری از محیط‌های مادی به خلاف ظاهر پیوسته دارای بنیادی ناپیوسته و مجزا هستند. نمونه بارز این نوع از مواد پودر، خاک، شن و ماسه است. بدیهی است استفاده از فرض پیوستگی در تحلیل این محیط‌ها منجر به حصول پاسخ نزدیک به واقعیت نخواهد شد. در این راستا بدلیل اهمیت پدیده‌های مرتبط با انتقال مواد دانه‌ای^۱ این مقاله به تحلیل رفتار دانه‌ها تحت ارتعاشات اختصاص داده شده است. بدین منظور با در نظر گرفتن دانه‌ها به عنوان کره‌های ویسکوالاستیک، متغیرهای حرکتی به کمک حل معادلات انتقال و دوران هر دانه بدست می‌آیند. ضمن معرفی یک مدل پایه شامل چشمه مولد دانه، بستر مرتعش انتقال دانه‌ها و یک چاه در انتهای مسیر، عوامل موثر بر سرعت انتقال مواد مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. با گزینش زمان رسیدن به شرایط پایدار بعنوان معیاری از کیفیت انتقال تاثیر فرکانس صفحه مرتعش روی زمان حصول پایداری مطالعه می‌شود. در متن مقاله این نتایج در قالب منحنی‌های زمان-دبی و فرکانس-زمان ارائه شده است. نتایج موید آنست که در فرکانس‌های بالا به ازاء جریان ورودی و دامنه ارتعاش ثابت، تغییر فرکانس تاثیری بر سرعت انتقال ندارد.

کلمات کلیدی: مدلسازی عددی، روش عناصر مجزا، انتقال ارتعاشی مواد، مکانیک مواد دانه‌ای.

۱. مقدمه

در اصطلاح به توده‌ای از دانه‌های جامد واقع در محیطی از سیال که معمولاً هوا یا آب می‌باشد ماده دانه‌ای گفته می‌شود. این نوع از مواد در تمام محیط اطراف ما گسترده شده و بخشی از زندگی روزمره ما هستند. به طور مثال می‌توان به شن، سنگ، خاک، ذغال، غلات و قرصهای دارویی اشاره کرد [۱]. بسیاری از فرایندهای صنعتی از لحاظ ماده خام اولیه و یا محصول نهایی وابسته به مواد دانه‌ای هستند. از جمله این صنایع. صنایع استخراج و استحصال کانیهای معدنی، صنایع تولید مصالح ساختمانی، مواد آرایشی و دارویی، صنایع شیمیایی و صنایع غذایی می‌باشند. بدین لحاظ شناسائی رفتار این مواد مورد توجه صنایع مختلف می‌باشد و امروزه پژوهشگران با رویکردهای متفاوتی به این قبیل مطالعات می‌پردازند. از جمله تحقیقات جدید بخش غالب را تحلیل‌های مهندسی مکانیک با

هدف تعیین خواص و مکانیک مواد دانه‌ای تشکیل می‌دهد که از آن میان می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

« بررسی تاثیر خواص ارتجاعی دانه‌ها در فرآیند جابجایی در یک بستر مرتعش عمیق از مواد دانه‌ای » [۱]، « غربال لرزشی مجموعه‌های دانه‌ای و جداسازی لرزشی مخلوطهای دوگانه دانه‌ای » [۲] و « دینامیک یک فاز دانه‌ای مرتعش » [۳].

گفته می‌شود **لوکرتیوس**^۲، شاعر و فیلسوف معروف روم باستان اولین کسی بوده است که در سال ۵۰ قبل از میلاد در مورد حرکت مواد دانه‌ای سخن گفته است [۱]. در سال ۱۷۸۰، **ارنست کلادنی**^۳ به وجود اختلاف بین رفتار دانه‌های سبک و دانه‌های سنگین در مواد دانه‌ای توجه نمود و مطالعاتی را روی پدیده‌های مرتبط با ارتعاش این نوع از مواد انجام داد. او با یک آزمایش ساده طرحهایی که بر اثر ارتعاش در صفحه‌ای پوشیده شده از شن ایجاد می‌شد را معرفی نمود [۴]. **مایکل فارادی**^۴ (۱۸۶۷-۱۷۹۱) نیز در تحقیقات خود به تاثیر ارتعاشات بر تحریک و شکل‌گیری توده‌های شنی پرداخت. او دریافت هوای محبوس مابین دانه‌های شن، نقش مهمی را در شکل‌گیری توده شنی بازی می‌کند. مثلاً زمانی که یک مخزن عمیق محتوی شن تحت ارتعاش قرار می‌گیرد، هوا مابین شن و سطح مرتعش زیرین فشرده شده و به بستر شن بالای سر خود نیرویی رو به بالا وارد می‌کند. این نیرو بر شکل ظاهری توده شنی موثر است [۱]. در سال ۱۸۸۴، **ایزاک رابرت**^۵ نشان داد که در سیلویی که

دیواره‌های جانبی آن موازی باشند، فشار وارده از طرف ستون دانه‌ها بر کف سیلو در ارتفاعی بیش از دوبرابر قطر سیلو ثابت می‌ماند. به عبارت دیگر پس از آنکه سیلو تا ارتفاع دوبرابر قطر خود پر شد، بعد از آن وزن مواد دانه‌ای توسط اصطکاک مابین دانه‌ها و دیواره‌ها تحمل می‌شود [۱]. در چند دهه اخیر، محققین بسیاری به مطالعه مواد دانه‌ای پرداخته‌اند. آشکار شدن بسیاری از مشخصه‌های رفتار مواد دانه‌ای محصول تحقیقات دهه‌های اخیر است. یکی از اساسی‌ترین این مطالعات توسط **بگنولد**^۶ در سال ۱۹۵۴ صورت گرفت. بگنولد توانست تمایز بین حرکت مواد دانه‌ای و دیگر مخلوطهای جامد-مایع را نشان دهد. بر طبق نظر او، مکانیک حرکت مواد دانه‌ای بر پایه برخورددهای دوطرفه دانه‌ها با یکدیگر قابل

^۲ Lucretius
^۳ Ernst Chladni
^۴ Michael Faraday
^۵ Isaac Robert
^۶ Bagnold

مدلسازی است. بر طبق نظر وی عمده ائتلاف انرژی و انتقال مومنتوم در لحظه برخورد دانه‌ها با یکدیگر و یا با مرزهای سیستم رخ می‌دهد [۴].

