



## بررسی پدیده سیالی شدن در ستون مرتعش ذرات

جواد گوهریان<sup>۱</sup>، حمید اختراعی طوسی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ [javad.goharian@gmail.com](mailto:javad.goharian@gmail.com)  
<sup>۲</sup> استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ [ekhteraee@um.ac.ir](mailto:ekhteraee@um.ac.ir)

### چکیده

جدایش ذرات واقع در سطح بالایی یک سامانه از ذرات مرتعش، سیالی شدن خوانده می‌شود [۱]. در راستای مطالعه این پدیده، در این مقاله با در نظر گرفتن ذرات به شکل کره‌های ویسکوالاستیک، متغیرهای حرکتی به کمک حل معادلات انتقال و دوران هر ذره بدست می‌آیند. با معرفی عدد فرود<sup>۱</sup> به عنوان معیاری برای لحظه شروع سیالی شدن و مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی، رابطه میان عدد فرود و فرکانس ارتعاش مشخص می‌شود. نتایج حاکی از وجود هماهنگی بین روش تحلیلی و اطلاعات تجربی موجود می‌باشد. **کلمات کلیدی:** سیالی شدن، مدلسازی عددی، روش عناصر مجزا، مکانیک مواد دانه‌ای.

### مقدمه

ارتعاش یک محفظه حاوی ذرات یا دانه‌ها حائز اهمیت کاربردی است. در حال حاضر تحقیقات متفاوتی در این زمینه جریان دارد که از آن جمله می‌توان به بررسی تجربی پوشل<sup>۲</sup> در ارتعاش ستونی از گویها [۱]، مطالعه گارسی مارتین<sup>۳</sup> بر روی جایجایی بستری از مواد دانه‌ای در اثر ارتعاش [۲] و پژوهشهای اوسکیو<sup>۴</sup> در زمینه فروریزش تپه شنی [۳] اشاره کرد. از میان همه رفتارهای لرزشی دانه‌ها پدیده جدایش سطحی اهمیت بیشتری دارد. این پدیده شامل جدایش دانه‌های سطح آزاد از دانه‌های مجاور در بازه کوتاهی از هر پریود می‌باشد که سیالی شدن نامیده شده است. لحظه شروع سیالی شدن برای مخزنی از دانه‌ها که تحت تحریک ارتعاش هارمونیک پایه قرار دارد غالباً معادل با زمانی در نظر گرفته می‌شود که بزرگی شتاب دانه یا ذره از شتاب ثقل بیشتر گردد. لذا در اکثر مقالات منتشر شده از عدد فرود به عنوان معیاری برای تشخیص لحظه شروع سیالی شدن استفاده شده است [۱ و ۲]. عدد فرود،  $\Gamma$ ، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \quad (1)$$

در رابطه بالا  $A$  دامنه نوسان،  $g$  شتاب ثقل و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای است. بر این اساس  $\Gamma > 1$  معیاری از لحظه شروع سیالی شدن

خواهد بود. با این وجود نتایج تجربی مندرج در [۱] موید آنستکه عدد فرود تابعی از فرکانس بوده و حتی در  $\Gamma < 1$  نیز امکان رخ دادن پدیده سیالی شدن وجود دارد. در این مقاله ضمن مدلسازی عددی پدیده سیالی شدن به مطالعه لحظه شروع این پدیده و مقایسه نتایج حاصل با نتایج تجربی [۱] پرداخته شده است. در این راستا، بر پایه مدل‌های مکانیکی و ریاضی معرفی شده اقدام به کدنویسی و تهیه یک نرم افزار به زبان برنامه نویسی ++C بر اساس شیوه برنامه‌نویسی شیء‌گرا گردیده است. برنامه تدوین شده جهت مدلسازی پدیده سیالی شدن بکار گرفته شده است.

### روش عناصر مجزا

روش عناصر مجزا مبتنی بر کاربرد مکرر معادلات حرکت نیوتنی برای تحلیل یک مجموعه متشکل از تعداد زیادی عنصر مجزا می‌باشد. وجود کامپیوترهای پرسرعت کاربرد این شیوه تحلیل و پرداختن به مدلسازی مواد دانه‌ای را موجه نموده است. در این روش تحلیل، مجموعه‌ای متشکل از  $N$  دانه با ابعاد و خواص معین ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. حرکت انتقالی و دورانی دانه  $i$  ام، توسط قانون دوم نیوتن برای مرکز جرم آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2} = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i, \varphi_i, \omega_i), \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \frac{1}{J_i} \vec{M}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i, \varphi_i, \omega_i), \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

نیروی  $\vec{F}_i$  و گشتاور  $\vec{M}_i$  بر روی دانه  $i$  ام به جرم  $m_i$  و ممان اینرسی  $J_i$  اعمال می‌شوند. نیروها و گشتاورها تابعی از موقعیت  $\vec{r}_i$ ، وضعیت زاویه‌ای  $\varphi_i$ ، سرعت خطی  $\vec{v}_i$  و سرعت زاویه‌ای  $\omega_i$  دانه هستند. مدل‌های در نظر گرفته شده برای مولفه‌های عمودی و مماسی این نیروها در ادامه معرفی شده است.

هرتز نیروی عکس‌العملی بین دو کره ویسکوالاستیک را بصورت تابعی از تغییر شکل  $\xi$ ، ثابت اتلاف انرژی  $A$ ، مدول یانگ  $Y$  و نسبت پواسون  $\nu$  به شرح زیر معرفی نموده است [۴]:

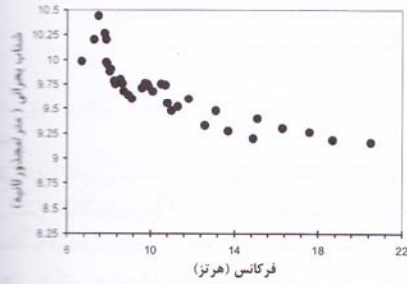
$$F^n = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \left( \xi^{3/2} + A\sqrt{\xi} \frac{d\xi}{dt} \right) \quad (3)$$

که در آن  $R_{eff}$  شعاع موثر دو دانه برخورد کننده  $i$  و  $j$  به صورت زیر است.

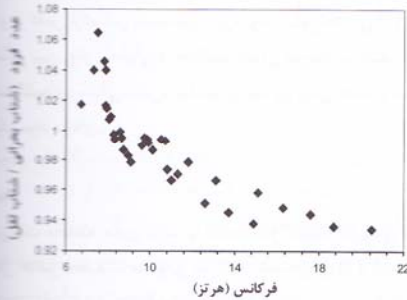
$$R_{eff} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \quad (4)$$

<sup>1</sup> Fluidization  
<sup>2</sup> Froude  
<sup>3</sup> Poschel  
<sup>4</sup> Garcimartin  
<sup>5</sup> Evesque

این مقاله با نتایج تجربی موجود است. در شکل ۴ عدد بی بعد فرود بر حسب فرکانس ترسیم شده است. همانطور که در شکل ۴ دیده می شود حتی در اعداد فرود کمتر از ۱ نیز پدیده سیالی شدن رخ می دهد.



شکل ۳: شتاب بحرانی بر حسب فرکانس



شکل ۴: عدد فرود بر حسب فرکانس

#### نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله به بررسی پدیده سیالی شدن ذرات انباشته شده بر روی هم در شرایط ارتعاش پرداخته شده است. بدین منظور از نتایج تجربی افزار نگاشته شده برای پیش بینی شرایط وقوع پدیده سیالی شدن استفاده شده است. مقایسه نتایج حاصل با نتایج تجربی دیگران نشان داد که مدل ریاضی عناصر مجزا برای پیش بینی این رفتار مناسب است. ارائه نتایج بر حسب عدد فرود نشان میدهد که به ازاء عدد فرود کوچکتر از ۱ نیز وقوع پدیده سیالی شدن محتمل است.

