روش مقاطع به کمک تئوری صفحات

فریدون ایرانی
گروه عمران دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی

چکیدهٔ مقاله

در این مقاله با استفاده از تئوری صفحات روشی جهت تحلیل تنش در سازه‌های متشکل از عناصر مسطح (غیر منحنی) ارائه شده است. به عبارت دیگر امکان تحلیل تنش در کلیه سازه‌ها یا قطعاتی که تجزیهٔ آنها به عناصر مسطح با شکل مستطیلی ممکن باشد به کمک این روش وجود دارد.

در این روش سازه را به کمک برش‌های طولی لازم به تعدادی صفحهٔ مستطیلی شکل تجزیه می‌کنند، به نحوی که تحلیل هر یک از صفحات بدست آمده توسط تئوری صفحات ممکن باشد. عکس العمل‌های صفحات درطول این برش‌ها با سری فوریه نمایش داده می‌شود. یکپارچگی سازه نیز با اعمال شرایط سازگاری تغییر مکان‌ها در طول برش‌ها تأمین خواهد شد. اعمال شرایط سازگاری تغییر مکان‌ها منجر به دستگاه معادلاتی خطی می‌شود که از طریق حل این دستگاه معادلات ضرایب سری‌های فوریه مربوط به نمایش بارها و لنگرهای مؤثر بر لبه‌های صفحات مستطیلی به دست خواهد آمد.

۱ ــ مقدمه

می‌دانیم که به کمک تئوری صفحات می‌توان به تحلیل قطعات مسطح با شرایط مرزی معلوم پرداخت در سازه‌های مهندسی یکی از متداول‌ترین نوع صفحات، صفحه‌ای است که دارای شکل مستطیلی باشد. روش قدیمی و رایج تحلیل تنش در صفحات مستطیلی نیز بر استفاده از سری‌های مثلثاتی از نوع فوریه استوار است. در این روش با اعمال شرایط حدی بر صفحه ضرایب سری‌های فوریهٔ مربوط به تنش‌ها و تغییرمکان‌های نقاط مختلف صفحه معین می‌گردد. چون تئوری صفحات را نمی‌توان مستقیماً بر قطعه‌ای که خود ترکیبی از چند صفحه باشد (نظیر تیر نیم رخ‌های فولادی) اعمال کرد ما در این مقاله روشی را ارائه کرده‌ایم

b : عرض صفحه در امتداد محور y

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$: سختی خمشی صفحه

$E, \bar{E}$: مقادیر ثابت تابع تغییر مکان در امتداد محور z

$F, \bar{F}$: مقادیر ثابت تابع تغییر مکان در امتداد محور z

$f_m(y)$: بخشی از تابع ایری که تابع تغییرات y است

g_r : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار قائم مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

g_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار قائم مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

l : طول صفحه در امتداد محور x

m_r : ضریب سری فوریه مربوط به تابع لنگر خمشی مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

m_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع لنگر خمشی مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

M_r : لنگر خمشی مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

M_l : لنگر خمشی مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

N_r : بار عرضی مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

N_l : بار عرضی مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

Q_r : بار قائم مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

Q_l : بار قائم مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

S_r ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار عرضی مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

S_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار عرضی مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

t : ضخامت صفحه

t_r : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار برشی مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

t_l : ضریب سری فوریه مربوط به تابع بار برشی مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

T_r : بار برشی مؤثر بر لبهٔ راست صفحه

T_l : بار برشی مؤثر بر لبهٔ چپ صفحه

U_r : تغییر مکان در امتداد محور x لبهٔ راست صفحه

U_l : تغییر مکان در امتداد محور x لبهٔ چپ صفحه

V_r : تغییر مکان در امتداد محور y لبهٔ راست صفحه

V_l : تغییر مکان در امتداد محور y لبهٔ چپ صفحه

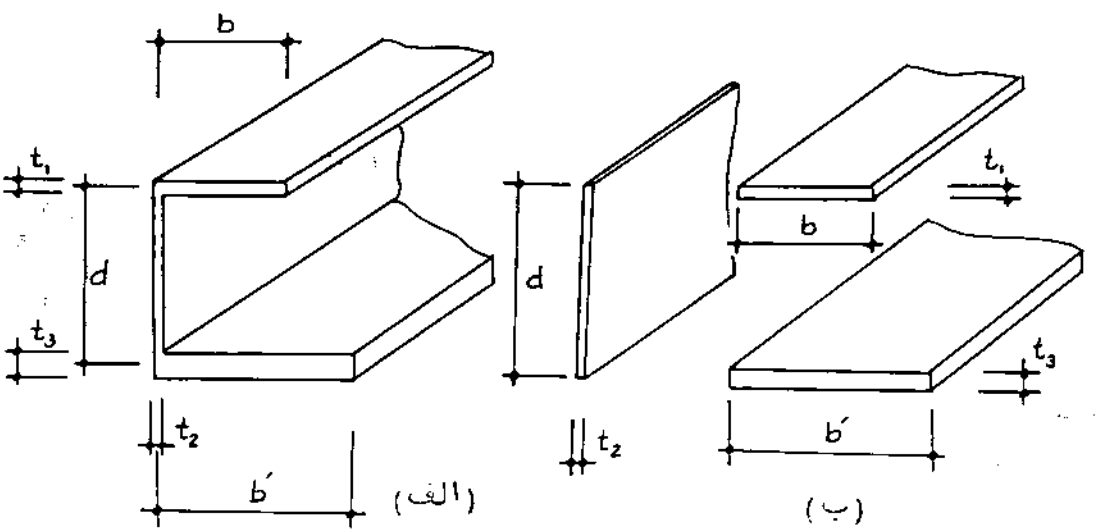
W_r : تغییر مکان در امتداد محور z لبهٔ راست صفحه

W_l : تغییر مکان در امتداد محور z لبهٔ چپ صفحه

که از طریق آن میتوان به تحلیل تنش قطعاتی پرداخت که امکان تجزیهٔ آنها به صفحاتی مستطیلی که در طول دو لبهٔ مقابل خود روی دو تکیهگاه ساده قرار داشته باشند ممکن باشد.

