

پیشنهاد یک جزء محدود برای اندرکنش پل - خودرو*

فریدون ایرانی^(۱) رضا اسماعیلی فر^(۲)

چکیده در این مقاله برای بررسی اثر جرم متحرک با استفاده از المان شبکه، یک جزء اندرکنشی معرفی شده است. در این بررسی اثرات اتصال لغزشی بین چرخ و عرشه پل در روابط بدست آمده منظور گردیده است. افزون بر این مسأله، حرکت جرم بر یک تیر خمشی [بیگز (۱۹۶۴) و یانگ و یائو (۱۹۷۷)] با روش نیومارک β و روش پیشنهاد شده در مقاله حل شده و پاسخ‌ها با هم و مقایسه گردیده است.

واژه‌های کلیدی دینامیک سازه، جرم متحرک، حرکت خودرو، اجزای محدود.

A Proposed Finite Element Model for Bridge-Vehicle Interaction

R. Esmailifar

F. Irani

Abstract In this paper, finite element method is used for interaction analysis to investigate the effects of a moving mass on a surface. In analysis procedure the sliding contact effects of vehicle-wheel on a bridge have been taken into account by a proposed element. At the end, the motion of a mass on a bending beam (Biggs 1964, yang and yao 1997) has been verified, and its dynamic responses have been calculated and compared with New mark-beta method.

Key Word Structural dynamics, Moving mass, Moving vehicle, Finite element.

* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۸۱۳۲۰ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۲۹۱۵ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه عمران

(۲) دانشجوی کارشناسی رشد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه عمران

مقدمه

چرخ کامیون وجود دارد.

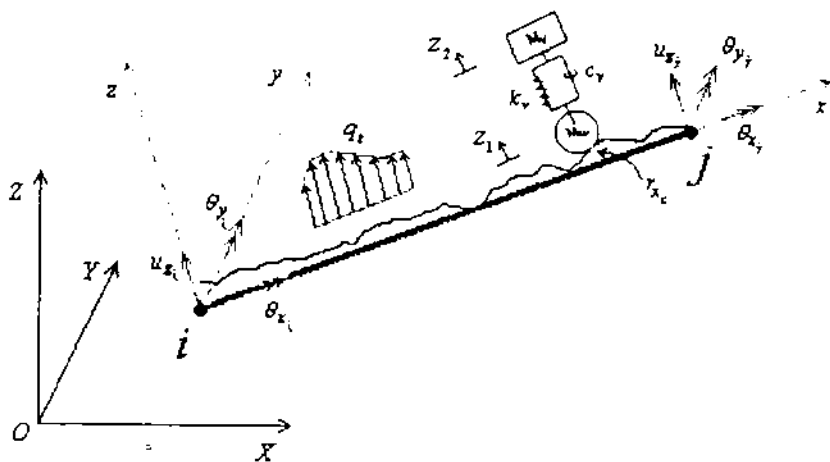
روابط حرکت برای جزء اندرکنشی خودرو-پل

جزء تیری را که زیر چرخ خودرو قرار گرفته چنان در نظر می‌گیریم که الگوی ساده سه درجه آزادی خودرو روی یک سطح ناهموار تصادفی با تابع $I(X)$ برقرار باشد. (شکل ۱).

هنگامیکه خودرو فرضی با سرعت v روی جزء بدشده حرکت می‌کند. چرخ خودرو در تماس با سطح آن قرار دارد و مسیری مرکب از تغییر شکل جزء بعلاوه جانبجایی حاصل از تابع $I(X)$ را می‌بیناید. مادام که زاکنش بین چرخ و سطح پل فشاری باشد. چرخ روی پل قرار دارد. در غیر اینصورت چرخ از سطح پل جدا گشته و آن دو شرایطی جداگانه با شرایط اولیه کسب کرده و در لحظه جدا شدن از هم، ارتعاش آزاد خواهند نمود.

معادلات حرکت برای اجزای خودرو و جزء تیری که زیر چرخ آن قرار دارد به صورت زیر می‌باشد.