#### مراجع

- [1]- Poschel, T., Schwager, T. and Saluena, C., "Vertically shaken column of spheres. Onset of fluidization", *Europ. Phys. J. C*, Vol. 4, 233, 2001.
- [2]- Garcimartin, A., Pastor, J.M., Arevalo, R. and Wiersma, D., "Convection in a vibrated granular layer", *The European Physical Journal*, pp. 331-340, 2007.
- [3]- Evesque, P. and Rajchenbach, J., "Instability in a Sand Heap", *Physical Review Letters*, Vol. 62, 1989.
- [4]- Brilliantov, N., Spahn, F., Hertzsch, J. and Poschel, T., "A model for collisions in granular gases", *Physical Review*, Vol. 53, 1996.

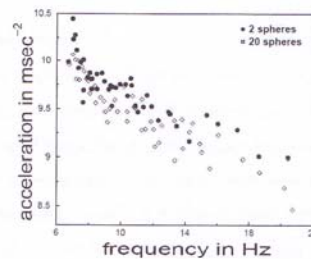
از سوئی برای مولفه مماسی نیروی تماس دو دانه طبق مدل نیرویی هاف می توان نوشت [۴]:

$$F^t = -\text{sign}(v_{rel}^t) \cdot \min\{\gamma^t \cdot |v_{rel}^t|, \mu \cdot |F^n|\} \quad (5)$$

که در آن  $v_{rel}^t$  سرعت نسبی دو دانه در نقطه برخورد،  $\mu$  ضریب اصطکاک کلمب و  $\gamma^t$  ثابت میراثی است.

#### مدلسازی پدیده سیالی شدن

در مرجع شماره [۱] مکانیزم ساده ای برای بازسازی پدیده سیالی شدن معرفی شده است. این مجموعه متشکل از یک ستون محتوی تعدادی ساچمه می باشد که به کمک موتور پله ای و بادامک مرتعش می شوند. نحوه انجام آزمون بدین ترتیب است که دور موتور به تدریج افزایش داده می شود تا جاییکه با عبور فرکانس نوسان از فرکانس بحرانی، گوی انتهایی تماس خود را با گوی پایین تر از دست داده، مسیری را بدون تماس طی کرده و مجدداً بر سر آن گوی فرود می آید. این آزمایش ابتدا با ۲ گوی، سپس با ۲۰ گوی در دامنه های نوسانی مختلف، تکرار و نتایج آن در شکل ۱ به نمایش در آمده است.



شکل ۱: شتاب بحرانی بر حسب فرکانس [۱]

به منظور تحلیل پدیده سیالی شدن پس از نگارش نرم افزار مناسب بر پایه مدل عناصر مجزا بطوریکه در تصویر نمونه شکل ۲ ملاحظه میشود این فرآیند مورد بازسازی قرار گرفته است.



شکل ۲: دو تصویر نمونه از بازسازی پدیده سیالی شدن

برای محاسبه شتاب بحرانی یکمک نرم افزار تدوین شده در هر آزمون ضمن ثابت نگه داشتن دامنه و تغییر فرکانس در بازه ۶ تا ۲۲ هرتز، فرکانسی که در آن دانه دوم تماس خود را با دانه اول از دست می دهد بعنوان فرکانس بحرانی مشخص شده است. نتایج حاصل از مدلسازی پدیده سیالی شدن در شکل ۳ به نمایش در آمده است. مقایسه این نتایج با نتایج مندرج در شکل ۱ مویدهمسوئی مدلسازی

## بررسی پدیده سیالی شدن در ستون مرتعش ذرات

جواد گوهریان<sup>۱</sup>، حمید اختراعی طوسی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ [javad.goharian@gmail.com](mailto:javad.goharian@gmail.com)  
<sup>۲</sup> استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ [ekhteraee@um.ac.ir](mailto:ekhteraee@um.ac.ir)

### چکیده

ابزارهای نوین محاسباتی و رایانه های پر سرعت امکان پردازش رفتار محیط های ناپیوسته را از طریق تحلیل جزء به جزء عناصر تشکیل دهنده محیط میسر نموده است. این توانمندی بنوبه خود راه را بر تحلیل مکانیکی رفتارهای ارتعاشی توده مواد دانه ای هموار نموده است. یکی از رفتارهای مهم ارتعاشی دانه ها پدیده موسوم به سیالی شدن است. در اصطلاح سیالی شدن<sup>۱</sup> به جدایش ذرات واقع در سطح بالایی یک سامانه از ذرات مرتعش اطلاق می شود [۱]. در راستای مطالعه این پدیده، در این مقاله با در نظر گرفتن ذرات به شکل کره های ویسکوالاستیک، متغیرهای حرکتی به کمک حل معادلات انتقال و دوران هر ذره بدست می آیند. با معرفی عدد فرود<sup>۲</sup> به عنوان معیاری برای لحظه شروع سیالی شدن و مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی، رابطه میان عدد فرود و فرکانس ارتعاش مشخص می شود. در این راستا نمودارهای شتاب بحرانی در مقابل فرکانس و عدد فرود<sup>۳</sup> در مقابل فرکانس استخراج و با نتایج تجربی موجود در منابع مطابقت داده شده است. نتایج حاکی از وجود هماهنگی بین روش تحلیلی و اطلاعات تجربی موجود می باشد. از جمله بر پایه این نتایج ملاحظه می شود در اعداد فرود کمتر از یک نیز امکان وقوع پدیده سیالی شدن وجود دارد.

**کلمات کلیدی:** سیالی شدن، مدلسازی عددی، روش عناصر مجزا، مکانیک مواد دانه ای.

### ۱. مقدمه

در محیط پیرامونی اغلب با اشکالی از ماده مواجه می شویم که از انباشت دانه های کوچکتر ترکیب یافته است. به طور مثال می توان به شن، خاک، پودر، ذغال، غلات و قرصهای دارویی اشاره کرد. بسیاری از فرآیندهای صنعتی از لحاظ ماده خام اولیه و یا محصول نهایی وابسته به مواد دانه ای هستند. از جمله این صنایع. صنایع استخراج و استحصال کانیهای معدنی، تولید مصالح ساختمانی، صنایع مواد آرایشی و دارویی، صنایع شیمیایی و غذایی می باشند. بدین لحاظ شناسایی رفتار این مواد مورد توجه صنایع مختلف می باشد و امروزه پژوهشگران با رویکردهای متفاوتی به این قبیل مطالعات می پردازند. ارتعاش مواد دانه ای بخشی از بسیاری فرآیندهای صنعتی می باشد. لرزش در فرآیندهایی همچون مخلوط کردن، جداسازی و خشک

Fluidization<sup>۱</sup>  
Froude<sup>۲</sup>  
Froude<sup>۳</sup>

کردن مواد دانه ای بکار برده می شود. لرزاندن مواد دانه ای سبب بروز رفتارهای مکانیکی متنوعی در این مواد می شود که می توان آنها را بصورت زیر طبقه بندی نمود [۳]:

- ۱- انباشت<sup>۴</sup>
- ۲- دانه بندی<sup>۵</sup>
- ۳- امواج سطحی<sup>۶</sup>
- ۴- جابجایی<sup>۷</sup>
- ۵- سیالی شدن<sup>۸</sup>

تعدادی از محققین در نتیجه مطالعاتشان به این نتیجه رسیده اند که عموم پدیده های حاصل از ارتعاش مواد دانه ای، به پارامتر تراز ارتعاش<sup>۹</sup>،  $T$ ، که آنرا به صورت کسر بی بعد نسبت بزرگی شتاب ارتعاشی به شتاب گرانش دانه ها تعریف می کنند، وابسته اند. با توجه به اینکه بزرگی شتاب ارتعاش دانه ها برابر است با حاصلضرب دامنه ارتعاش در مجذور فرکانس ارتعاشی، لذا پارامتر تراز ارتعاش به دو متغیر دامنه و فرکانس وابسته است. **واسگرن**<sup>۱۰</sup> [۴] و **هیسائو**<sup>۱۱</sup> [۵]، دریافتند زمانیکه تراز ارتعاش بصورت پیوسته افزایش یابد، به ترتیب پدیده های انباشت، انبساط<sup>۱۲</sup>، پیدایش امواج سطحی و در نهایت پدیده قوسی یا گنبدی شدن<sup>۱۳</sup> روی می دهد.