لرزاندن مواد دانه‌ای بخشی از بسیاری فرآیندهای صنعتی می‌باشد. لرزاننده‌ها به منظور فعالیتهایی چون مخلوط کردن، جداسازی و خشک کردن مواد دانه‌ای بکار برده می‌شوند. لرزاندن مواد دانه‌ای سبب رفتارهای مکانیکی متنوعی در این مواد می‌شود. ژاگر^۷ و ناگل^۸، به بررسی پدیده‌های ناشی از ارتعاش بستر مواد دانه‌ای پرداختند. بسیاری از این رفتارها با رفتار عادی سیالات یا جامدات تحت ارتعاش تفاوت می‌کند. لذا این دو مدعی شده‌اند که به راحتی نمی‌توان مواد دانه‌ای را در زمره جامدات یا سیالات دسته‌بندی کرد [۵]. برن^۹ دریافت ارتفاع بستر مواد دانه‌ای با افزایش نسبت شتاب ارتعاشی به شتاب ثقل دانه‌ها، افزایش می‌یابد. [۶]. لودینگ^{۱۰} اقدام به مدلسازی کامپیوتری ارتعاش مواد دانه‌ای نمود. او در مدل برخورد دانه به دانه خود از اصطکاک استفاده کرد. نتایج شبیه‌سازی او نشان داد که ارتفاع مرکز جرم بستر مواد دانه‌ای مرتعش، تابعی از ضریب ائتلاف انرژی، تعداد دانه‌ها و سرعت ارتعاش محفظه است [۷]. لن^{۱۱} از شبیه‌سازی کامپیوتری ۳ بعدی برای مدلسازی مواد دانه‌ای تحت ارتعاش استفاده نمود. نتایج تحقیق لن نشان داد که دمای مواد دانه‌ای و ارتفاع بستر با تغییر سطح ارتعاش تغییر می‌کند [۸].

با در نظر گرفتن ماده دانه‌ای بعنوان محیطی ناپیوسته که می‌توان آنرا محیطی مجزا نامید در این مقاله ابتدا یک روش رایج برای مدلسازی سیستم مجزای مادی توسط معادلات مجزای ریاضی با اتکا به پدیده‌های برخورد و تماس دانه‌ها معرفی می‌شود. سپس بر پایه مدل مکانیکی و ریاضی معرفی شده شیوه کدنویسی و تهیه یک نرم افزار به زبان برنامه نویسی ++C بر اساس شیوه برنامه نویسی شیء‌گرا تشریح گردیده است. از برنامه معرفی شده جهت مدلسازی پدیده انتقال ارتعاشی مواد استفاده شده است. در ادامه ضمن مقایسه برخی نتایج حاصل با نتایج تجربی سایر محققین، روش تحلیل مورد درست آزمائی قرار گرفته است. در انتها نیز پس از کسب اطمینان از کارآئی روش، اقسام مختلفی از فرآیند انتقال ارتعاشی مدلسازی و تاثیر فرکانس روی کیفیت حرکت ماده بررسی شده است.

۲. مدلسازی مواد دانه‌ای

همانطور که قبلا اشاره شد، مواد دانه‌ای ممکن است تغییر شکلی مشابه اجسام جامد یا خاکها داشته باشند، ممکن است مانند سیالات جریان پذیر یا مانند گازها تراکم پذیر باشند. با توجه به دقت مورد نیاز، روشهای متفاوتی برای شبیه‌سازی حرکت مواد دانه‌ای مورد

استفاده قرار می‌گیرند که می‌توان آنها را به دو شاخه زیر دسته بندی کرد :

- روش مکانیک محیط پیوسته^{۱۲} (CMMS) یا مدلسازی ماکروسکوپی.
 - روش عناصر مجزا^{۱۳} (DEMs) یا مدلسازی منفصل [۹].
- روش عناصر مجزاء مبتنی بر کاربرد مکرر معادلات حرکت نیوتنی برای تحلیل یک مجموعه متشکل از تعداد زیادی عنصر مجزا می‌باشد. وجود کامپیوترهای پر سرعت کاربرد این شیوه تحلیل و پرداختن به مدلسازی مواد دانه‌ای را موجه نموده است. این روش به دلیل اینکه بر پایه استفاده از مکانیک لاگرانژی در مدلسازی حرکت مواد دانه‌ای استوار است، متد ساده‌ای به حساب می‌آید. یکی از زیر شاخه‌های مهم روش عناصر مجزاء، مدل‌های کلاسیک نیوتنی است که از معادلات دینامیک ذرات، بدست آمده از مکانیک نیوتنی برای هر ذره استفاده می‌کند. این مدلها به دو روش برخورد بین دانه‌ای آنی^{۱۴} (EDM) و روش برخورد بین دانه‌ای زمان بر^{۱۵} (TDM) تقسیم می‌شوند [۹].

مبنای روش برخورد آنی (EDM)، فرض برخوردهای دوگانه است. عبارتی در این روش برای هر دانه از مجموعه دانه‌ها در هر لحظه، تنها برخورد با یک دانه دیگر مفروض است و برخوردهای سه‌گانه و بیشتر منتفی است. این روش عموماً برای مدلسازی محیطهای دانه‌ای بسیار رقیق به کار برده می‌شود. در این نوع محیط دانه‌ای، زمان برخورد یک دانه با دانه دیگر بسیار کوچکتر از زمانی است که آن دانه بطور آزادانه و بدون برخورد با دانه‌های دیگر در فضا طی می‌کند. به عنوان نمونه می‌توان به استفاده از این روش در مدلسازی گازهای دانه‌ای^{۱۶} اشاره نمود. مسیر دانه‌ها با معادلات مومنتوم، مومنتوم زاویه‌ای و انرژی بدست می‌آیند. حرکت آزاد دانه‌ها که در حالت بدون تماس بین دانه‌ای وجود دارد نیز، توسط معادلات نیروی موثر بر دانه‌ها بدست می‌آید.

حالت ذرات در روش برخورد زمان بر (TDM)، از حل گام به گام زمانی برای معادلات دینامیکی در فضای سه‌بعدی که از مکانیک نیوتنی و بر پایه قانون دوم نیوتن برای انتقال و دوران هر ذره بدست آمده، مشخص می‌شود. این فرآیند شامل بدست آوردن جزئیات نیروها و گشتاورهای اعمالی به هر دانه در هر گام زمانی، نیز می‌شود. در این تحلیل، دانه‌ها به عنوان اجسام ویسکوالاستیک دارای قابلیت تماس و ایجاد تغییر شکل در یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند. نیروهای تماسی، وابسته به میزان تغییر شکل دانه‌ها، خواص مواد، و دینامیک ذرات می‌باشد.