نگوهای تلفیقی ساده تیر و جرم متحرک به وسیله افرادی چون بیگز (۱۹۶۴) [1]، اینباتان و ویلند (۱۹۸۷) [2]، اسماعیل زاده و قراشی (۱۹۹۱) [3]، اسماعیل زاده و قراشی (۱۹۹۲) [4]، هوانگ، یانگ و شاهاری (۱۹۹۳) [5] و (۱۹۹۵) [6]، لورا و راسی (۱۹۹۶) [7]، یانگ و لین (۱۹۹۵) [8]، یانگ و لیاو (۱۹۹۵) [9]، یانگ و (۱۹۹۷) [10] ارائه شده است. در اینجا نیز الگوی اندرکنشی شامل المان تیری با شش درجه آزادی (المان شبکه) و الگوی ساده خودرو با سه درجه آزادی معرفی می‌گردد. در الگوی ارائه شده، اثر اتصال لغزشی بین چرخ خودرو و المان تیر در نظر گرفته شده است. منظور از اتصال لغزشی پیوندی است بین دو جزء رویهم (عمدتاً به کمک عامل وزن) که اگر شرایطی پیش آید عنصرها می‌توانند به طور مجزا و مستقل از هم ارتعاش نمایند (نظیر حالتی که ارتعاش تیر از ارتعاش چرخ کامیون در زمان حرکت به سمت پایین پیشی بگیرد که در این صورت امکان خالی شدن ناگهانی زیر



شکل ۱- الگوی جزء اندرکنشی

$$\ddot{z}_1 = \left\{ N\ddot{u} + 2 \frac{\partial x}{\partial t} N'\dot{u} + \left[\frac{\partial x^2}{\partial t^2} N' + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 N'' \right] u + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} r' + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 r'' \right\}_{x_c} \quad (7)$$

در صورتی که حرکت افقی خودرو با رابطه $x = \frac{1}{2}at^2 + vt$ که در آن v سرعت اولیه و ثابت a شتاب خطی خودرو است بیان گردد. روابط بالا به شکل ساده زیر خواهند شد.

$$z_1 = N_c u_b + r_c \quad (8)$$

$$\dot{z}_1 = (at + v)(N'_c u_b + r'_c) + N_c \dot{u}_b \quad (9)$$

$$\ddot{z}_1 = N_c \ddot{u}_b + 2(at + v)N'_c \dot{u}_b + [aN'_c + (at + v)^2 N''_c] u_b + ar'_c + (at + v)^2 r''_c \quad (10)$$

در ادامه با قرار دادن مقادیر اخیر در روابط حرکت (۱) و (۳) و توجه به اینکه اتصال بین چرخ و سطح پل لغزشی است و پارامترهای خودرو مستقیم و به صورت قائم به جزء تیری وارد می‌گردند، می‌توان نوشت،

$$M_v \ddot{z}_2 + c_v \dot{z}_2 + k_v z_2 - [c_v v N'_c + k_v N_c] u_b - [c_v N_c] \dot{u}_b = p(t) + c_v v r'_c + k_v r_c - M_v g \quad (11)$$

که در آن N'_c و r'_c به ترتیب مشتق‌های توابع شکل و سطح ناهمواری در نقطه x_c می‌باشند. پس از ساده کردن معادله حرکت جزء اندرکنشی (جزء زیر چرخ خودرو)، نتیجه نهایی به شکل فشرده در دستگاه زیر خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} [M_{eq}] & 0 \\ 0 & M_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_b\} \\ \{\ddot{z}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{eq}] & [C_1] \\ [C_2] & c_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_b\} \\ \{z_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{eq}] & [K_1] \\ [K_2] & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_b\} \\ \{z_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_{eq}\} \\ \{P_v\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

پارامترهای معادله فوق مقادیر زیر را دارند

$$[M_{eq}] = [m_b] + [N_c]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} [N_c] \quad (13)$$

معادله حرکت برای جرم M_v (جرم خودرو)

$$p(t) - M_v g = M_v \ddot{z}_2 + c_v \dot{z}_2 + k_v z_2 - c_v \dot{z}_1 - k_v z_1 \quad (1)$$