پدیده انباشت شامل شکل گیری ساختاری تپه ای شکل از دانه ها می باشد. در این شرایط شیب دیواره متناسب با خصوصیات دانه های تشکیل دهنده توده مادی می باشد. **پاک**<sup>۱۴</sup> و همکاران، تاثیر گاز سیال در بین دانه ها را روی ارتعاشات دانه ها بررسی کردند. آنها دریافتند که گاز محبوس در میان دانه ها از زمره عوامل اصلی پدیده انباشت می باشد. زمانیکه توده مرتعش مواد دانه ای از کف مخزن لرزاننده جدا می شود، سیال گازی می تواند مابین کف مخزن و دانه ها محبوس شود. گاز محبوس شده، متراکم می گردد و نیرویی رو به بالایی به توده دانه ها اعمال می کند. در نهایت این نیرو باعث پدید آمدن تپه یا توده می شود [۶].

پدیده دانه بندی به حرکت رو به بالای دانه های درشت تر و بالعکس حرکت رو به پایین دانه های ریزتر در بستر مرتعش مواد دانه ای گفته می شود. **شینبروت**<sup>۱۵</sup>، در تحقیق خود به این نتیجه رسیده است که

Heaping<sup>۴</sup>  
Segregation<sup>۵</sup>  
Surface Waves<sup>۶</sup>  
Convection<sup>۷</sup>  
Fluidization<sup>۸</sup>  
Vibration level<sup>۹</sup>  
Wassgren<sup>۱۰</sup>  
Hsiau<sup>۱۱</sup>  
Expansion<sup>۱۲</sup>  
Arching<sup>۱۳</sup>  
Pak<sup>۱۴</sup>  
Shinbrot<sup>۱۵</sup>



دانه‌های بزرگ و سنگین تمایل به حرکت رو به بالا و بالعکس دانه‌های بزرگ و سبک تمایل به حرکت رو به پایین دارند. لذا مشاهدات او نشان می‌دهد که پدیده دانه‌بندی علاوه بر ابعاد دانه‌ها به چگالی نیز وابسته است [۷]. **روزاتو**<sup>۱۶</sup>، بوسیله شبیه‌سازی کامپیوتری، پدیده دانه‌بندی یک مخلوط دوگانه مرتعش از مواد دانه‌ای را مدل‌سازی نمود. او نشان داد که پدیده دانه‌بندی ابعادی دارای یک مکانیزم هندسی است. در واقع زمانیکه دانه‌های درشت تر به سطح بالای بستر مرتعش مواد دانه‌ای صعود می‌کنند، دیگر قادر به پایین آمدن نیستند، زیرا فضای خالی بین دانه‌های ریز در سطوح پایین تر کوچکتر از آنستکه دانه‌های درشت بتوانند در آن نفوذ کنند [۸].

سطح بستر مواد دانه‌ای در اثر ارتعاش از حالت صاف به انواع گوناگون اشکال موجدار تغییر می‌کند. تغییر شکل سطح بستر در اثر ارتعاش که پدیده تشکیل امواج سطحی نام دارد به پارامتر تراز ارتعاش،  $\Gamma$ ، وابسته است. **آمنه‌پور**<sup>۱۷</sup>، به صورت تجربی به مطالعه این پدیده پرداخت و دریافت که سطح بستر کم عمق مواد دانه‌ای، با افزایش تراز ارتعاش،  $\Gamma$ ، به ترتیب از حالت صاف به صورت سطوح راه راه، مربعی، شش گوش و در نهایت آشفته یا بی‌نظم تبدیل می‌شود. لازم به یادآوری است که بستر کم عمق به بستری اطلاق می‌شود که عمق آن کمتر از ۶ برابر قطر دانه می باشد [۹]. **بیزون**<sup>۱۸</sup> از هر دو روش شبیه‌سازی عددی و تجربی برای مطالعه سه بعدی امواج سطحی ناشی از ارتعاش بستر کم عمق مواد دانه‌ای درون یک محفظه استفاده نمود [۱۰].

مواد دانه‌ای موجود در یک مخزن مرتعش، بتدریج الگوی یک جریان چرخه‌ای را بخود می‌گیرند. این جریان از بالای مخزن شروع شده، به سمت پایین آمده و مجدداً از پایین به بالا حرکت می‌کند. این پدیده که مشابه رفتاری است که بر اثر حرارت دیدن یک مایع ملاحظه می‌شود، جایجایی نام دارد. **گاریسی مارتین**<sup>۱۹</sup>، به تحقیق تجربی پدیده جایجایی در بستر مرتعش مواد دانه‌ای درون یک مخزن استوانه‌ای پرداخت. بر طبق نتایج او جایجایی زمانی شروع می‌شود که شتاب ارتعاشی از شتاب گرانشی دانه‌ها بزرگتر شود ( $\Gamma > 1$ ). همچنین گاریسی مارتین سرعت دانه‌ها را در نزدیکی دیواره اندازه گیری نمود و نشان داد که این سرعت با افزایش شتاب لرزش، افزایش می‌یابد ولی در شتابهای لرزش بزرگتر از ۳g، نرخ افزایش سرعت کاهش می‌یابد [۱۱].

از میان همه رفتارهای لرزشی دانه‌ها پدیده جدایش سطحی اهمیت بیشتری دارد. این پدیده شامل جدایش دانه‌های سطح آزاد از دانه‌های مجاور در بازه کوتاهی از هر پریرود می‌باشد که سیالی شدن نامیده شده است [۱]. **وار**<sup>۲۰</sup> از روش عکسبرداری دیجیتال پر سرعت و تکنولوژی پردازش تصویر برای مطالعه پدیده سیالی شدن برای

بستر ۲ بعدی مواد دانه‌ای مرتعش استفاده نمود. او توانست توابع توزیع سرعت را به این روش بدست آورد [۱۲].

لحظه شروع سیالی شدن برای مخزنی از دانه‌ها که تحت تحریک ارتعاش هارمونیک پایه قرار دارد غالباً معادل با زمانی در نظر گرفته می‌شود که بزرگی شتاب دانه یا ذره از شتاب ثقل بیشتر گردد. لذا در اکثر مقالات منتشر شده از عدد فرود به عنوان معیاری برای تشخیص لحظه شروع سیالی شدن استفاده شده است [۱۳و۱]. عدد فرود،  $\Gamma$ ، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \quad (1)$$

در رابطه بالا  $A$  دامنه نوسان،  $g$  شتاب ثقل و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای است. بر این اساس  $\Gamma > 1$  معیاری از لحظه شروع سیالی شدن خواهد بود. با این وجود نتایج تجربی مندرج در بررسی تجربی **پوشل**<sup>۲۱</sup> موید آنستکه عدد فرود تابعی از فرکانس بوده و حتی در  $\Gamma < 1$  نیز امکان رخ دادن پدیده سیالی شدن وجود دارد [۱].

با در نظر گرفتن ماده دانه‌ای بعنوان محیطی ناپیوسته که می‌توان آنرا محیطی مجزا نامید، در این مقاله ابتدا یک روش رایج برای مدل‌سازی سیستم مجزای مادی توسط معادلات ریاضی با اتکا به پدیده‌های برخورد و تماس دانه‌ها معرفی می‌شود. سپس بر پایه مدل مکانیکی و ریاضی معرفی شده، شیوه کدنویسی و تهیه یک نرم افزار به زبان برنامه نویسی C++ بر اساس شیوه برنامه نویسی شیء‌گرا تشریح می‌گردد. در ادامه ضمن مدل‌سازی عددی پدیده سیالی شدن بوسیله برنامه نگارش یافته به مطالعه لحظه شروع این پدیده و مقایسه نتایج حاصل با نتایج تجربی [۱] پرداخته می‌شود.