۲. ۱. حل به روش برخورد زمان بر (TDM)

^{۱۲} Continuum Mechanics
^{۱۳} Discrete Element Method
^{۱۴} Event-Driven Method
^{۱۵} Time-Driven Method
^{۱۶} Granular gases

^۷ Jaeger
^۸ Nagel
^۹ Berennen
^{۱۰} Luding

^{۱۱} Lan

معادلات حرکت نیوتن در رابطه (۱) را به صورت گام به گام زمانی بدست آورد.

قوانین برخورد بین دانه‌ای وابسته به مدل انتخاب شده برای نیروهای \vec{F}_{ij} و گشتاورهای \vec{M}_{ij} وارده به دانه‌ها می‌باشند. در بخش بعد به معرفی مدل انتخاب شده برای دانه‌ها و معرفی مدل‌های نیرویی خواهیم پرداخت.

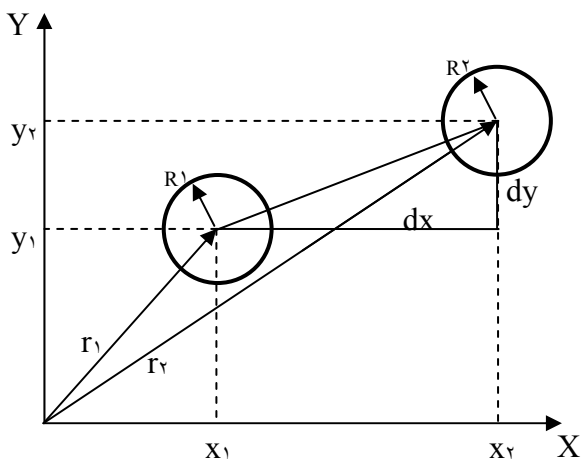
۲.۲. مدل دانه‌های کروی

رایج ترین مدل برای یک دانه در مواد دانه‌ای، مدل کروی می‌باشد. در این مقاله نیز دانه‌های مورد تحلیل از نوع کروی در نظر گرفته شده است. در شبیه‌سازی دو بعدی مواد دانه‌ای، دانه کروی به دایره تبدیل خواهد شد. استفاده از مدل کروی در شبیه‌سازی مجموعه‌ای از مواد دانه‌ای، بدلیل سادگی تشخیص برخورد دانه‌ها، ضمن برخورداری از مزیت سادگی بنحوی که در ادامه ملاحظه می‌شود به نتایج مطلوبی منجر می‌شود.

۲.۲.۱. دینامیک برخورد دانه‌های کروی

با توجه به شکل ۲ دو دانه کروی را که در حال نزدیک شدن به هم هستند در نظر بگیرید. پارامتر تغییر شکل ξ_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_{ij} = R_i + R_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (5)$$



شکل ۲: هندسه موقعیت دو دانه کروی

همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود پارامتر ξ_{ij} برای دو دانه ۱ و ۲ برابر است با:

$$\xi_{12} = R_1 + R_2 - \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (6)$$

شرط برخورد دو دانه کروی عبارتست از:

$$\xi_{ij} > 0 \quad (7)$$

بعبارت دیگر زمانی دو دانه کروی برخورد می‌کنند که تماس مکانیکی ایجاد شود یعنی مجموع شعاعهای آنها از فاصله مراکز آن دو بیشتر گردد. قابل ذکر است که تعیین رابطه تماس فیزیکی برای دیگر اشکال دانه‌ای پیچیده‌تر از دانه‌های کروی می‌باشد.

نیروی بین دو دانه برخورد کننده بصورت زیر تعریف می‌شود:

در این روش تحلیل، مجموعه‌ای متشکل از N دانه با ابعاد و خواص معین ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. حرکت انتقالی و دورانی دانه i ام، توسط قانون دوم نیوتن برای مرکز جرم آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2} = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}_j, \vec{v}_j, \varphi_j, \omega_j), \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (1)$$

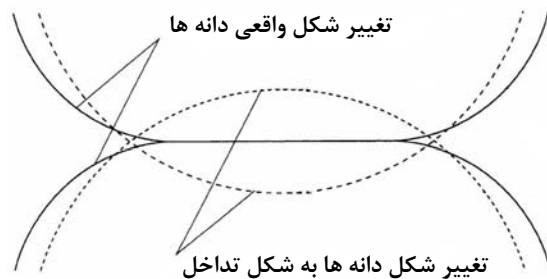
$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \frac{1}{J_i} \vec{M}_i(\vec{r}_j, \vec{v}_j, \varphi_j, \omega_j), \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

نیروی \vec{F}_i و گشتاور \vec{M}_i بر روی دانه i ام به جرم m_i و ممان اینرسی J_i اعمال می‌شوند. نیروها و گشتاورها تابعی از موقعیت \vec{r}_j ، وضعیت زاویه‌ای φ_j ، سرعت خطی \vec{v}_j و سرعت زاویه‌ای ω_j دانه هستند.

نیروی \vec{F}_i ، شامل تمام نیروهایی می‌شود که در نتیجه تماس بین دانه و همسایگان آن بوجود می‌آید و در نقطه تماس دو دانه اعمال می‌گردد. یعنی،

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} \quad (2)$$

که در رابطه بالا \vec{F}_{ij} معرف نیروی وارده از سوی دانه j ام به دانه i ام است. همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، دانه‌ها مثل اجسام ویسکوالاستیک در تماس با هم باعث تغییر شکل یکدیگر می‌شوند. قابل ذکر است که نیروهای تماسی بین آنها به شکل تداخل، جنس دانه‌ها، و سرعت نسبی دانه‌ها در منطقه تماس، بستگی دارند.



شکل ۱: برخورد الاستیک دو ذره در هنگام تداخل

نیروهای اعمالی باعث ایجاد گشتاور در دانه گشته که منجر به حرکت دوار آن می‌گردد:

$$\hat{J}_i \frac{\partial^2 \vec{\varphi}_i}{\partial t^2} = \vec{M}_i \quad (3)$$

گشتاور \vec{M}_i برابر است با مجموع تمام گشتاورهای وارد شده از همسایگان و لذا:

$$\vec{M}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{M}_{ij} \quad (4)$$

اگر مقادیر نیروهای \vec{F}_{ij} و گشتاورهای \vec{M}_{ij} را برای دانه‌های برخورد کننده به صورت تابعی از موقعیت‌های $(\vec{r}_i, \vec{\varphi}_i)$ و $(\vec{r}_j, \vec{\varphi}_j)$ و بقیه مشتقات زمانی مختصات دانه‌ها مشخص باشد می‌توان حل عددی

$$F^n(\xi, \xi) = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \left(\xi^{3/2} + \eta\sqrt{\xi\xi} \right) \quad (17)$$

ترم دوم معادله ۱۳، یعنی $3\eta\rho\sqrt{\xi\xi}/2$ بخش اتلافی مدل نیرویی ویسکوالاستیک می‌باشد.