به عنوان مثال قطعهای به شکل [(شکل ۱ ــ الف) را در نظر بگیرید. این قطعهٔ طویل را که در دو انتهای خود روی دو تکیهگاه ساده قرار دارد میتوان به سه صفحهٔ I، II، III تجزیه کرد (شکل ۱ ــ ب) و هریک از این سه صفحه را سر میتوان با استفاده از تئوری صفحات مورد تحلیل تنش و تغییر مکان قرار داد. برای اینکه هریک از این سه صفحه گویای تحت حاشیه خورد در قطعهٔ [شکل باشد باید سازگاری تغییر مکانها (تغییرمکان طولی، تغییرمکان عرضی، تغییرمکان قائم و دوران حول محور طولی) در طول خطوط اتصال این صفحات با یکدیگر تأمین گردد. روابط سازگاری تغییر مکانها معادلاتی را تشکیل خواهد داد که محولات این معادلات ضرایب سریهای فوریهٔ مربوط به بارهای مؤثر در طول خطوط اتصال صفحات فوق الذکر خواهد بود.

فرضیات حاکم براین روش همان فرضیات حکام برتئوری صفحات نازک ارتجاعی، همگن و ایزوتروپ است.



شکل (۱)

برای بررسی هر یک از صفحات I، II و III (شکل ۱) از محورهای مختصات خاص صفحه استفاده خواهیم کرد و تغییر مکانهای مورد محاسبه را برطبق این محورهای

مختصات معین خواهیم نمود . به عنوان مثال اگر صفحه III مورد نظر باشد می‌توان از محورهای مختصات شکل (۲) استفاده کرد که در این صورت تغییر مکان‌های زیر در طول دو لبهٔ AA' و BB' صفحه محاسبه خواهد شد .

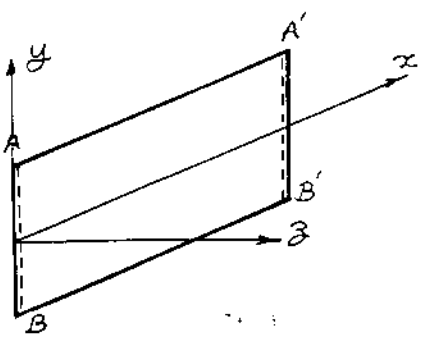
۱ ــ تغییر مکان طولی در امتداد محور x

۲ ــ تغییر مکان قائم در امتداد محور y

۳ ــ تغییر مکان عرضی در امتداد محور z

۴ ــ دوران در جهت ساعت گرد حول محور x

یادآور می‌شود به منظور دستیابی به تعاریف علائم و مختصات کمیات و توابعی که در متن مقاله معین شده است باید به ضمائم ۱ و ۲ مراجعه کرد .

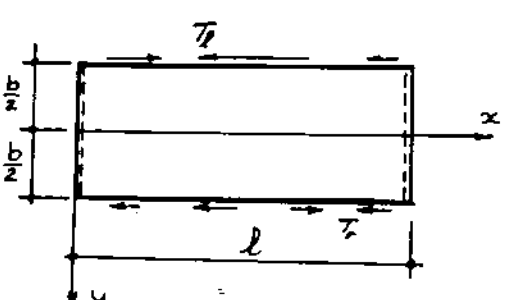


شکل (۲)

۲ ــ استخراج روابط مربوط به تغییر مکان‌های صفحه

الف ــ تغییر مکان‌های مربوط به تنش‌های مستوی

صفحه‌ای مستطیلی مطابق شکل (۳) درنظر بگیرید . اگر این صفحه در طول دو لبهٔ آزاد راست و چپ خود به ترتیب تحت اثر بارهای برشی T_r و T_l قرار داشته باشد ، مقدار تغییر مکان صفحه در جهت x که با U نشان داده شده است به صورت زیر محاسبه خواهد شد :



$$T_r = \sum_{m=1}^{\infty} t_r \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$T_l = \sum_{m=1}^{\infty} t_l \cos \frac{m\pi x}{l}$$

شکل (۳)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{E}\int(\sigma_x - \nu\sigma_y)\,dx \qquad (۱)$$

اگر تابع تنش را که تابع ایری Airy نامیده می‌شود با سری فوریه از رابطهٔ ۲ نشان دهیم پس از قرارداد ن روابط مربوط به تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} از روابط ۳ در رابطهٔ (۴) پاسخ نهایی تابع ایری به صورت رابطهٔ (۵) در خواهد آمد .