## ۲. مدل‌سازی مواد دانه‌ای

همانطور که قبلاً اشاره شد، مواد دانه‌ای ممکن است تغییر شکلی مشابه اجسام جامد یا خاکها داشته باشند، ممکن است مانند سیالات جریان پذیر یا مانند گازها تراکم پذیر باشند. با توجه به دقت مورد نیاز، روشهای متفاوتی برای شبیه‌سازی حرکت مواد دانه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند که می‌توان آنها را به دو شاخه زیر دسته بندی کرد:

- روش مکانیک محیط پیوسته<sup>۲۲</sup> (CMMs) یا مدل‌سازی ماکروسکوپیک.
- روش عناصر مجزا<sup>۲۳</sup> (DEMs) یا مدل‌سازی منفصل [۱۴].

روش عناصر مجزاء مبتنی بر کاربرد مکرر معادلات حرکت نیوتنی برای تحلیل یک مجموعه متشکل از تعداد زیادی عنصر مجزا می‌باشد. وجود کامپیوترهای پر سرعت کاربرد این شیوه تحلیل و پرداختن به مدل‌سازی مواد دانه‌ای را موجه نموده است. این روش به دلیل اینکه بر پایه استفاده از مکانیک لاگرانژی در مدل‌سازی حرکت مواد دانه‌ای استوار است، متد ساده‌ای به حساب می‌آید. یکی از زیر

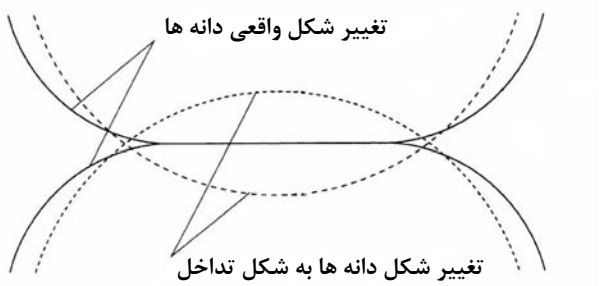
Rosato<sup>۱۶</sup>  
Umbanhowar<sup>۱۷</sup>  
Bizon<sup>۱۸</sup>  
Garcimartin<sup>۱۹</sup>  
Warr<sup>۲۰</sup>

Poschel<sup>۲۱</sup>  
Continuum Mechanics<sup>۲۲</sup>  
Discrete Element Method<sup>۲۳</sup>

نیروی  $\vec{F}_i$ ، شامل تمام نیروهایی می‌شود که در نتیجه تماس بین دانه و همسایگان آن بوجود می‌آید و در نقطه تماس دو دانه اعمال می‌گردد. یعنی،

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} \quad (3)$$

که در رابطه بالا  $\vec{F}_{ij}$  معرف نیروی وارده از سوی دانه  $j$ ام به دانه  $i$ ام است. همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، دانه‌ها مثل اجسام ویسکوالاستیک در تماس با هم باعث تغییر شکل یکدیگر می‌شوند. قابل ذکر است که نیروهای تماسی بین آنها به شکل تداخل، جنس دانه‌ها، و سرعت نسبی دانه‌ها در منطقه تماس، بستگی دارند.



شکل ۱: برخورد الاستیک دو ذره در هنگام تداخل

نیروهای اعمالی باعث ایجاد گشتاور در دانه گشته که منجر به حرکت دوار آن می‌گردد:

$$\hat{J}_i \frac{\partial^2 \vec{\varphi}_i}{\partial t^2} = \vec{M}_i \quad (4)$$

گشتاور  $\vec{M}_i$  برابر است با مجموع تمام گشتاورهای وارد شده از همسایگان و لذا:

$$\vec{M}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{M}_{ij} \quad (5)$$

اگر مقادیر نیروهای  $\vec{F}_{ij}$  و گشتاورهای  $\vec{M}_{ij}$  را برای دانه‌های برخورد کننده به صورت تابعی از موقعیت‌های  $(\vec{r}_i, \vec{\varphi}_i)$  و  $(\vec{r}_j, \vec{\varphi}_j)$  و بقیه مشتقات زمانی مختصات دانه‌ها مشخص باشد می‌توان حل عددی معادلات حرکت نیوتن در رابطه (۲) را به صورت گام به گام زمانی بدست آورد.

قوانین برخورد بین دانه‌ای وابسته به مدل انتخاب شده برای نیروهای  $\vec{F}_{ij}$  و گشتاورهای  $\vec{M}_{ij}$  وارده به دانه‌ها می‌باشند. در بخش بعد به معرفی مدل انتخاب شده برای دانه‌ها و معرفی مدل‌های نیرویی خواهیم پرداخت.

## ۲.۲. مدل دانه‌های کروی

رایج ترین مدل برای یک دانه در مواد دانه‌ای، مدل کروی می‌باشد. در این مقاله نیز دانه‌های مورد تحلیل از نوع کروی در نظر گرفته

شاخه‌های مهم روش عناصر مجزا، مدل‌های کلاسیک نیوتنی است که از معادلات دینامیک ذرات، بدست آمده از مکانیک نیوتنی برای هر ذره استفاده می‌کند. این مدل‌ها به دو روش برخورد بین دانه‌ای آنی<sup>۲۴</sup> (EDM) و روش برخورد بین دانه‌ای زمان بر<sup>۲۵</sup> (TDM) تقسیم می‌شوند [۱۴].

مبنای روش برخورد آنی (EDM)، فرض برخوردهای دوگانه است. بعبارتی در این روش برای هر دانه از مجموعه دانه‌ها در هر لحظه، تنها برخورد با یک دانه دیگر مفروض است و برخوردهای سه‌گانه و بیشتر منتفی است. این روش عموماً برای مدل‌سازی محیط‌های دانه‌ای بسیار رقیق به کار برده می‌شود. در این نوع محیط دانه‌ای، زمان برخورد یک دانه با دانه دیگر بسیار کوچکتر از زمانی است که آن دانه بطور آزادانه و بدون برخورد با دانه‌ای دیگر در فضا طی می‌کند. به عنوان نمونه می‌توان به استفاده از این روش در مدل‌سازی گازهای دانه‌ای<sup>۲۶</sup> اشاره نمود. مسیر دانه‌ها با معادلات مومنتوم، مومنتوم زاویه‌ای و انرژی بدست می‌آیند. حرکت آزاد دانه‌ها که در حالت بدون تماس بین دانه‌ای وجود دارد نیز، توسط معادلات نیروی موثر بر دانه‌ها بدست می‌آید.

حالت ذرات در روش برخورد زمان بر (TDM)، از حل گام به گام زمانی برای معادلات دینامیکی در فضای سه‌بعدی که از مکانیک نیوتنی و بر پایه قانون دوم نیوتن برای انتقال و دوران هر ذره بدست آمده، مشخص می‌شود. این فرآیند شامل بدست آوردن جزئیات نیروها و گشتاورهای اعمالی به هر دانه در هر گام زمانی، نیز می‌شود. در این تحلیل، دانه‌ها به عنوان اجسام ویسکوالاستیک دارای قابلیت تماس و ایجاد تغییر شکل در یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند. نیروهای تماسی، وابسته به میزان تغییر شکل دانه‌ها، خواص مواد، و دینامیک ذرات می‌باشد.