۲.۴. مدل نیرویی مماسی

دانه‌های موجود در یک ماده دانه‌ای هیچگاه کره کامل نیستند بلکه دارای سطحی ناصاف می‌باشند. هیچگاه نمی‌توان تپه‌ای از دانه‌های کروی با سطحی کاملاً صاف ساخت زیرا با سر خوردن دانه‌ها بر روی یکدیگر تپه فرو خواهد نشست. برای این کار می‌بایست هم دانه‌های کروی و هم سطح زیرین آنها دارای زبری کافی باشند. در نتیجه در برخوردهای مایل دانه‌ها علاوه بر نیروهای عمودی، نیروهای مماسی F^t نیز وجود دارند. نیروهای مماسی که با عنوان نیروی برشی نیز نامیده می‌شوند، از اهمیت بالایی در مدلسازی نزدیک به واقعیت مواد دانه‌ای دارد.

تاکنون در بسیاری از مدلسازی‌های حرکت مواد دانه‌ای از مدل نیروی مماسی معرفی شده توسط هاف^{۱۸} و ورنر^{۱۹} استفاده شده است.

نتایج این مدل، انطباق خوبی با نتایج تجربی داشته است [۱۰]:

$$F^t = -\text{sign}(v_{rel}^t) \cdot \min\left(\gamma^t |v_{rel}^t|, \mu |F^n|\right) \quad (18)$$

که در آن v_{rel}^t مولفه مماسی سرعت نسبی، γ^t ثابت میرایی و μ ضریب اصطکاک می‌باشد. با توجه به مدل هاف، در حالتی که نیروی F^n بزرگ بوده و یا سرعت v_{rel}^t کوچک باشد، نیروی F^t برابر با ترم اول معادله ۱۸ یعنی $\gamma^t |v_{rel}^t|$ می‌شود. در این حالت نیروی مماسی F^t همان میرایی برشی^{۲۰} می‌باشد که توسط قانون اصطکاک کولمب به صورت زیر محدود می‌گردد:

$$|F^t| \leq \mu |F^n| \quad (19)$$

در حالتی که سرعت v_{rel}^t بزرگ بوده و یا نیروی F^n کوچک باشد، نیروی F^t برابر با ترم دوم معادله ۱۸ یعنی $\mu |F^n|$ می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت که مدل نیرویی هاف با قانون اصطکاک کولمب مطابقت دارد.

۲.۵. الگوریتم حل عددی معادلات حرکت

روشهای گوناگونی برای حل عددی مجموعه‌های تشکیل شده از معادلات دیفرانسیل وجود دارد. در این بخش، تنها به معرفی یکی از این روشها خواهیم پرداخت که البته ثابت شده است که دارای نتایج خوبی در مدلسازی مواد دانه‌ای بوده است.

حل عددی معادلات حرکت نیوتن در رابطه ۱ برای مجموعه‌ای از مواد دانه‌ای کمی دشوار می‌باشد. الگوریتم گیر^{۲۱} یکی از الگوریتمهای رایجی است که در مدلسازی مجموعه‌های دانه‌ای مناسب است [۱۱]. [۱۲]. الگوریتم گیر از دو گام تشکیل یافته است. ابتدا موقعیت،

$$\vec{F}_{ij} = \begin{cases} \vec{F}_{ij}^n + \vec{F}_{ij}^t & \text{اگر } \xi_{ij} > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (8)$$

زیرنویس‌های i و j در رابطه بالا شاخص‌های مربوط به شماره دانه‌های مماس شده است. در مجموعه‌های دو بعدی، مولفه‌های عمودی و مماسی نیرو را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{F}_{ij}^n = F_{ij}^n \vec{e}_{ij}^n \quad (9)$$

و

$$\vec{F}_{ij}^t = F_{ij}^t \vec{e}_{ij}^t \quad (10)$$

که در آن برای بردارهای یکه داریم:

$$\vec{e}_{ij}^n = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (11)$$

و

$$\vec{e}_{ij}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_{ij}^n \quad (12)$$

برای ساده‌سازی نگارش متن در ادامه از اندیسه‌های ij نیروها صرفنظر می‌شود. نیروی عمودی F^n باعث تغییر در وضعیت انتقالی دانه‌ها می‌شود و نیروی مماسی F^t نیز در وضعیت دورانی دانه‌ها تغییر بوجود می‌آورد. هر دو مولفه نیرو، مماسی و عمودی، تابعی از موقعیت نسبی دانه‌ها، $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ و سرعت نسبی آنها، $\vec{v}_i - \vec{v}_j$ می‌باشند.

۲.۳. مدل نیرویی عمودی برای دانه‌های ویسکوالاستیک

قانون نیروی برخورد بین دانه‌ای برای دانه‌های ویسکوالاستیک به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۰]:

$$F^n(\xi, \xi) = -\rho \xi^2 - \frac{3}{2} \eta \rho \sqrt{\xi\xi} \quad (13)$$

که در آن ρ ثابت ارتجاعی، ξ تغییر شکل دانه پس از برخورد، ξ نرخ تغییر شکل دانه و η ضریب اتلاف انرژی می‌باشد. ترم اول این مدل نیرویی جزء ارتجاعی است که برگرفته از قانون برخورد بین دانه‌های الاستیک هرتز^{۱۷} [۱۰]، بصورت زیر می‌باشد:

$$F_{el}^n = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \xi^{\frac{3}{2}} \quad (14)$$

که در آن Y مدول یانگ، ν ضریب پواسون و R_{eff} شعاع موثر دو دانه بوده و برابر است با:

$$R_{eff} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \quad (15)$$

پس ثابت الاستیک ρ در ترم اول معادله ۱۳ عبارتست از:

$$\rho = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \quad (16)$$

اگر از ثابت الاستیک در معادله ۱۳ فاکتور گرفته شود، شکل جدید این معادله به صورت زیر خواهد بود:

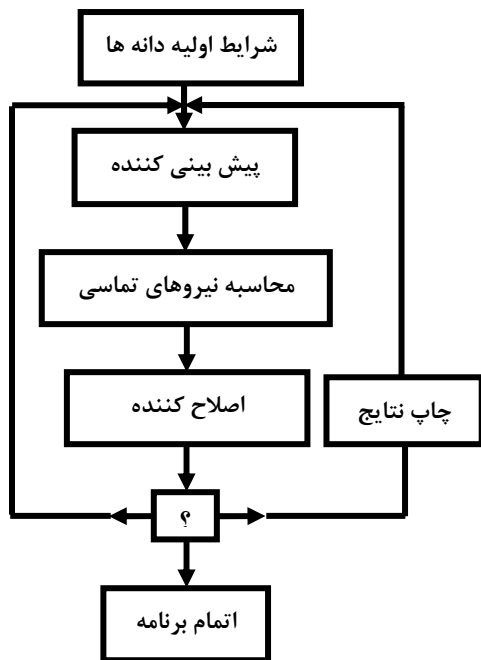
^{۱۸} Haff
^{۱۹} Werner
^{۲۰} Linear Shear damping
^{۲۱} Gear

^{۱۷} Hertz

می‌شود، $t + \Delta t = t + \Delta t$ و برنامه مدل‌سازی از گام پیش بینی کننده از سر گرفته شده و ادامه می‌یابد.

۳. نگارش نرم افزار شبیه‌سازی

بر اساس مدل عناصر مجزا و بر پایه مدل‌های مکانیکی و ریاضی معرفی شده در این پژوهش اقدام به کدنویسی و تهیه یک نرم افزار به زبان برنامه نویسی ++C گردید. برنامه تدوین شده جهت مدل‌سازی پدیده انتقال ارتعاشی مواد بکار گرفته شد. شکل ۳ الگوریتم بکار گرفته شده برای نگارش نرم افزار شبیه‌سازی حرکت مواد دانه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۳: الگوریتم شبیه‌سازی حرکت مواد دانه‌ای

پس از نگارش نرم افزار مناسب بر پایه مدل عناصر مجزا صحت مدل ریاضی و برنامه نگارش یافته به محک سنجش زده شد. بدین منظور بطوری که در ادامه ملاحظه می‌شود، نتایج حاصل از بازآفرینی پدیده موسوم به سیالی شدن با نتایج تجربی مرجع [۱۳] مقایسه گردید.

۴. درست آزمایی نرم افزار (مدلسازی پدیده سیالی شدن)

ارتعاش یک محفظه حاوی ذرات یا دانه‌ها حائز اهمیت کاربردی است. از میان همه رفتارهای لرزشی دانه‌ها پدیده جدایش سطحی اهمیت بیشتری دارد. این پدیده شامل جدایش دانه‌های سطح آزاد از دانه‌های مجاور در بازه کوتاهی از هر پریود می‌باشد که سیالی شدن^{۲۴} نامیده شده است [۱۳].

سرعت و بقیه مشتقات زمانی دانه‌ها توسط پیش بینی کننده^{۲۲} در زمان $t + \Delta t$ محاسبه می‌شود. این محاسبه توسط بسط تیلور و با استفاده از متغیرهای حرکتی دانه‌ها در زمان t صورت می‌گیرد. در اکثر موارد از الگوریتم مرتبه پنج گیر استفاده می‌شود به این معنا که خطای عددی یک گام به شکل $(\Delta t)^5$ رشد می‌کند. رابطه زیر قسمت مربوط به پیش بینی در روش مرتبه پنج گیر را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) &= \vec{r}_i(t) + \Delta t \vec{v}_i(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \frac{1}{24}(\Delta t)^4 \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t) \\ \vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) &= \vec{v}_i(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) &= \ddot{\vec{r}}_i(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) &= \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

در مرحله بعد، از مقادیر پیش بینی شده و همچنین به کمک مدل‌های نیرویی که در صفحات قبل به آن اشاره شد، نیروها $\vec{F}_i(\vec{r}_j^{pr}, \vec{v}_j^{pr}, \omega_j^{pr})$ و گشتاورهای $\vec{M}_i(\vec{r}_j^{pr}, \vec{v}_j^{pr}, \omega_j^{pr})$ وارد به دانه‌ها محاسبه می‌شوند. سپس از نیروها و گشتاورهای محاسبه شده برای اصلاح^{۲۳} شتاب خطی $\ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t)$ و شتاب زاویه‌ای دانه‌ها $\ddot{\phi}_i^{corr}(t + \Delta t)$ استفاده می‌شود. اگر پیش بینی کاملاً دقیق باشد، متغیرهای حرکتی پیش‌بینی شده می‌بایست معادله حرکت را ارضاء کنند و $\ddot{\vec{r}}_i^{corr} = \ddot{\vec{r}}_i^{pr}$ باشد.

پارامتر $\Delta \ddot{r}$ به عنوان معیاری برای سنجش انحراف مقادیر موقعیت، سرعت و شتاب پیش بینی شده از مقادیر متناسب واقعی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta \ddot{r} = \ddot{\vec{r}}_i^{corr} - \ddot{\vec{r}}_i^{pr} \quad (21)$$

گام دوم الگوریتم گیر، متغیرهای پیش بینی شده را با اضافه کردن عددی که از حاصلضرب انحراف $\Delta \ddot{r}$ بدست آمده است، اصلاح می‌کند:

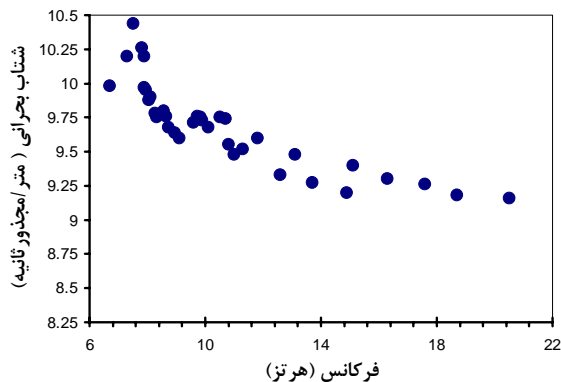
$$\begin{pmatrix} \vec{r}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{(4)corr}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{(4)pr}(t + \Delta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \frac{1}{(\Delta t)^1} \\ c_2 \frac{2}{(\Delta t)^2} \\ c_3 \frac{6}{(\Delta t)^3} \\ c_4 \frac{24}{(\Delta t)^4} \end{pmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} \Delta \ddot{r} \quad (22)$$

که در آن مقادیر ضرایب c_i به مرتبه الگوریتم و نوع معادله دیفرانسیل بستگی دارد. این ضرایب برای الگوریتم مرتبه پنج عبارتند از:

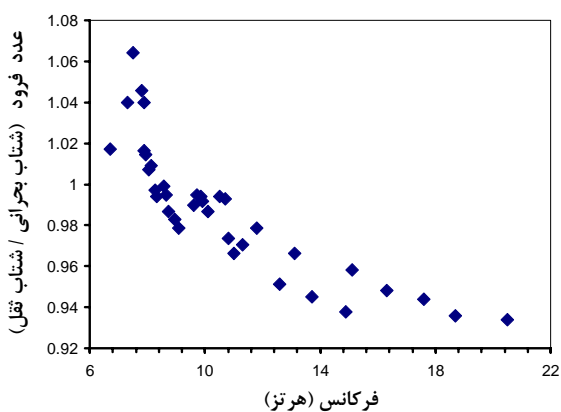
$$c_0 = \frac{19}{90}, \quad c_1 = \frac{3}{4}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = \frac{1}{12} \quad (23)$$

در انتها پس از اصلاح متغیرهای حرکتی دانه‌ها توسط گام اصلاح کننده الگوریتم، زمان برنامه به اندازه یک گام زمانی به جلو برده

فرکانسی که در آن دانه دوم تماس خود را با دانه اول از دست می‌دهد بعنوان فرکانس بحرانی مشخص شده است. نتایج حاصل از مدلسازی پدیده سیالی شدن در شکل ۶ به نمایش درآمده است. مقایسه این نتایج با نتایج مندرج در شکل ۴ موید همسوئی مدلسازی این مقاله با نتایج تجربی موجود است. در شکل ۷ عدد بی بعد فرود بر حسب فرکانس ترسیم شده است. همانطور که در شکل ۷ دیده می‌شود حتی در اعداد فرود کمتر از ۱ نیز پدیده سیالی شدن رخ می‌دهد.



شکل ۶: شتاب بحرانی بر حسب فرکانس



شکل ۷: عدد فرود بر حسب فرکانس

در ادامه پژوهش پس از حصول اطمینان از کارآئی روش و صحت نرم افزار نگارش یافته، فرآیند انتقال ارتعاشی مواد مورد مدلسازی قرار گرفت.

۵. مدلسازی ریزش و انتقال مواد دانه‌ای بر اثر ارتعاش

مدل در نظر گرفته شده برای بازسازی فرآیند سیلان ارتعاشی مواد شامل سامانه‌ای متشکل از یک چشمه مولد دانه، یک صفحه مرتعش و یک چاه حذف کننده است. جدول ۱ مقادیر متغیرهای مدلسازی از جمله خصوصیات دانه‌های کروی بکار رفته را نمایش می‌دهد:

جدول ۱: مقادیر متغیرهای مدلسازی

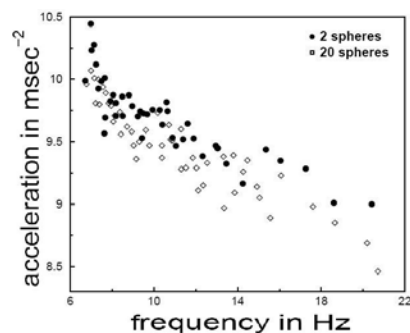
نام خصوصیت	علامت	مقدار
گام زمانی (ثانیه)	Δt	1×10^{-6}

لحظه شروع سیالی شدن برای مخزنی از دانه‌ها که تحت تحریک ارتعاش هارمونیک پایه قرار دارد غالباً معادل با زمانی در نظر گرفته می‌شود که بزرگی شتاب دانه یا ذره از شتاب ثقل بیشتر گردد. لذا در اکثر مقالات منتشر شده از عدد فرود به عنوان معیاری برای تشخیص لحظه شروع سیالی شدن استفاده شده است [۱۳ و ۱۴]. عدد فرود، Γ ، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \quad (24)$$

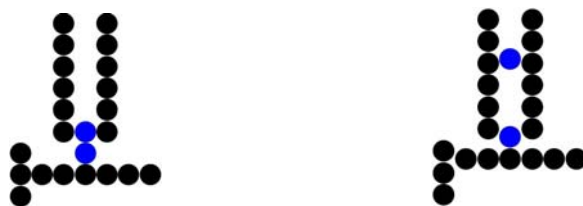
در رابطه بالا A دامنه نوسان، g شتاب ثقل و ω فرکانس زاویه‌ای است. بر این اساس $\Gamma > 1$ معیاری از لحظه شروع سیالی شدن خواهد بود. با این وجود نتایج تجربی مندرج در [۱۳] موید آنستکه عدد فرود تابعی از فرکانس بوده و حتی در $\Gamma < 1$ نیز امکان رخ دادن پدیده سیالی شدن وجود دارد.

در مرجع شماره [۱۳] مکانیزم ساده‌ای برای بازسازی پدیده سیالی شدن معرفی شده است. این مجموعه متشکل از یک ستون محتوی تعدادی ساچمه می‌باشد که به کمک موتور پله‌ای و بادامک مرتعش می‌شوند. نحوه انجام آزمون بدین ترتیب است که دور موتور به تدریج افزایش داده می‌شود تا جاییکه با عبور فرکانس نوسان از فرکانس بحرانی، گوی انتهایی تماس خود را با گوی پایین‌تر از دست داده، مسیری را بدون تماس طی کرده و مجدداً بر سر آن گوی فرود آید. این آزمایش ابتدا با ۲ گوی، سپس با ۲۰ گوی در دامنه‌های نوسانی مختلف، تکرار و نتایج آن در شکل ۴ به نمایش درآمده است.



شکل ۴: شتاب بحرانی بر حسب فرکانس [۱۳]

به منظور تحلیل پدیده سیالی شدن بطوریکه در تصویر نمونه شکل ۵ ملاحظه می‌شود این فرآیند مورد بازسازی قرار گرفته است.



شکل ۵: دو تصویر نمونه از بازسازی پدیده سیالی شدن

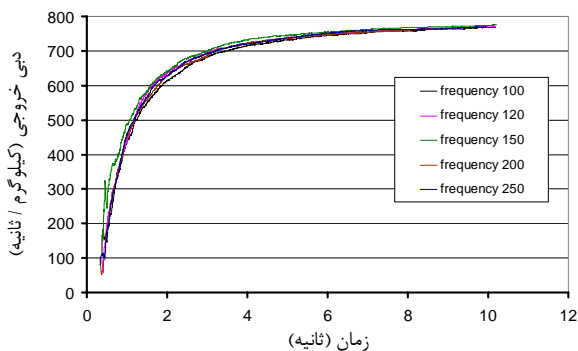
برای محاسبه شتاب بحرانی بکمک نرم افزار تدوین شده در هر آزمون ضمن ثابت نگه داشتن دامنه و تغییر فرکانس در بازه ۶ تا ۲۲ هرتز،

و دامنه ارتعاش صفحه، دبی ورودی دانه‌ها، طول صفحه و فاصله چشمه از دیواره اشاره نمود.