$$\Pi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y)\sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (۲)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y} \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial^4\Pi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Pi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Pi}{\partial y^4} = 0 \qquad (۴)$$

$$\Pi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[A\,ch\frac{m\pi y}{l} + \bar{A}\,sh\frac{m\pi y}{l} + B\frac{m\pi y}{l}sh\frac{m\pi y}{l} + \bar{B}\frac{m\pi y}{l}sh\frac{m\pi y}{l}\right]\sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (۵)$$

با استفاده از تابع ایری مقادیر تنش از طریق روابط (۳) استخراج می‌شود و مقادیر ثابت تابع ایری نیز از طریق اعمال شرایط حدی صفحه معین خواهد شد حال اگر مقادیر تنش‌های σ_x و σ_y را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم مقدار تغییر مکان U که حاصل از اثر بارهای برشی T_r و T_l بر دو لبهٔ آزاد صفحه است با رابطهٔ (۶) بیان خواهد شد .

$$U_r = \frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left\{t_r\left[(\theta_y - \nu\varphi_y) + (\bar{\theta}_y - \nu\bar{\varphi}_y)\right] + t_l\left[(\theta_y - \nu\varphi_y) - (\bar{\theta}_y - \nu\bar{\varphi}_y)\right]\right\}\cos\frac{m\pi x}{l} \qquad (۶)$$

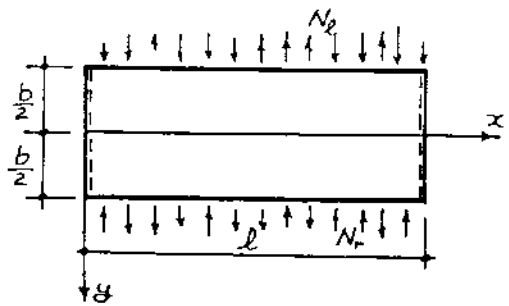
به روشی مشابه می‌توان با قرار دادن مقادیر تنش‌های σ_x و σ_y از رابطهٔ (۳) در رابطهٔ (۷) به محاسبهٔ تغییرمکان صفحه در جهت محور y که با V نشان داده می‌شود اقدام نمود .

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{E}\int(\sigma_y - \nu\sigma_x)\,dy \qquad (۷)$$

پس از انجام محاسبات لازم ، مقدار تغییر مکان V صفحه تحت اثر بارهای برشی T_r و T_l با رابطهٔ (۸) بیان می‌شود .

$$V_r = -\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\int\left\{t_r\left[(\varphi_y - \nu\theta_y) + (\bar{\varphi}_y - \nu\bar{\theta}_y)\right] + t_l\left[(\varphi_y - \nu\theta_y) - (\bar{\varphi}_y - \nu\bar{\theta}_y)\right]\right\}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dy \qquad (۸)$$

برای تعیین روابط مربوط به تغییر مکان‌های طولی و عرضی صفحه ، تحت اثر بارهای عرضی ، به روشی مشابه آنچه در فوق بیان شد عمل می‌گردد . صفحهٔ مستطیلی شکل (۴) را که در طول دو لبهٔ آزاد راست و چپ خود تحت اثر بارهای عرضی N_r و N_l قرار دارد درنظر می‌گیریم . با اعمال شرایط حدی صفحه مقادیر ثابت تابع انرژی را معین کرده و سپس با استفاده از معادلات (۱) و (۷) به ترتیب به تعیین تغییر مکان‌های U و V خواهیم پرداخت . پس از انجام محاسبات لازم به روابط (۹) و (۱۰) خواهیم رسید .



$$N_r = \sum_{m=1}^{\infty} S_r \sin\frac{m\pi x}{l}$$
$$N_l = \sum_{m=1}^{\infty} S_l \sin\frac{m\pi x}{l}$$

شکل (۴)

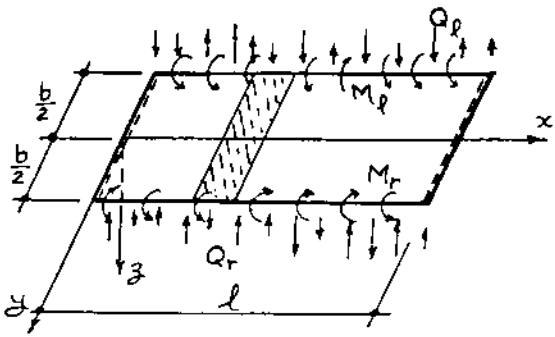
$$U_n = \frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left\{S_r\left[(\eta_y-\nu\psi_y)+(\bar{\eta}_y-\nu\bar{\psi}_y)\right]+S_l\left[(\eta_y-\nu\psi_y)-(\bar{\eta}_y-\nu\bar{\psi}_y)\right]\right\}\cos\frac{m\pi x}{l} \qquad (۹)$$

$$V_n = -\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\int\left\{S_r\left[(\psi_y-\nu\eta_y)+(\bar{\psi}_y-\nu\bar{\eta}_y)\right]+S_l\left[(\psi_y-\nu\eta_y)+(\bar{\psi}_y-\nu\bar{\eta}_y)\right]\right\}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dy \qquad (۱۰)$$

ب ـ تغییر مکان و دوران حاصل از خمش صفحه

به منظور تعیین مقادیر تغییر مکان قائم و دوران مقطع صفحه در نقاط مختلف آن ، از نظریه خمشی صفحات مستطیلی شکل استفاده خواهد شد و در این راستا روش عملی لوی Levy را بکار خواهیم برد .