## ۲.۱. حل به روش برخورد زمان بر (TDM)

در این روش تحلیل، مجموعه‌ای متشکل از  $N$  دانه با ابعاد و خواص معین ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. حرکت انتقالی و دورانی دانه  $i$ ام، توسط قانون دوم نیوتن برای مرکز جرم آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2} = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}_j, \vec{v}_j, \varphi_j, \omega_j), \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \frac{1}{J_i} \vec{M}_i(\vec{r}_j, \vec{v}_j, \varphi_j, \omega_j), \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

نیروی  $\vec{F}_i$  و گشتاور  $\vec{M}_i$  بر روی دانه  $i$ ام به جرم  $m_i$  و ممان اینرسی  $J_i$  اعمال می‌شوند. نیروها و گشتاورها تابعی از موقعیت  $\vec{r}_j$ ، وضعیت زاویه‌ای  $\varphi_j$ ، سرعت خطی  $\vec{v}_j$  و سرعت زاویه‌ای  $\omega_j$  دانه هستند.

Event-Driven Method<sup>۲۴</sup>  
Time-Driven Method<sup>۲۵</sup>  
Granular gases<sup>۲۶</sup>

$$\vec{F}_{ij}^n = F_{ij}^n \vec{e}_{ij}^n \quad (10)$$

و

$$\vec{F}_{ij}^t = F_{ij}^t \vec{e}_{ij}^t \quad (11)$$

که در آن بردارهای یکه داریم:

$$\vec{e}_{ij}^n = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (12)$$

و

$$\vec{e}_{ij}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_{ij}^n \quad (13)$$

برای ساده‌سازی نگارش متن در ادامه از اندیسهای  $ij$  نیروها صرفنظر می‌شود. نیروی عمودی  $F^n$  باعث تغییر در وضعیت انتقالی دانه‌ها می‌شود و نیروی مماسی  $F^t$  نیز در وضعیت دورانی دانه‌ها تغییر بوجود می‌آورد. هر دو مولفه نیرو، مماسی و عمودی، تابعی از موقعیت نسبی دانه‌ها،  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  و سرعت نسبی آنها،  $\vec{v}_i - \vec{v}_j$  می‌باشند.

۴.۲. مدل نیرویی عمودی برای دانه‌های ویسکوالاستیک

قانون نیروی برخورد بین دانه‌های برای دانه‌های ویسکوالاستیک به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۵]:

$$F^n(\xi, \dot{\xi}) = -\rho \xi^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \eta \rho \sqrt{\xi} \dot{\xi} \quad (14)$$

که در آن  $\rho$  ثابت ارتجاعی،  $\xi$  تغییر شکل دانه پس از برخورد،  $\dot{\xi}$  نرخ تغییر شکل دانه و  $\eta$  ضریب اتلاف انرژی می‌باشد. ترم اول این مدل نیرویی جزء ارتجاعی است که برگرفته از قانون برخورد بین دانه‌های الاستیک هرترز [۱۵]<sup>۲۷</sup>، بصورت زیر می‌باشد:

$$F_{el}^n = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \xi^{\frac{3}{2}} \quad (15)$$

که در آن  $Y$  مدول یانگ،  $\nu$  ضریب پواسون و  $R_{eff}$  شعاع موثر دو دانه بوده و برابر است با:

$$R_{eff} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \quad (16)$$

پس ثابت الاستیک  $\rho$  در ترم اول معادله ۱۴ عبارتست از:

$$\rho = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \quad (17)$$

اگر از ثابت الاستیک در معادله ۱۴ فاکتور گرفته شود، شکل جدید این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$F^n(\xi, \dot{\xi}) = \frac{2Y\sqrt{R_{eff}}}{3(1-\nu^2)} \left( \xi^{3/2} + \eta \sqrt{\xi} \dot{\xi} \right) \quad (18)$$

ترم دوم معادله ۱۴، یعنی  $3\eta\rho\sqrt{\xi}\dot{\xi}/2$  بخش اتلافی مدل نیرویی ویسکوالاستیک می‌باشد.

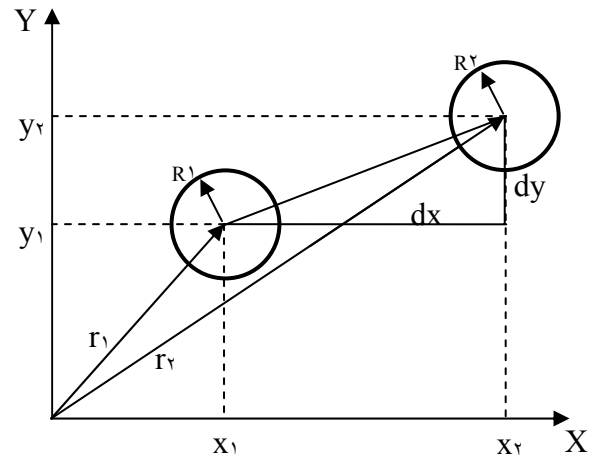
۵.۲. مدل نیرویی مماسی

شده است. در شبیه‌سازی دو بعدی مواد دانه‌ای، دانه کروی به دایره تبدیل خواهد شد. استفاده از مدل کروی در شبیه‌سازی مجموعه‌ای از مواد دانه‌ای، بدلیل سادگی تشخیص برخورد دانه‌ها، ضمن برخورداری از مزیت سادگی بنحوی که در ادامه ملاحظه می‌شود به نتایج مطلوبی منجر می‌شود.

۳.۲. دینامیک برخورد دانه‌های کروی

با توجه به شکل ۲ دو دانه کروی را که در حال نزدیک شدن به هم هستند در نظر بگیرید. پارامتر تغییر شکل  $\xi_{ij}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_{ij} = R_i + R_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (6)$$



شکل ۲: هندسه موقعیت دو دانه کروی

همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود پارامتر  $\xi_{ij}$  برای دو دانه ۱ و ۲ برابر است با:

$$\xi_{12} = R_1 + R_2 - \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (7)$$

شرط برخورد دو دانه کروی عبارتست از:

$$\xi_{ij} > 0 \quad (8)$$

بعبارت دیگر زمانی دو دانه کروی برخورد می‌کنند که تماس مکانیکی ایجاد شود یعنی مجموع شعاعهای آنها از فاصله مراکز آن دو بیشتر گردد. قابل ذکر است که تعیین رابطه تماس فیزیکی برای دیگر اشکال دانه‌ای پیچیده‌تر از دانه‌های کروی می‌باشد.

نیروی بین دو دانه برخورد کننده بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{F}_{ij} = \begin{cases} \vec{F}_{ij}^n + \vec{F}_{ij}^t & \text{اگر } \xi_{ij} > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (9)$$

زیرنویس‌های  $i$  و  $j$  در رابطه بالا شاخص‌های مربوط به شماره دانه‌های مماس شده است. در مجموعه‌های دو بعدی، مولفه‌های عمودی و مماسی نیرو را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) + \Delta t \vec{v}_i(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \frac{1}{24}(\Delta t)^4 \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t) \quad (21)$$

$$\vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) = \vec{v}_i(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t)$$

$$\ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) = \ddot{\vec{r}}_i(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t)$$

$$\ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) = \ddot{\vec{r}}_i^{(3)}(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t)$$

در مرحله بعد، از مقادیر پیش بینی شده و همچنین به کمک مدل‌های نیرویی که در صفحات قبل به آن اشاره شد، نیروها  $\vec{M}_i(\vec{r}_i^{pr}, \vec{v}_i^{pr}, \omega_j^{pr})$  و گشتاورهای  $\vec{F}_i(\vec{r}_i^{pr}, \vec{v}_i^{pr}, \omega_j^{pr})$  به دانه‌ها محاسبه می‌شوند. سپس از نیروها و گشتاورهای محاسبه شده برای اصلاح  $\ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t)$  شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای دانه‌ها  $\dot{\phi}_i^{corr}(t + \Delta t)$  استفاده می‌شود. اگر پیش بینی کاملاً دقیق باشد، متغیرهای حرکتی پیش‌بینی شده می‌بایست معادله حرکت را ارضاء کنند و  $\ddot{\vec{r}}_i^{corr} = \ddot{\vec{r}}_i^{pr}$  باشد.