معادله حرکت برای جرم m_w (جرم چرخ و محور)

$$f_n + q(t) - m_w g = m_w \ddot{z}_1 + c_v \dot{z}_1 + k_v z_1 - c_v \dot{z}_2 - k_v z_2 \quad (2)$$

معادله حرکت برای جزء تیری

$$m_b \ddot{u}_b + c_b \dot{u}_b + k_b u_b = N_c^T f(t) - N_c^T f_n \quad (3)$$

در روابط فوق g شتاب ثقل، z_1 و z_2 به ترتیب

جابجایی قائم جرم‌های M_v ، m_w و $p(t)$ و $q(t)$ به ترتیب نیروهای وارد بر خودرو و چرخ است که ماهیت اینرسی ندارند. m_b ماتریس جرم، c_b ماتریس میرایی، k_b ماتریس سختی جزء و u_b و \dot{u}_b و \ddot{u}_b به ترتیب بردار جابجاییها، سرعت و شتاب در درجات آزادی جزء تیری و همچنین N_c ماتریس توابع شکل (متناظر با جابجاییهای قائم) در نقطه X_c محل قرارگیری چرخ روی جزء، $f(t)$ بردار نیروهای خارجی وابسته به زمان (بسته به این که $f(t)$ دارای یک یا دو آزاییه باشد N_c^T می‌تواند ماتریس 1×2 و یا 2×1 اختیار شود) و f_n نیروی حاصل از تماس چرخ خودرو می‌باشند.

شرط تماس بین چرخ و سطح پل بصورت زیر است.

$$f_n > 0 \quad (4)$$

حالت چنانچه $N_c = N(x_c)$ ، $r_c = r(x_c)$ ، $u_c = u(x_c)$ و x_c موقعیت چرخ خودرو نسبت به انتهای چپ جزء تیر باشد، داریم:

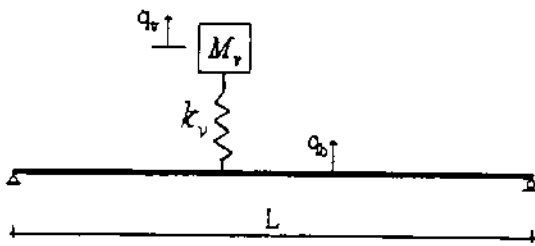
$$z_1 = u_c + r_c = N_c u_b + r_c \quad (5)$$

$$\dot{z}_1 = \left[(N' u_b + r') \frac{\partial x}{\partial t} + N \dot{u}_b \right]_{x_c} \quad (6)$$

همچنین بیگز [1, 10] (۱۹۶۴) معادلات حرکت این مسأله را به صوت زیر مشخص نمود. در این معادله ها ω_v بسامد زاویه‌ای (مود اول) دستگاه، ω_v بسامد زاویه‌ای خودرو، m جرم واحد طول پل، L طول پل و q_b و q_v جا بجایی‌های قائم خودرو و پل می‌باشند.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_v^2 \frac{M_v}{mL} \sin^2 \frac{\pi vt}{L} & -2\omega_v^2 \frac{M_v}{mL} \sin \frac{\pi vt}{L} \\ -\omega_v^2 \frac{M_v}{mL} \sin \frac{\pi vt}{L} & \omega_v^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_b \\ q_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \frac{m_v g}{L_0} \sin \frac{\pi vt}{L} \end{Bmatrix} \quad (۲۲)$$



شکل ۲ تیر خمشی با جرم متحرک فنردار

در این مقاله تیر ساده شکل (۲) با مشخصات داده شده، پس از تعیین روابط حرکت آن بر اساس الگوی ارایه شده به دو روش، روش نیومارک - β و روش ارایه شده در این مقاله مورد تحلیل قرار می‌گیرد. چنانکه شکل‌های (۳ و ۴) نشان می‌دهند نتایج بدست آمده از روش یانگ و یاز با نتایج حاصل از حل معادلات حرکت بدست آمده از الگوی معرفی شده با روش نیومارک - β ، کاملاً انطباق دارند.