صفحه‌ای مستطیلی مطابق شکل (۵) را که در طول دو لبهٔ آزاد راست و چپ خود تحت اثر بارهای قائم و لنگرهای خمشی که به ترتیب با (Q_r ، M_r) و (Q_l ، M_l) نشان داده شده است قرار دارد را در نظر می‌گیریم ، شرایط تعادل خمشی صفحه برقراری معادلات (۱۱) را ایجاب می‌کند .



$$Q_r = \sum_{m=1}^{\infty} g_r \sin\frac{m\pi x}{\ell}$$
$$M_r = \sum_{m=1}^{\infty} m_r \sin\frac{m\pi x}{\ell}$$
$$Q_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} g_\ell \sin\frac{m\pi x}{\ell}$$
$$M_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} m_\ell \sin\frac{m\pi x}{\ell}$$

شکل (۵)

$$-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = M_r \qquad y = +\frac{b}{2}$$
$$-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = M_\ell \qquad y = -\frac{b}{2}$$
$$-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right] = Q_r \qquad y = +\frac{b}{2} \qquad (۱۱)$$
$$-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right] = Q_\ell \qquad y = -\frac{b}{2}$$

اگر بارخارجی موثر برصفحهٔ شکل (۵) را به کمک سری فوریه با رابطهٔ (۱۲) بیان دهیم .از حل معادلهٔ کلی خمش صفحات (معادله ۱۳) رابطهٔتغییرمکان صفحه به صورت رابطهٔ (۱۴) بیان خواهد شد .

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin\frac{m\pi x}{\ell} \qquad (۱۲)$$

$$\nabla^4 W = \frac{q}{D} \qquad (۱۳)$$

$$W = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{\ell}{m\pi}\right)^4 K + E\,ch\frac{m\pi y}{\ell} + F\frac{m\pi y}{\ell}\,sh\frac{m\pi y}{\ell} + \bar{E}\,sh\frac{m\pi y}{\ell} + \bar{F}\frac{m\pi y}{\ell}\,ch\frac{m\pi y}{\ell}\right]\sin\frac{m\pi x}{\ell} \qquad (۱۴)$$

بدیهی است با معلوم بودن معادلهٔ تغییر مکان قائم صفحه (w) تغییر مقدار دوران مقطع صفحه حول محور y در هر نقطه از صفحه از طریق اعمال رابطه (۱۵) ممکن خواهد بود .

$$\phi = \frac{\partial W}{\partial y} \qquad (۱۵)$$

۳ ــ تعیین معادلات تغییر مکان و دوران در طول لبه‌های آزاد صفحه

به منظور برقراری شرایط سازگاری در طول برش‌های ایجاد شده لازم است که مقادیر تغییر مکان‌ها و دوران را در طول لبه‌های آزاد صفحه مستطیلی به دست آوریم. این صفحه در طول دو لبهٔ آزاد خود تحت اثر بارهای برشی، عرضی، قائم و لنگر خمشی قرار دارد و احتمال دارد که بر سطح خارجی آن باری بر طبق رابطهٔ (۱۲) نیز اثر کند.

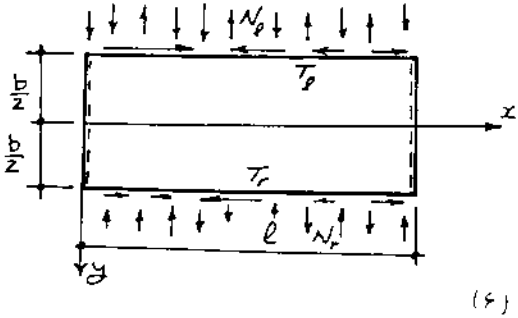
اگر بخواهیم مقادیر تغییر مکان طولی U را در طول لبه‌های آزاد صفحه به دست آوریم، کافی است موقعیت لبه‌های آزاد را که با $y = \pm \frac{b}{2}$ معین می‌شود در روابط (۶) و (۹) اعمال کنیم. در این صورت خواهیم داشت (روابط ۱۶):

$$\left|\begin{array}{l} (U_r)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{mn}\right)\left[t_r(\theta \pm \bar{\theta}) + t_\ell(\theta \mp \bar{\theta})\right]\cos\frac{mnx}{\ell} \\ (U_\ell)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{mn}\right)\left\{s_r\left[(\eta-\nu)\pm(\bar{\eta}-\nu)\right] + s_\ell\left[(\eta-\nu)\mp(\bar{\eta}-\nu)\right]\right\}\cos\frac{mnx}{\ell} \end{array}\right. \qquad (۱۶)$$

مقادیر تغییر مکان‌های عرضی V در طول لبه‌های آزاد صفحه نیز به روشی مشابه و با اعمال مقادیر $y = \pm \frac{b}{2}$ در روابط (۸) و (۱۰) به صورت زیر (روابط ۱۷) به دست خواهد آمد:

$$\left|\begin{array}{l} (V_r)_{y=\pm\frac{b}{2}} = -\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{mn}\right)\left\{t_r\left[\pm(\eta-\nu)+(\bar{\eta}-\nu)\right] + t_\ell\left[\pm(\eta-\nu)-(\bar{\eta}-\nu)\right]\right\}\sin\frac{mnx}{\ell} \\ (V_\ell)_{y=\pm\frac{b}{2}} = -\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{mn}\right)\left[s_r\left(\pm\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right) + s_\ell\left(\pm\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)\right]\sin\frac{mnx}{\ell} \end{array}\right. \qquad (۱۷)$$