پارامتر  $\Delta \ddot{\vec{r}}$  به عنوان معیاری برای سنجش انحراف مقادیر موقعیت، سرعت و شتاب پیش بینی شده از مقادیر متناسب واقعی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_i^{corr} - \ddot{\vec{r}}_i^{pr} \quad (22)$$

گام دوم الگوریتم گیر، متغیرهای پیش بینی شده را با اضافه کردن عددی که از حاصلضرب انحراف  $\Delta \ddot{\vec{r}}$  بدست آمده است، اصلاح می‌کند:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \vec{r}_i^{(4)corr}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \vec{r}_i^{(4)pr}(t + \Delta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \frac{1}{(\Delta t)^1} \\ c_2 \frac{2}{(\Delta t)^2} \\ c_3 \frac{6}{(\Delta t)^3} \\ c_4 \frac{24}{(\Delta t)^4} \end{pmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} \Delta \ddot{\vec{r}} \quad (23)$$

که در آن مقادیر ضرایب  $c_i$  به مرتبه الگوریتم و نوع معادله دیفرانسیل بستگی دارد. این ضرایب برای الگوریتم مرتبه پنج عبارتند از:

$$c_0 = \frac{19}{90}, \quad c_1 = \frac{3}{4}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = \frac{1}{12} \quad (24)$$

در انتها پس از اصلاح متغیرهای حرکتی دانه‌ها توسط گام اصلاح کننده الگوریتم، زمان برنامه به اندازه یک گام زمانی به جلو برده می‌شود،  $t + \Delta t = t$  و برنامه مدلسازی از گام پیش بینی کننده از سر گرفته شده و ادامه می‌یابد.

### ۳. نگارش نرم افزار شبیه سازی

دانه‌های موجود در یک ماده دانه‌ای هیچگاه کره کامل نیستند بلکه دارای سطحی ناصاف می‌باشند. هیچگاه نمی‌توان تپه‌ای از دانه‌های کره‌ای با سطحی کاملاً صاف ساخت زیرا با سر خوردن دانه‌ها بر روی یکدیگر تپه فرو خواهد نشست. برای این کار می‌بایست هم دانه‌های کره‌ای و هم سطح زیرین آنها دارای زبری کافی باشند. در نتیجه در برخورد‌های مایل دانه‌ها علاوه بر نیروهای عمودی، نیروهای مماسی  $F^t$  نیز وجود دارند. نیروهای مماسی که با عنوان نیروی برشی نیز نامیده می‌شوند، از اهمیت بالایی در مدلسازی نزدیک به واقعیت مواد دانه‌ای دارد.

تاکنون در بسیاری از مدلسازی‌های حرکت مواد دانه‌ای از مدل نیروی مماسی معرفی شده توسط هاف<sup>۲۸</sup> و ورنر<sup>۲۹</sup> استفاده شده است. نتایج این مدل، انطباق خوبی با نتایج تجربی داشته است [۱۵]:

$$F^t = -\text{sign}(v_{rel}^t) \cdot \min\left(\gamma^t |v_{rel}^t|, \mu |F^n|\right) \quad (19)$$

که در آن  $v_{rel}^t$  مولفه مماسی سرعت نسبی،  $\gamma^t$  ثابت میرایی و  $\mu$  ضریب اصطکاک می‌باشد. با توجه به مدل هاف، در حالتی که نیروی  $F^n$  بزرگ بوده و یا سرعت  $v_{rel}^t$  کوچک باشد، نیروی  $F^t$  برابر با ترم اول معادله ۱۹ یعنی  $\gamma^t |v_{rel}^t|$  می‌شود. در این حالت نیروی مماسی  $F^t$  همان میرایی برشی<sup>۳۰</sup> می‌باشد که توسط قانون اصطکاک کولمب به صورت زیر محدود می‌گردد:

$$|F^t| \leq \mu |F^n| \quad (20)$$

در حالتی که سرعت  $v_{rel}^t$  بزرگ بوده و یا نیروی  $F^n$  کوچک باشد، نیروی  $F^t$  برابر با ترم دوم معادله ۱۹ یعنی  $\mu |F^n|$  می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت که مدل نیرویی هاف با قانون اصطکاک کولمب مطابقت دارد.

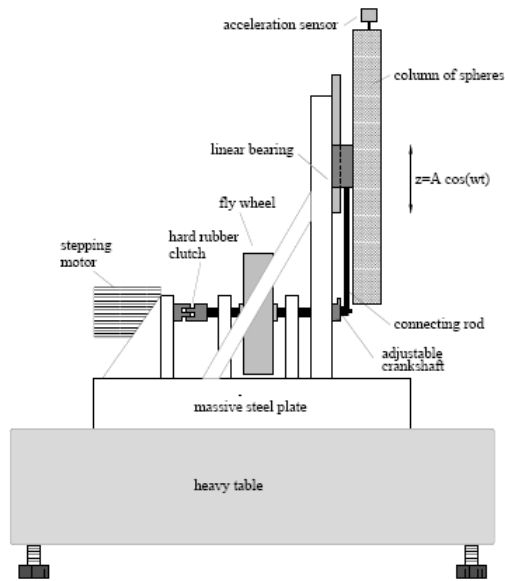
#### ۲.۶ الگوریتم حل عددی معادلات حرکت

روشهای گوناگونی برای حل عددی مجموعه‌های تشکیل شده از معادلات دیفرانسیل وجود دارد. در این بخش، تنها به معرفی یکی از این روشها خواهیم پرداخت که البته ثابت شده است که دارای نتایج خوبی در مدلسازی مواد دانه‌ای بوده است.

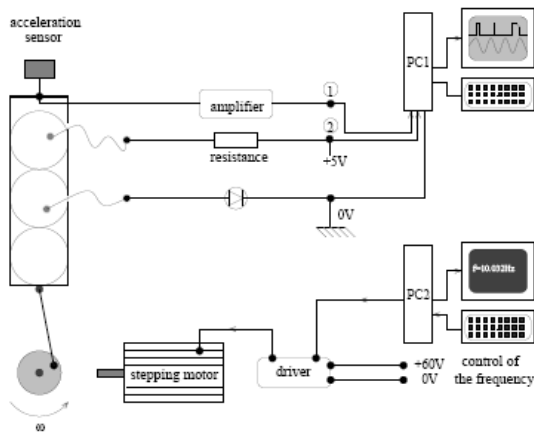
حل عددی معادلات حرکت نیوتن در رابطه ۲ برای مجموعه‌ای از مواد دانه‌ای کمی دشوار می‌باشد. الگوریتم گیر<sup>۳۱</sup> یکی از الگوریتمهای رایجی است که در مدلسازی مجموعه‌های دانه‌ای مناسب است [۱۶] [۱۷]. الگوریتم گیر از دو گام تشکیل یافته است. ابتدا موقعیت، سرعت و بقیه مشتقات زمانی دانه‌ها توسط پیش بینی کننده<sup>۳۲</sup> در زمان  $t + \Delta t$  محاسبه می‌شود. این محاسبه توسط بسط تیلور و با استفاده از متغیرهای حرکتی دانه‌ها در زمان  $t$  صورت می‌گیرد. در اکثر موارد از الگوریتم مرتبه پنج گیر استفاده می‌شود به این معنا که خطای عددی یک گام به شکل  $(\Delta t)^5$  رشد می‌کند. رابطه زیر قسمت مربوط به پیش بینی در روش مرتبه پنج گیر را نشان می‌دهد.