جهت مطالعه تاثیر فرکانس ارتعاشی صفحه بر روی سرعت انتقال دانه‌ها، یک مدل نمونه انتخاب گردید. در این مدل برای تمامی متغیرهای موثر بر کیفیت انتقال که در بالا به آنها اشاره شد مقادیر معینی در نظر گرفته شد. سپس بمنظور بررسی تاثیر فرکانس روی مدل، فرآیند ریزش و انتقال لرزشی دانه‌ها در ۵ بسامد مختلف لرزش پایه بازسازی گردید.

در اینجا زمان رسیدن به حالت پایدار به عنوان معیاری از سرعت انتقال دانه‌ها توسط ارتعاشات در نظر گرفته شد. لازم به یادآوری است که حالت پایدار زمانی بوجود می‌آید که اختلاف میان دبی ورودی دانه‌ها به مجموعه و دبی خروجی آنها از انتهای صفحه مرتعش به صفر میل کند. شکل ۹ دبی خروجی دانه‌ها از انتهای صفحه را در مقابل زمان در هر یک از این ۵ آزمون نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل ۹ دیده می‌شود در هر یک از آزمونها، با سپری شدن یک بازه زمانی، مقدار دبی در خروجی مجموعه به مقدار دبی ورودی که برابر با ۸۰۰ کیلوگرم بر ثانیه بوده است، میل می‌کند. علاوه بر این با افزایش فرکانس، حالت پایدار در زمان کوتاهتری شکل گرفته و دبی خروجی سریعتر به مقدار دبی ورودی میل می‌کند.



شکل ۹: دبی خروجی از انتهای صفحه مرتعش در مقابل زمان

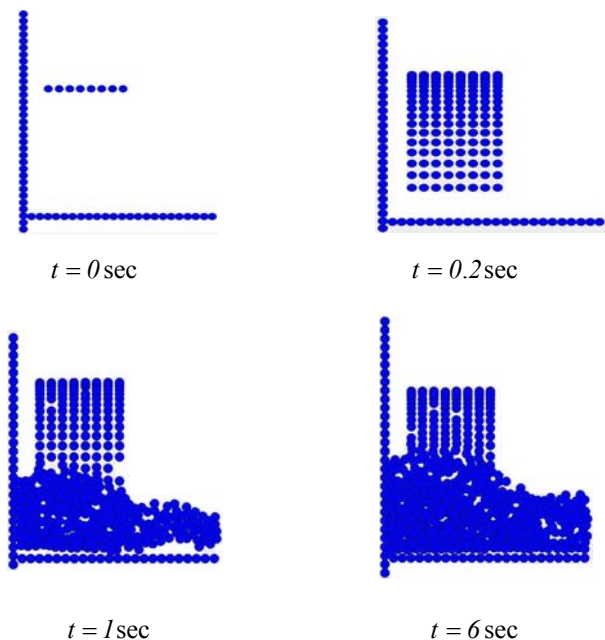
در مرحله مدلسازی در بازه‌های زمانی مشخص عامل چشمه تعداد مشخصی دانه را بطور مکرر به مجموعه وارد می‌کند. به تدریج، دانه‌های وارد شده پس از انتقال و رسیدن به انتهای صفحه، توسط پایانه چاه از مجموعه حذف می‌گردند. لذا همانطور که در شکل ۸ دیده می‌شود، در هر گام زمانی از مدلسازی، تعداد مشخصی دانه در مجموعه موجود می‌باشند. با گذشت زمان و نزدیک شدن به حالت پایدار، تعداد کل دانه‌های موجود در مجموعه به ثبات نسبی می‌رسد. شکل ۱۰ نشان دهنده تعداد کل دانه‌های موجود در مجموعه در مقابل زمان در ۵ آزمون می‌باشد. شکل ۱۰ مویید پدید آمدن شرایط پایدار پس از سپری شدن یک دوره زمانی در تعداد کل دانه‌های موجود در مجموعه می‌باشد. علاوه بر این ملاحظه می‌شود با افزایش فرکانس، در حالت پایدار مجموع دانه‌ها کمتر می‌شود.

۴	R	شعاع دانه (میلیمتر)
۱	m	جرم دانه (کیلوگرم)
۰.۲۹	v	ضریب پواسون
۰.۵	μ	ضریب اصطکاک
۰.۳	η	ضریب اتلاف انرژی
۰.۳	γ^t	ثابت میرایی

شرایط مرزی سیستم عبارتست از یک صفحه که از یک طرف توسط یک دیواره محدود گشته و دارای معادله ارتعاشی زیر است:

$$y = A \cos(\omega t) \quad (25)$$

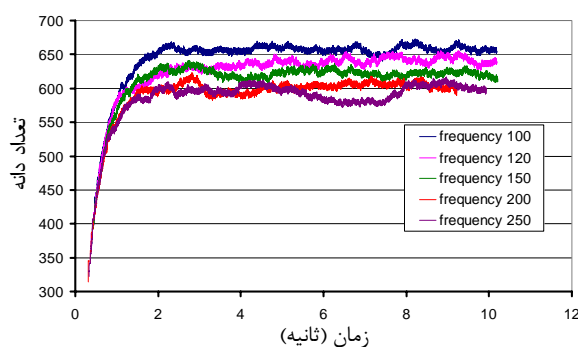
که در آن A دامنه و ω فرکانس ارتعاش می‌باشد. پس از شروع مدلسازی در زمان $t = 0$ ثانیه، توسط چشمه تعداد مشخصی دانه کروی در بازه‌های زمانی معین به مجموعه وارد می‌شود. بدین وسیله کنترل دبی ورودی دانه‌ها میسر می‌گردد. دانه‌های وارد شده از ارتفاعی معین شروع به ریزش کرده و پس از گذشت زمانی به صفحه مرتعش می‌رسند. ارتعاش صفحه موجب بروز اغتشاش و برخوردی بین دانه‌های گشته و در نهایت منجر به پیشروی دانه‌ها می‌گردد. برای محدود نمودن تعداد دانه‌های مورد بررسی، هر دانه‌ای که از انتهای صفحه عبور نماید، پس از ثبت زمان خروج، توسط پایانه چاه از حوزه مطالعه حذف گردیده، زمان ثبت شده برای محاسبه دبی خروجی استفاده می‌شود. بطور نمونه شکل ۸ چند نما از بازسازی فرآیند انتقال ارتعاشی دانه‌ها را نمایش می‌دهد.