بدین ترتیب اگر صفحه‌ای مستطیلی مطابق شکل (۶) تحت تأثیر بارهای برشی و عرضی در طول دو لبهٔ خود قرار داشته باشد، مقادیر تغییر مکان طولی U و تغییر مکان عرضی V در طول لبهٔ آزاد آن به ترتیب از طریق روابط (۱۸) و (۱۹) معین خواهد شد:



$$T_r = \sum_{m=1}^{\infty} t_r \cos\frac{mnx}{\ell}$$
$$N_r = \sum_{m=1}^{\infty} s_r \sin\frac{mnx}{\ell}$$
$$T_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} t_\ell \cos\frac{mnx}{\ell}$$
$$N_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} s_\ell \sin\frac{mnx}{\ell}$$

شکل (۶)

(۱۸)

$$\left|\begin{array}{l} U_{y=+\frac{b}{2}} = \frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{mn}\right)\left[t_r(\theta+\bar{\theta})+t_l(\theta-\bar{\theta})+s_r(\eta+\bar{\eta}-2\nu)+s_l(\eta-\bar{\eta})\right]\cos\frac{mnx}{l} \\ U_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{mn}\right)\left[t_r(\theta-\bar{\theta})+t_l(\theta+\bar{\theta})+s_r(\eta-\bar{\eta})+s_l(\eta+\bar{\eta}-2\nu)\right]\cos\frac{mnx}{l} \end{array}\right.$$

(۱۹)

$$\left|\begin{array}{l} V_{y=+\frac{b}{2}} = -\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{mn}\right)\left[t_r(\eta+\bar{\eta}-2\nu)+t_l(\eta-\bar{\eta})+s_r\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)+s_l\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)\right]\sin\frac{mnx}{l} \\ V_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{mn}\right)\left[t_r(\eta-\bar{\eta})+t_l(\eta+\bar{\eta}-2\nu)+s_r\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)+s_l\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}\right)\right]\sin\frac{mnx}{l} \end{array}\right.$$

اگر بخواهیم مقادیر تغییر مکان قائم w و دوران مقطع ϕ را در طول لبه‌های آزاد صفحهٔ مورد نظر به دست آوریم کافی است که مقادیر $y = \pm\frac{b}{2}$ را در معادلات (۱۴) و (۱۵) قرار دهیم . در این صورت مقادیر تغییر مکان قائم و دوران مقطع در طول دو لبهٔ آزاد صفحه با روابط (۲۰) و (۲۱) بیان خواهد شد :

(۲۰)

$$(w)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{mn}\right)^2\left\{2\Delta_3 K\left(\frac{l}{mn}\right)^2-(\Delta_1\pm\bar{\Delta}_1)m_r-(\Delta_1\mp\bar{\Delta}_1)m_l+2\left(\frac{l}{mn}\right)\left[(\Delta_2\pm\bar{\Delta}_2)\vartheta_r+(\Delta_2\mp\bar{\Delta}_2)\vartheta_l\right]\right\}\sin\frac{mnx}{l}$$

(۲۱)

$$(\phi)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \pm\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{mn}\right)\left\{4\nu\Delta_6 K\left(\frac{l}{mn}\right)^2-2\left[(\Delta_4\pm\bar{\Delta}_4)m_r+(\Delta_4\mp\bar{\Delta}_4)m_l\right]+\left(\frac{l}{mn}\right)\left[(\Delta_5\pm\bar{\Delta}_5)\vartheta_r+(\Delta_5\mp\bar{\Delta}_5)\vartheta_l\right]\right\}\sin\frac{mnx}{l}$$

۴ ــ معادلات سازگاری

برای این که سازگاری تغییر مکان‌های دو صفحهٔ واقع در طرفین یک خط‌برش تأمین گردد باید مجموع تغییرمکان‌های هریک از صفحات در طول آن خط‌برش در معادلات (۲۲) صدق کند . در این معادلات تغییر مکان‌های با پانویس l مربوط به صفحهٔ واقع در سمت چپ خط برش و تغییر مکان‌های با پانویس r مربوط به صفحهٔ واقع در سمت راست خط برش است .

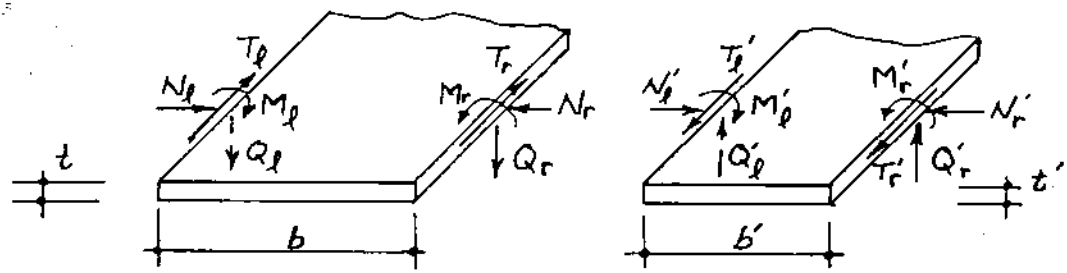
$$\left|\begin{array}{l} \Sigma U_l = \Sigma U_r \\ \Sigma V_l = \Sigma V_r \\ \Sigma W_l = \Sigma W_r \\ \Sigma \phi_l = \Sigma \phi_r \end{array}\right. \qquad (۲۲)$$

دیده می‌شود که با اعمال دستگاه معادلات (۲۲) بر هر خط برش چهار معادله به‌دست می‌آید و اگر سازه‌ای را با n خط برش به صفحات مستطیلی شکل تقسیم کرده باشیم با اعمال معادلات سازگاری جمعاً 4n معادله به دست خواهد آمد که کلیه این معادلات بستگی به مقدار m دارند و به عبارت دیگر جمعاً m دستگاه معادله با 4n مجهول وجود دارد که از طریق آن‌ها مقادیر مختلف ضرایب سری‌های فوریه مربوط به بارها و لنگرهای خمشی مؤثر بر هریک از لبه‌های آزاد صفحات مستطیلی به دست می‌آید.