Haff<sup>۲۸</sup>  
Werner<sup>۲۹</sup>  
Linear Shear damping<sup>۳۰</sup>  
Gear<sup>۳۱</sup>  
Predictor<sup>۳۲</sup>

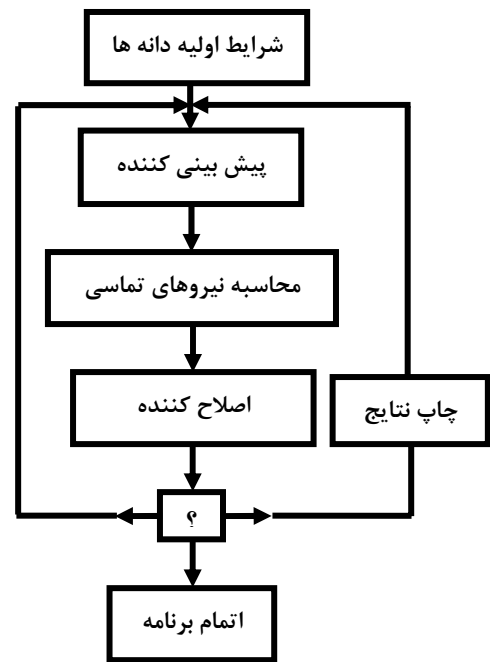
بر اساس مدل عناصر مجزا و بر پایه مدل‌های مکانیکی و ریاضی معرفی شده در این پژوهش اقدام به کدنویسی و تهیه یک نرم افزار به زبان برنامه نویسی ++C گردید. برنامه تدوین شده جهت مدلسازی پدیده انتقال ارتعاشی مواد بکار گرفته شد. شکل ۳ الگوریتم بکار گرفته شده برای نگارش نرم افزار شبیه سازی حرکت مواد دانه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۴: تصویر وسیله تحقیق تجربی سیالی شدن (برگرفته از [۱] با اصلاح) این مجموعه متشکل از یک ستون محتوی تعدادی ساچمه می‌باشد که به کمک موتور پله‌ای و بادامک مرتعش می‌شوند. نحوه انجام آزمون بدین ترتیب است که ابتدا خروج از مرکز بادامک دستگاه در یک دامنه مشخص تنظیم می‌شود. سپس دور موتور به تدریج افزوده می‌شود تا جاییکه در فرکانس معینی گوی انتهایی تماس خود را با گوی زیرین از دست داده، مسیری را بدون تماس طی نموده، مجدداً روی گوی زیرین فرود می‌آید. پس از ثبت فرکانس بعنوان مقدار بحرانی، دستگاه در دامنه نوسانی جدید تنظیم شده و مجدداً آزمایش برای یافتن فرکانس بحرانی در دامنه جدید، تکرار می‌شود. بنا به مرجع [۱]، جهت تشخیص دقیق لحظه جدایش در هر تکرار آزمایش، از یک مدار الکتریکی استفاده شده است. همانطور که در شکل ۵ دیده می‌شود، این مدار الکتریکی مابین بالاترین ساچمه و ساچمه ماقبل آن برقرار شده است.



شکل ۵: لحظه سیالی شدن با مشاهده قطع مدار الکتریکی [۱]



شکل ۳: الگوریتم شبیه سازی حرکت مواد دانه‌ای

پس از نگارش نرم افزار مناسب بر پایه مدل عناصر مجزا صحت مدل ریاضی و برنامه نگارش یافته به محک سنجش زده شد. بدین منظور بطوری که در ادامه ملاحظه می‌شود، نتایج حاصل از بازآفرینی پدیده موسوم به سیالی شدن با نتایج تجربی مرجع [۱] مقایسه گردید.

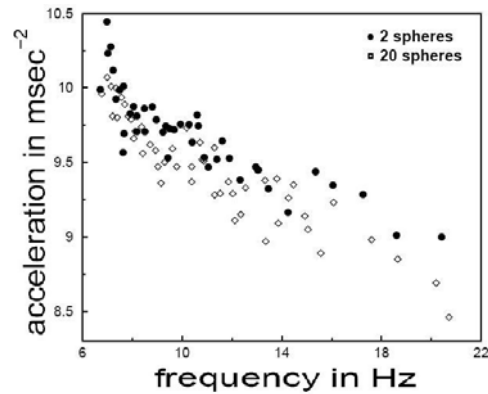
#### ۴. مدلسازی پدیده سیالی شدن

شکل ۴ مکانیزم ساده‌ای را نشان می‌دهد که در مرجع شماره [۱] برای بازسازی پدیده سیالی شدن معرفی شده است.



بطوریکه در بالا اشاره شد، با افزایش فرکانس نوسانی به فرکانس بحرانی، بالاترین ساچمه تماس خود را با ساچمه پایینی از دست می‌دهد و این امر موجب قطع جریان الکتریکی و ثبت فرکانس بحرانی می‌گردد.

این آزمایش ابتدا با ۲ گوی، سپس با ۲۰ گوی در دامنه‌های نوسانی مختلف، تکرار و نتایج آن در شکل ۶ به نمایش در آمده است.



شکل ۶: شتاب بحرانی بر حسب فرکانس [۱]

مدل در نظر گرفته شده برای بازسازی پدیده سیالی شدن شامل سامانه ای متشکل از یک صفحه مرتعش، دانه های کروی ویسکوالاستیک و دیواره‌های محدود کننده است. در این مدل به ترتیبی که در بخش ۲ این مقاله توضیح داده شد تا حد امکان هندسه برخورد به شکل واقع بینانه بازسازی شده است. جدول ۱ مقادیر متغیرهای مدلسازی از جمله خصوصیات دانه‌های کروی بکار رفته را نمایش می‌دهد.

جدول ۱: مقادیر متغیرهای مدلسازی

نام خصوصیت	علامت	مقدار
گام زمانی (ثانیه)	$\Delta t$	$1 \times 10^{-6}$
شعاع دانه (میلیمتر)	$R$	۱۲/۵
چگالی (کیلوگرم/مترمکعب)	$m$	۷۷۰۰
ضریب پواسون	$\nu$	۰/۲۹
مدول یانگ (گیگا پاسکال)	$Y$	۲۱۰
ضریب اصطکاک	$\mu$	۰/۵
ضریب اتلاف انرژی	$\eta$	۰/۳
ثابت میرایی	$\gamma^t$	۰/۳

شرایط مرزی سیستم عبارتست از یک صفحه که از یک طرف توسط یک دیواره محدود گشته و دارای معادله ارتعاشی زیر است:

$$y = A \cos(\omega t) \quad (25)$$

که در آن  $A$  دامنه و  $\omega$  فرکانس ارتعاش می‌باشد. با توجه به رابطه ۲۵، شتاب ارتعاشی صفحه عبارتست از:

$$\ddot{z} = A \omega^2 \cos(\omega t) \quad (26)$$

شکل ۷ چند نما از بازسازی فرآیند سیالی شدن را به کمک برنامه نگاشته شده نمایش می‌دهد.

$t = 0 \text{ sec}$

$t = 0.2 \text{ sec}$

$t = .35 \text{ sec}$

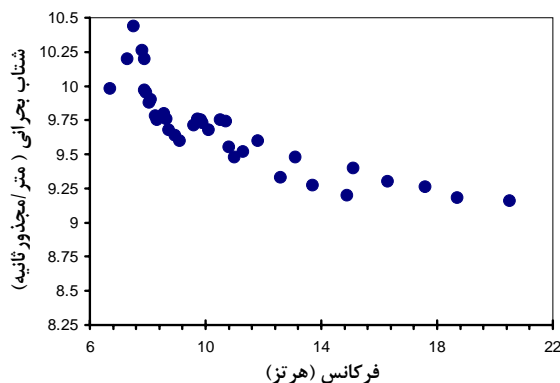
$t = 0.5 \text{ sec}$

شکل ۷: چند تصویر نمونه از بازسازی پدیده سیالی شدن

مدلسازی با در نظر گرفتن مقداری ثابت برای دامنه ارتعاشی یعنی پارامتر  $A$  در رابطه ۲۵ آغاز می‌شود. در هر آزمون ضمن ثابت نگه داشتن دامنه و تغییر فرکانس در بازه ۶ تا ۲۲ هرتز، فرکانسی که در آن دانه اول تماس خود را با دانه دوم از دست می‌دهد بعنوان فرکانس بحرانی ثبت می‌گردد.