مقایسه نتایج حل معادلات حرکت باروش انتگرال‌گیری مستقیم، پیشنهاد شده در مقاله، با نتایج داده شده به وسیله یانگ و یاز، اختلافی در حدود ۴

$$[C_{eq}] = [c_b] + [N_c]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2vm_w \end{bmatrix} [N'_c] + [N_c]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_v \end{bmatrix} [N_c] \quad (۱۴)$$

$$[C_1] = -[N_c]^T \begin{bmatrix} 0 \\ c_v \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

$$[C_2] = [C_1]^T \quad (۱۶)$$

$$[K_{eq}] = [k_b] + [N_c]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & am_w + vc_v \end{bmatrix} [N'_c] + [N_c]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v^2 m_v \end{bmatrix} [N'_c] + [N_c]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} [N_c] \quad (۱۷)$$

$$[K_1] = -[N_c]^T \begin{bmatrix} 0 \\ k_v \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

$$[K_2] = -([0 \ c_v v][N'_c] + [0 \ k_v][N_c]) \quad (۱۹)$$

$$\{P_{eq}\} = \{f_b(t)\} - [N_c]^T \{m_w v^2 r'_c + (am_w + vc_v)r'_c + k_v r_c + m_w g - q(t)\} \quad (۲۰)$$

$$p_v = p(t) + c_v v r'_c + k_v r_c - M_v g \quad (۲۱)$$

که در آن از نشانه‌های (') و (") برای مشتقات مکانی اول و دوم توابع مربوطه استفاده شده است. (ماتریس تابع شکل N در پیوست آورده شده است).

تیر ساده تحت حرکت جرم فنردار

یانگ و یاز [10] تیر ساده شکل (۲) را با مشخصات باروش نیومارک - β مورد تحلیل قرار دادند. در این شکل جرم فنردار M_v طول تیر را با سرعت v می‌پیماید.

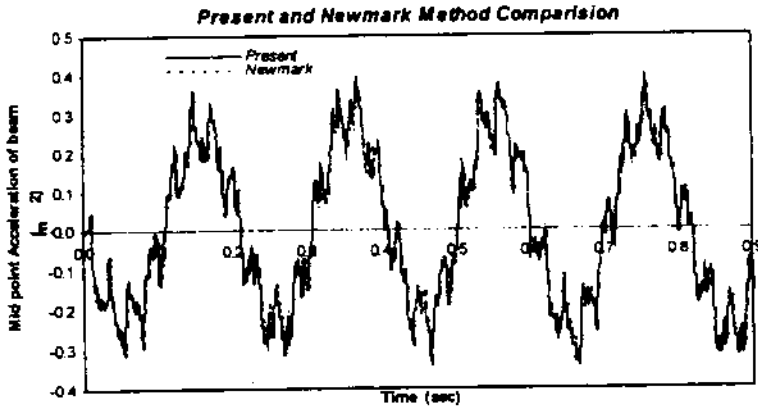
$$M_v = 5750 \text{ kg } I = 2.90 \text{ m}^4$$

$$K_v = 1595 \text{ kN/m}$$

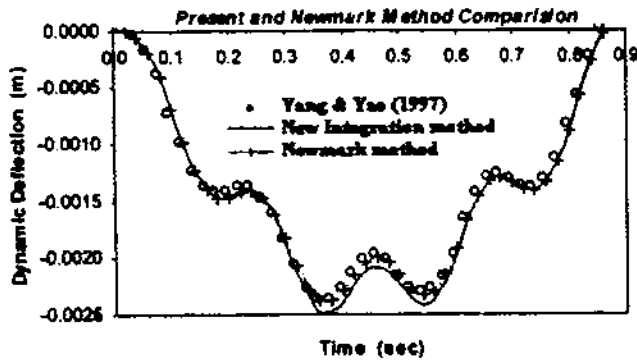
$$m_w = 0 \text{ kg } E = 2.87 \text{ GPa } v = 100 \text{ km/h}$$