۵ـ تنظیم دستگاه معادلات اصلی

در بند (۴) دیدیم که وقتی سازه‌ای را به چندین صفحهٔ مستطیلی شکل با دو تکیه‌گاه ساده و تحت اثر بارها و لنگر خمشی در طول دو لبهٔ برش خورده تجزیه می‌کنیم، به منظور تأمین یکپارچگی سازه باید دستگاه معادلات (۲۲) را در مورد هریک از برش‌های بوجود آمده اعمال نمائیم و اگر تعداد این برش‌ها n باشد به این ترتیب m دستگاه مستقل با 4n مجهول بوجود خواهد آمد و نهایتاً به حل این دستگاه معادلات خطی کلیه ضرایب مذکور در معادلات (الف)، (ب) و (ج) (شکل‌های ۳ و ۴ و ۵) محاسبه خواهد شد.

برای این که روش کاربرد دستگاه معادلات (۲۲) روشن شود. این دستگاه معادلات را در برش ایجاد شده بین دو صفحه (الف) و (ب) از شکل (۷) بکار می‌بریم.



$$T_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} t_\ell \cos\frac{m\pi x}{\ell}$$

$$N_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} s_\ell \sin\frac{m\pi x}{\ell}$$

- - - - - - - -

- - - - - - - - -

$$Q'_r = \sum_{m=1}^{\infty} g'_r \sin\frac{m\pi x}{\ell}$$

$$M'_r = \sum_{m=1}^{\infty} m'_r \sin\frac{m\pi x}{\ell}$$

شکل (۷)

از طریق استفاده از معادلات (۱۸) ، (۱۹) ، (۲۰) و (۲۱) تغییر مکان‌های حاصل از اعمال بارهای فوق در طول دو لبهٔ راست و چپ صفحات شکل (۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید .

(۲۳)

$$U_r=\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\theta+\bar\theta)t_r+(\theta-\bar\theta_r)t_l+(\eta+\bar\eta-2\nu)s_r+(\eta-\bar\eta)s_l\right]\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$V_r=-\frac{1}{2tE}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\eta+\bar\eta-2\nu)t_r+(\eta-\bar\eta)t_l+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\bar\eta}{\partial y}\right)s_r+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\bar\eta}{\partial y}\right)s_l\right]\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$W_r=-\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left\{(\Delta_1+\bar\Delta_1)m_r+(\Delta_1-\bar\Delta_1)m_l-2\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\Delta_2+\bar\Delta_2)g_r+(\Delta_2-\bar\Delta_2)g_l\right]-2\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Delta_3K\right\}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$\phi_r=-\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left\{2\left[(\Delta_4+\bar\Delta_4)m_r+(\Delta_4-\bar\Delta_4)m_l\right]-\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\Delta_5+\bar\Delta_5)g_r+(\Delta_5-\bar\Delta_5)g_l\right]-4\nu\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Delta_6K\right\}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$U'_l=\frac{1}{2t'E}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[-(\theta'-\bar\theta')t'_r-(\theta'+\bar\theta')t'_l+(\eta'-\bar\eta')s'_r+(\eta'+\bar\eta'-2\nu)s'_l\right]\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$V'_l=-\frac{1}{2t'E}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\eta'-\bar\eta')t'_r+(\eta'+\bar\eta'-2\nu)t'_l-\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\bar\eta}{\partial y}\right)'s'_r-\left(\frac{\partial\eta'}{\partial y}+\frac{\partial\bar\eta}{\partial y}\right)'s'_l\right]\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$W'_l=-\frac{1}{2t'E}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left\{(\Delta'_1-\bar\Delta'_1)m'_r+(\Delta'_1+\bar\Delta'_1)m'_l+2\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\Delta'_2-\bar\Delta'_2)g'_r+(\Delta'_2+\bar\Delta'_2)g'_l\right]-2\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Delta'_3K'\right\}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$\phi'_l=-\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left\{-2\left[(\Delta'_4-\bar\Delta'_4)m'_r+(\Delta'_4+\bar\Delta'_4)m'_l\right]-\left(\frac{l}{m\pi}\right)\left[(\Delta'_5-\bar\Delta'_5)g'_r+(\Delta'_5+\bar\Delta'_5)g'_l\right]+4\nu\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\Delta'_6K'\right\}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

از تساوی دو به دوی تغییر مکان‌های فوق دستگاه معادلات لازم جهت سازگاری تغییر مکان‌ها در برش مورد نظر به وجود خواهد آمد .