تشخیص دقیق لحظه جدایش دو کره، با کنترل پارامتر تغییر شکل  $\epsilon_{ij}^k$  در هر گام زمانی، میسر گشته است. همانطور که در ابتدای مقاله و در رابطه ۶ نشان داده شد، این پارامتر برابر با اختلاف میان مجموع شعاع دو کره و فاصله مراکز آن دو می‌باشد. لذا به محض منفی شدن این مقدار، برنامه متوقف و فرکانس ارتعاشی ثبت می‌شود. از فرکانس بحرانی ثبت شده، جهت محاسبه شتاب بحرانی یعنی  $A\omega^2$  در رابطه ۲۶ استفاده می‌شود.

شکل ۸ نتایج حاصل از محاسبه شتاب بحرانی در مقابل فرکانس را نشان می‌دهد. مقایسه این نتایج با نتایج مندرج در شکل ۶ موید همسویی مدلسازی این مقاله با نتایج تجربی موجود در مرجع [۱] است.



شکل ۸: شتاب بحرانی بر حسب فرکانس



*granular mixtures*, Mech. Eng. PhD Thesis, Worcester Polytechnic Institute, ۱۹۹۹.

[۳]- Klongboonjit, S., *The effects of particle elasticity on the convection in deep vertically shaken particles beds*, Mech. Eng. PhD Thesis, University of Southern California, ۲۰۰۵.

[۴]- Wassgren, C., *Vibration of granular materials*, PhD Thesis, California Institute of Technology, ۱۹۹۷.

[۵]- Hsiau, S. S., and Pan, S. J., "Motion state transitions in a vibrated granular bed," *Powder technology*, Vol. ۹۶, pp. ۲۱۹-۲۲۶, ۱۹۹۸.

[۶]- Pak, H. K., Van Doorn, E., and Behringer, R. P., "Effects of ambient gases on granular materials under vertical vibration," *Phys. Rev. Letters*, Vol. ۷۴, pp. ۴۶۴۳-۴۶۴۶, ۱۹۹۵.

[۷]- Shinbrot, T., and Fernando J. M., "Reverse Buoyancy in shaken granular beds," *Phys. Rev. Letters*, Vol. ۸۱, pp. ۴۳۶۵-۴۳۶۸, ۱۹۹۸.

[۸]- Rosato, A., Strandburg, K. J., Prinz, F., and Swendsen, R. H., "Why the brazil nuts are on top: Size segregation of particulate matter by shaking," *Phys. Rev. Letters*, Vol. ۵۸, pp. ۱۰۳۸-۱۰۴۰, ۱۹۸۷.

[۹]- Umbanhowar, P., Melo, F., "Periodic, aperiodic and transient patterns in vibrated granular layers," *Physica A*, Vol. ۲۴۹, pp. ۱-۹, ۱۹۹۸.

[۱۰]- Bizon, C., Shattuck, M. D., Swift, J. B., McCormick, W. D., Harry, L.S., "Patterns in ۳D vertically oscillated granular layers: Simulation and experiment," *Phys. Rev. Letters*, Vol. ۸۰, pp. ۵۷-۶۰, ۱۹۹۸.

[۱۱]- Garcimartin, A., Maza, D., and Zuriguel, I., "Convective motion in a vibrated granular layer," *Phys. Rev. E*, Vol. ۶۵, ۰۳۱۳۰۳, ۲۰۰۲.

[۱۲]- Warr, S., Jonathan, M., and Jacques, T. H., "Fluidization of a two dimensional granular system: Experimental study and scaling behavior," *Phys. Rev. E*, Vol. ۵۲, pp. ۵۵۸۳-۵۵۹۵, ۱۹۹۵.

[۱۳]- Garcimartin, A., Pastor, J.M., Arevalo, R. and Maza, D., "Convection in a vibrated granular layer", *The European Physical Journal*, pp. ۳۳۱-۳۴۰, ۲۰۰۷.

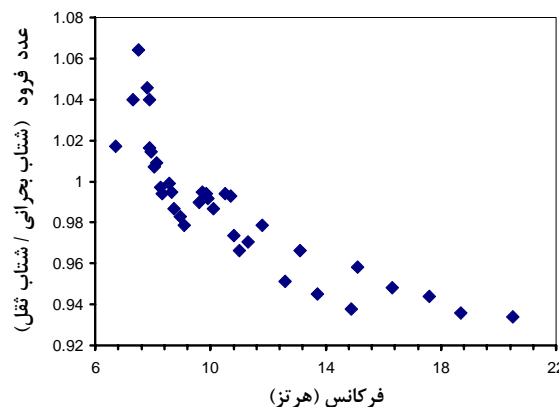
[۱۴]- Bernard, P., and Dziugys, A., "Numerical simulation of the motion of granular material using object-oriented techniques," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. ۱۹۱, pp. ۱۹۸۳-۲۰۰۷, ۲۰۰۲.

[۱۵]- Brilliantov, N., Spahn, F., Hertzsch, J., and Poschel, T., "A model for collisions in granular gases," *J. Phys. Rev.*, Vol. ۵۳, ۱۹۹۶.

[۱۶]- Allen, M. P., Tildesley, D. J., *Computer simulations of liquids*. Clarendon Press, Oxford, ۱۹۸۷.

[۱۷]- Gear, C. W., *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. ۱۹۷۱.

همانطور که قبلاً اشاره شد، نتایج مندرج در بررسی تجربی مرجع [۱] موید آنستکه عدد فرود تابعی از فرکانس بوده و حتی در  $\Gamma < 1$  نیز امکان رخ دادن پدیده سیالی شدن وجود دارد. از این رو در ادامه پژوهش، با استفاده از رابطه ۱ و فرض مقدار ۹/۸۱ برای شتاب ثقل دانه‌ها، مقدار عدد فرود در طی مدلسازی محاسبه گردید. نتایج حاصل به صورت عدد بی بعد فرود در مقابل فرکانس در شکل ۹ به نمایش در آمده است. همانطور که دیده می‌شود حتی در اعداد فرود کمتر از ۱ نیز پدیده سیالی شدن رخ می‌دهد.



شکل ۹: عدد فرود بر حسب فرکانس

#### ۴. نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله به بررسی پدیده سیالی شدن ذرات انباشته شده بر روی هم در شرایط ارتعاش پرداخته شده است. پدیده سیالی شدن از زمره رفتارهای مواد دانه ای در شرایط برانگیزش لرزشی می باشد. به منظور مدلسازی این پدیده با فرض رفتار ویسکوالاستیک برای دانه ها معادلات حاکم معرفی گردیده است. در مدل دو بعدی تنظیم شده از دیسکها بعنوان دانه استفاده شده است. بر مبنای معادلات ارائه شده یک برنامه رایانه ای نگارش یافته و از آن برای پیش بینی شرایط وقوع پدیده سیالی شدن استفاده گردیده است. برای آزمودن صحت مدلسازی از نتایج بدست آمده در آزمونهای تجربی دیگر پژوهشگران که در متن مقاله به آن اشاره شده بهره گرفته شده است. نتایج تحلیل در قالب نمودارهای شتاب بحرانی در مقابل فرکانس و عدد فرود<sup>۳۴</sup> در مقابل فرکانس ارائه شده است. مقایسه نتایج حاصل از این مدلسازی و کارهای تجربی دیگران نشان می دهد که مدل ریاضی عناصر مجزا برای پیش بینی سیالی شدن مناسب است. ارائه نتایج بر حسب عدد فرود نشان میدهد که به ازاء عدد فرود کوچکتر از ۱ نیز وقوع پدیده سیالی شدن محتمل است.

#### مراجع

[۱]- Poschel, T., Schwager, T., and Saluena, C., "Vertically shaken column of spheres. Onset of fluidization," *Europ. Phys. J. C*, Vol. ۴, ۲۳۳, ۲۰۰۱.

[۲]- Wang, L., *Vibratory sieving of mono-sized granular assemblies and vibratory size segregation of binary*