$$m_b = 2303 \text{ kg/m } v = 0.2 \text{ m/s}$$

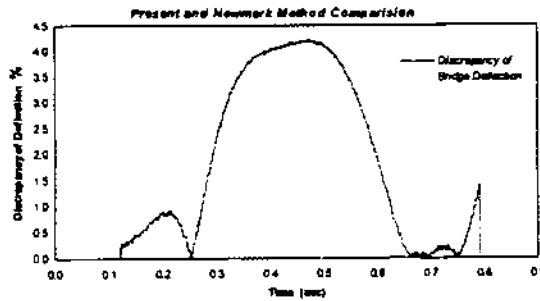
$$C_b = C_v = 0 \text{ kg/s}$$



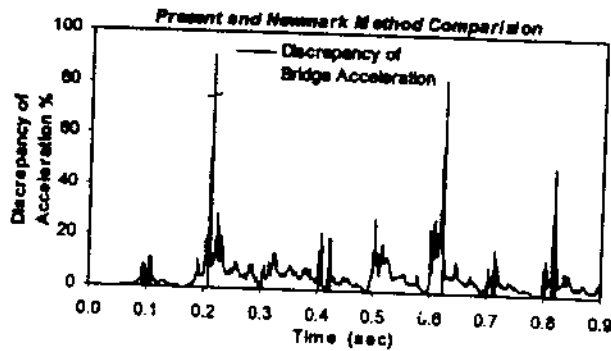
شکل ۳ مقایسه شتاب نوسان قائم نقطه میانی تیر



شکل ۴ مقایسه جابجایی قائم نقطه میانی تیر



شکل ۵ درصد اختلاف روش پیشنهادی [11] و روش نیومارک - β برای جابجایی قائم نقطه میانی تیر



شکل ۶ درصد اختلاف روش پیشنهادی [11] و روش نیومارک- β برای شتاب قائم نقطه میانی تیر

درصد برای جابجایی قائم (شکل ۵) و ۲۰ درصد برای شتاب قائم (شکل ۶) نقطه میانی تیر را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که به دلیل کوچک بودن مقادیر شتاب (یا جابجایی) در همسایگی تشکیل گره‌ها (گره موج) اختلاف، مقادیر بزرگی را نشان می‌دهد که در برآورد خطا مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

نتیجه گیری

در یک اتصال لغزشی، جرم خودرو به جملات جرم دورانی حول محور طولی تیر افزوده نمی‌گردد چرا که در حالات متعارف اثر جرم دورانی (پیچشی) در ماتریس سازگاری عنصر تیر ناچیز است. اما هرگاه مصالح عناصر پل به قدر کافی سبک انتخاب گردد، جرم خودرو در برابر جرم پل (عناصر پل که با چرخ‌های کامیون در تماس اند) قابل توجه می‌شود. در این صورت مقادیر جرم دورانی حاصل از اعمال جرم خودرو در برابر مقادیر جرمی پل (شامل ماتریس دورانی و انتقال جرم) قابل توجه نخواهند بود. البته این مطلب در بعد عملی کاملاً بحث‌انگیز است چرا که مصالح پل به طور معمول دارای وزن بالایی است. این موضوع، در بعد نظری که حالت حادی یا فرض افزایش جرم خودرو به سمت بی‌نهایت و تقلیل جرم پل به سمت صفر مورد دقت قرار می‌گیرد می‌تواند مفید باشد.

در مثال ارائه شده که طی آن روش مقاله با روش نیومارک- β مقایسه گردیده است می‌توان چنین اظهار نظر نمود: از آنجا که در روش مقاله جملاتی نظیر $\Delta m(\Delta t)$ ، $\Delta k(\Delta t)$ ، $\Delta c(\Delta t)$ و $\Delta f(\Delta t)$ که به ترتیب تغییرات جرم، سختی، میرایی و نیرو در زمان Δt است، در روند تشکیل معادلات و روابط ارائه شده داخل می‌شوند ولی در روش نیومارک- β به دلیل کوچک بودن حذف می‌گردند، عدم تطابق دیده می‌شود. عدم تطابق یادشده به صورت شکل (۴) خود را نشان می‌دهد. در حقیقت در روش ارائه شده [11] اثر جزئی کلیه پارامترها دو نظر گرفته می‌شود ولی روش نیومارک- β جرم و سختی متغیر تیر را به گونه‌ای مغایر با مقادیر واقعی آنها در روابط حرکت لحاظ می‌نماید و از این رو هر چه نسبت جرم خودرو به جرم پل بیشتر باشد اختلاف نتایج یاد شده بیشتر مشهود خواهد بود.