۶ ــ نتیجه‌گیری

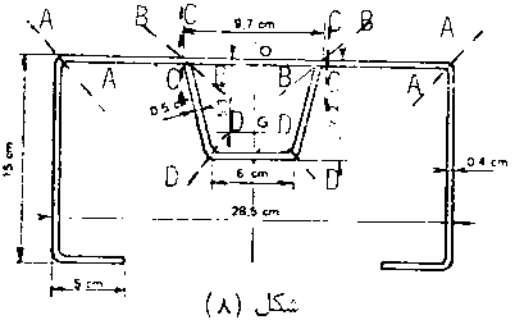
همان گونه که شرح داده شد این روش کاربردی خاص از تئوری صفحات است و نقش اصلی آن این است که به کمک آن می‌توان از تئوری صفحات جهت تحلیل تنش و تغییر مکان سازه‌های غیر منحنی و قابل تجزیه به صفحات مستطیلی شکل استفاده نمود . دقت نتایج حاصل از این روش همان دقت نتایج حاصل از تئوری صفحات خواهد بود ولذا روشی تقریبی به حساب نمی‌آید .

جهت تحلیل دقیق تنش در نیم رخ‌های فولادی و مخصوصاً نیم رخ‌های جدار نازک و مشابه آن به راحتی می‌توان از روش این مقاله استفاده کرد .

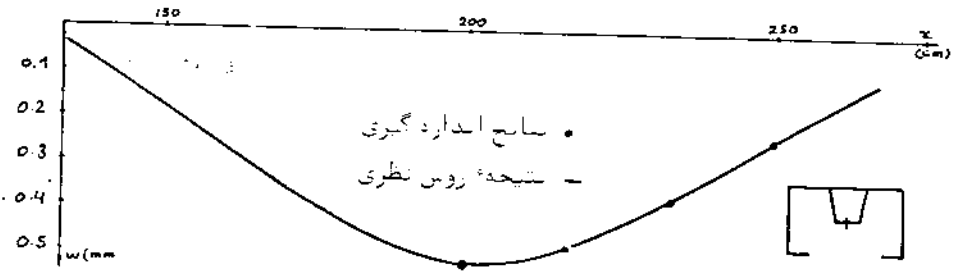
درتحلیل تنش اغلب ناوه‌های رایج در پل‌های فلزی یا بتنی در صورتی که ناوهٔ مزبور دارای انحنای عمودی یا افقی نباشد و آن را بتوان مجموعه‌ای از صفحات مستطیلی شکل دانست ، می‌توان از این روش جهت تحلیل تنش آن سازه‌ها سود برد .

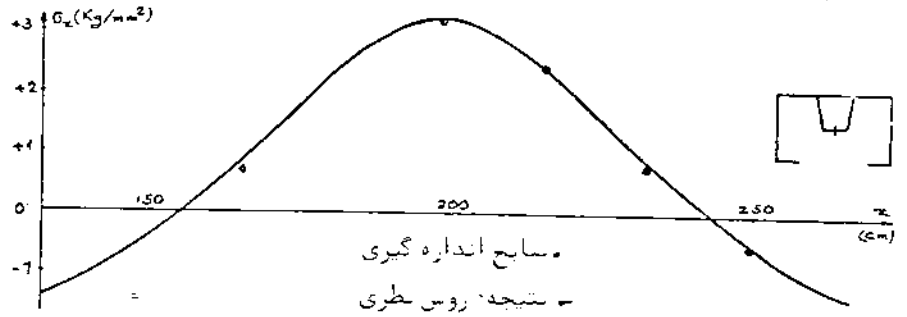
در این مقاله از محاسبه تنش یا تغییرمکان در نقاط بحرانی صفحه بحثی به عمل نیامد بدیهی است که چون این روش بر تئوری صفحات استوار است پس از تعیین ضرایب سری‌های فوریه مربوط به بارهای مختلف می‌توان از طریق روش‌های رایج در تئوری صفحات به محاسبه تنش و تغییرمکان در هر یک از صفحات مستطیلی مورد نظر پرداخت.

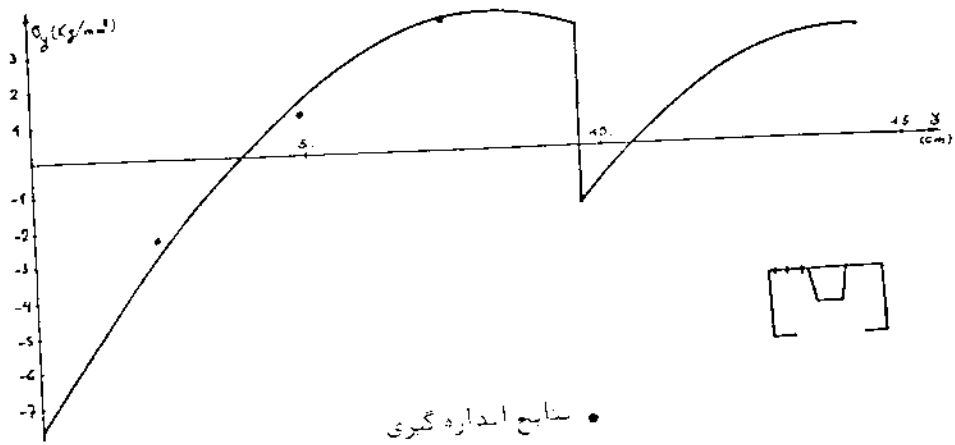
نگارنده با استفاده از روش مقاله و ایجاد برش در نقاط A ، B ، C و D در نمودار شکل (۸) به تحلیل تنش و تغییرمکان پرداخته و نتایج نظری را با نتایج آزمایشات لازم مقایسه نموده است. نحوهٔ تطابق نتایج که در مرجع ۳ است در این جا نیز آورده شده است.