شکل ۸: چند نما از بازسازی فرآیند ریزش دانه‌ها روی صفحه مرتعش

متغیرهای متفاوتی بر کیفیت انتقال دانه‌ها در فرآیندی که مورد بازسازی قرار گرفت، موثر می‌باشند. از جمله آنها می‌توان به فرکانس

برنامه های نگاشته شده مورد آزمایش قرار گرفت. سپس به مدلسازی انتقال لرزشی پرداخته شد و نتایج آن در قالب نمودار و منحنی ارائه گردید. نتایج تحلیل حاکی از آنست که در صورت ثابت ماندن جریان ورودی پس از سپری شدن یک دوره کوتاه، حالت پایداری در انتقال مواد شکل می گیرد. علاوه بر آن سرعت انتقال لرزشی تحت تاثیر فرکانس لرزش است بطوریکه با افزایش فرکانس سرعت انتقال مواد نیز افزایش می یابد. با این وجود در فرکانس های بالا تغییر فرکانس تاثیری بر سرعت انتقال نخواهد داشت.



شکل ۱۰: تعداد دانه موجود روی صفحه در طول زمان

مراجع

[۱]- Wang, L., *Vibratory sieving of mono-sized granular assemblies and vibratory size segregation of binary granular mixtures*, Mech. Eng. PhD Thesis, Worcester Polytechnic Institute, ۱۹۹۹.

[۲]- Klongboonjit, S., *The effects of particle elasticity on the convection in deep vertically shaken particles beds*, Mech. Eng. PhD Thesis, University of Southern California, ۲۰۰۵.

[۳]- Ingale, R., *Dynamics of vibrated granular matter*, Mech. Eng. PhD Thesis, the City University of New York, ۲۰۰۸.

[۴]- Wassgren, C., *Vibration of granular materials*, PhD Thesis, California Institute of Technology, ۱۹۹۷.

[۵]- Jaeger, H. M., and Nagel, S. R., "Physics of the granular state," *Science*, Vol. ۲۵۵, pp. ۱۵۲۳-۱۵۳۱, ۱۹۹۲.

[۶]- Brennen, C. E., Ghosh, S. and Wassgren, C. R., "Vertical oscillation of a bed of granular material," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. ۶۳, pp. ۱۵۶-۱۶۱, ۱۹۹۶.

[۷]- Luding, S., Mermann, H. J., and Blumen, A., "Simulations of two-dimensional arrays of beads under external vibrations: Scaling behavior," *Phys. Rev. E*, Vol. ۵۰, pp. ۳۱۰۰-۳۱۰۸, ۱۹۹۴.

[۸]- Yidan, L., and Rosato, A. D., "Macroscopic behavior of vibrating beds of smooth inelastic spheres," *Phys. Fluids*, Vol. ۷, pp. ۱۸۱۸-۱۸۳۱, ۱۹۹۵.

[۹]- Bernard, P., and Dziugys, A., "Numerical simulation of the motion of granular material using object-oriented techniques," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. ۱۹۱, pp. ۱۹۸۳-***, ۲۰۰۷.

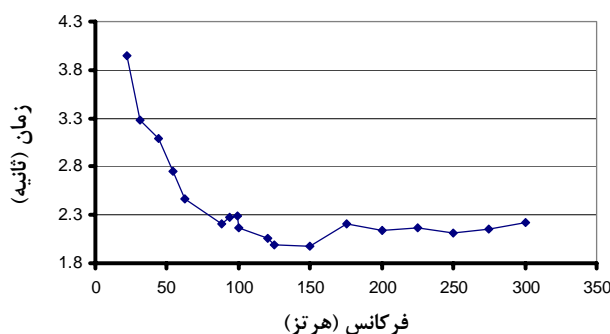
[۱۰]- Brilliantov, N., Spahn, F., Hertzsch, J., and Poschel, T., "A model for collisions in granular gases," *J. Phys. Rev.*, Vol. ۵۳, ۱۹۹۶.

[۱۱]- Allen, M. P., Tildesley, D. J., *Computer simulations of liquids*. Clarendon Press, Oxford, ۱۹۸۷.

[۱۲]- Gear, C. W., *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. ۱۹۷۱.

[۱۳]- Poschel, T., Schwager, T., and Saluena, C., "Vertically shaken column of spheres. Onset of fluidization," *Europ. Phys. J. C*, Vol. ۴, ۲۳۳, ۲۰۰۱.

اجراء این برنامه بدلیل حجم زیاد محاسبات، طولانی می باشد. لذا به منظور کاهش زمان پردازش با توجه به رفتار مجانبی منحنی شکل ۹، دوره اجراء برنامه به زمانی محدود شده است که دبی خروجی به سطح ۸۰٪ دبی ورودی می رسد. این بار تحلیل فرآیند مدلسازی ریزش و انتقال لرزشی دانه ها ۱۸ بار متوالی تکرار گردید. در هر یک از این آزمونها، پس از رسیدن دبی خروجی به سطح ۸۰٪ دبی ورودی، آزمایش متوقف، زمان برنامه ثبت و مجدداً با تغییر فرکانس، مدلسازی از سرگرفته شد. نتایج این آزمونها در شکل ۱۱ به نمایش درآمده است.



شکل ۱۱: تاثیر فرکانس بر زمان پایدار شدن پدیده انتقال لرزشی

همانطور که در شکل ۱۱ دیده می شود، با افزایش فرکانس ارتعاشی صفحه، زمان رسیدن به حالت پایدار کاهش می یابد. با این حال در مقادیر بزرگ فرکانس، تغییر فرکانس تاثیری بر زمان وقوع حالت پایدار ندارد.

۴. نتیجه گیری و جمع بندی

امروزه وجود پردازشگرهای پر سرعت امکان تحلیل مکانیکی جزء به جزء یک محیط منفصل را میسر نموده است. این قابلیت در بررسی مکانیک مواد دانه ای که بخش عمده ای از مواد خام و محصولات صنایع مختلف را تشکیل می دهند حائز اهمیت است. در این مقاله با بهره گیری از شیوه تحلیل مکانیکی جزء به جزء دانه ها فرآیند انتقال لرزشی مواد دانه ای مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور در مرحله نخست ضمن بره برداری از دستاوردهای تجربی دیگر پژوهشگران در زمینه بررسی پدیده سیالی شدن، روش تحلیل و

[14]- Garcimartin, A., Pastor, J. M., Arevalo, R., and Maza, D., “Convection in a vibrated granular layer”, *Europ. Phys. J.*, pp. 331–340, 2007.