شکل (۸)







• نتایج اندازه گیری

— نتیجه روش نظری

ضمیمه (۱)

مشخصات توابع

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2l}$$

$$\theta(m,y) = \frac{(4ch\alpha_m - 2\alpha_m sh\alpha_m)\, ch\frac{m\pi y}{l} + 2\frac{m\pi y}{l}\, sh\frac{m\pi y}{l}\, ch\alpha_m}{sh2\alpha_m + 2\alpha_m}$$

$$\bar{\theta}(m,y) = \frac{(4sh\alpha_m - 2\alpha_m ch\alpha_m)\, sh\frac{m\pi y}{l} + 2\frac{m\pi y}{l}\, ch\frac{m\pi y}{l}\, sh\alpha_m}{sh2\alpha_m - 2\alpha_m}$$

$$\varphi(m,y) = \frac{2\alpha_m sh\alpha_m\, ch\frac{m\pi y}{l} - 2\frac{m\pi y}{l}\, sh\frac{m\pi y}{l}\, ch\alpha_m}{sh2\alpha_m + 2\alpha_m}$$

$$\bar{\varphi}(m,y) = \frac{2\alpha_m ch\alpha_m\, sh\frac{m\pi y}{l} - 2\frac{m\pi y}{l}\, ch\frac{m\pi y}{l}\, sh\alpha_m}{sh2\alpha_m - 2\alpha_m}$$

$$\eta(m,y) = \frac{(2sh\alpha_m - 2\alpha_m ch\alpha_m)\, ch\frac{m\pi y}{l} + 2\frac{m\pi y}{l}\, sh\frac{m\pi y}{l}\, sh\alpha_m}{sh2\alpha_m + 2\alpha_m}$$

$$\bar{\eta}(m,y) = \frac{(2ch\alpha_m - 2\alpha_m sh\alpha_m)\, sh\frac{m\pi y}{l} + 2\frac{m\pi y}{l}\, ch\frac{m\pi y}{l}\, ch\alpha_m}{sh2\alpha_m - 2\alpha_m}$$

$$\psi(m,y) = \frac{(2sh\alpha_m + 2\alpha_m ch\alpha_m)\, ch\frac{m\pi y}{l} - 2\frac{m\pi y}{l}\, sh\frac{m\pi y}{l}\, sh\alpha_m}{sh2\alpha_m + 2\alpha_m}$$

$$\bar{\psi}(m,y)=\frac{(2ch\alpha_m+2\alpha_m sh\alpha_m)sh\frac{mny}{l}-2\frac{mny}{l}ch\frac{mny}{l}ch\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\theta(m)=\frac{4ch^2\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}$$

$$\bar{\theta}(m)=\frac{4sh^2\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\eta(m)=\frac{sh2\alpha_m-2\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}$$

$$\bar{\eta}(m)=\frac{sh2\alpha_m+2\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}(m)=\frac{4sh^2\alpha_m}{sh2\alpha_m+2\alpha_m}$$

$$\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}(m)=\frac{4ch^2\alpha_m}{sh2\alpha_m-2\alpha_m}$$

$$\Delta_1=\Delta_5=\frac{\frac{1+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)}{\left[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)\right](1-\nu)}$$

$$\bar{\Delta}_1=\bar{\Delta}_5=\frac{\frac{1+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)}{\left[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)\right](1-\nu)}$$

$$\Delta_2=\frac{ch^2\alpha_m}{\left[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)\right](1-\nu)}$$

$$\bar{\Delta}_2=\frac{sh^2\alpha_m}{\left[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)\right](1-\nu)}$$

$$\Delta_3=\frac{\frac{3-\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)}{\left[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)\right](1-\nu)}$$

$$\Delta_4=\Delta_6=\frac{sh^2\alpha_m}{\left[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m-\alpha_m(1-\nu)\right](1-\nu)}$$

$$\bar{\Delta}_4=\frac{ch^2\alpha_m}{\left[\frac{3+\nu}{2}sh2\alpha_m+\alpha_m(1-\nu)\right](1-\nu)}$$

ضمیمه (۲)

تعاریف علائم به کار رفته در مقاله

$\Pi(x,y)$: تابع تنش ایری

ν : ضریب پواسن

σ_x : تنش قائم در امتداد محور x

σ_y : تنش قائم در امتداد محور y

τ_{xy} : تنش برشی در صفحهٔ xy

ϕ_r : دوران مقطع حول محور y در لبهٔ راست صفحه

ϕ_ℓ : دوران مقطع حول محور x در لبهٔ چپ صفحه

$A, \bar{A}$: مقادیر ثابت تابع ایری

$B, \bar{B}$: مقادیر ثابت تابع ایری

ضمیمه (۳) مراجع استفاده شده در تنظیم مقاله

1 - A.C.Ugural " Stresses in plates and shells " McGraw - Hill - 1981 .

2 - S.Timoshenko, S.Woinowsky - Kriger " Theory of plates and shells " McGraw Hill - 1959 .

3 - Feridun Irani " Etude des platelages metalliques de type Arnodin ", 1977 (تز دکترا)

4 - Richard G.Budynas " Advanced strength and applied stress analysis " McGraw-Hill- 1977.