پوست

ماتریس تابع شکل در حالت کلی به صورت زیر است

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix}$$

اگر $\xi = \frac{x}{L}$ باشد، خواهیم داشت :

- M_v جرم جزء خودرو
- $N_c = N(x_c)$ ماتریس تابع شکل در نقطه x_c
- $N'_c = N'(x_c)$ ماتریس مشتق‌های اول توابع شکل در نقطه x_c
- $N''_c = N''(x_c)$ ماتریس مشتق‌های دوم توابع شکل در نقطه x_c
- $p(t)$ نیروی تابع زمان وارد بر جرم خودرو
- P_{eq} بردار نیروی معادل برای جزء اندرکنش
- $q(t)$ نیروی تابع زمان وارد بر چرخ و محور
- q_b جابجایی قائم خودرو
- q_l جابجایی قائم پل
- $r_c = r(x_c)$ مقدار ناهمواری در نقطه x_c
- $r'_c = r'(x_c)$ مقدار مشتق اول مکانی ناهمواری در نقطه x_c
- $r''_c = r''(x_c)$ مقدار مشتق دوم مکانی ناهمواری در نقطه x_c
- $\dot{r}_c = \dot{r}(x_c)$ مشتق زمانی ناهمواری در نقطه x_c
- $\ddot{r}_c = \ddot{r}(x_c)$ مشتق دوم زمانی ناهمواری در نقطه x_c
- u_b جابجایی قائم الگوی ساده پل
- \dot{u}_b سرعت نوسان الگوی ساده پل
- \ddot{u}_b شتاب نوسان الگوی ساده پل
- v سرعت خودرو
- z_1 جابجایی قائم جرم m_w
- \dot{z}_1 سرعت نوسان جرم m_w
- \ddot{z}_1 شتاب نوسان جرم m_w
- z_2 جابجایی قائم جرم M_v
- \dot{z}_2 سرعت نوسان جرم M_v
- \ddot{z}_2 شتاب نوسان جرم M_v
- ω بسامد زاویه‌ای پل
- ω_v بسامد زاویه‌ای خودرو

$$N_1 = 1 - \xi$$

$$N_2 = -(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)L$$

$$N_3 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1$$

$$N_4 = \xi$$

$$N_5 = -(\xi^3 - \xi^2)L$$

$$N_6 = -2\xi^3 + 3\xi^2$$

در معادله (۱۲) N_c مقدار تابع شکل به ازای $x = x_c$ است. از آنجا که در حالت متعارف، حرکت کامیون در جزء تیر نیروی محوری ایجاد نمی‌کند (اگر اثر ترمز، شتاب ناگهانی و یا تصادفات در محاسبات وارد نگردد)، فقط از سطر دوم ماتریس تابع شکل استفاده شده است. در این صورت خواهیم داشت:

$$N = [0 \quad N_2 \quad N_3 \quad 0 \quad N_5 \quad N_6]$$

در معادله (۱۲) N_c ، ماتریس تابع شکل در حالت کلی آورده شده است.

نشانه‌ها

- a شتاب خودرو
- c_b میرایی جزء پل
- c_v میرایی خودرو
- C_{eq} ماتریس میرایی معادل برای جزء اندرکنش و واکنش زیر چرخ الگوی ساده خودرو در درجه آزادی
- f_n نیروی تابع زمان وارد بر جزء تیر
- $f(t)$ شتاب ثقل
- g سختی جزء پل
- k_b سختی فنر خودرو
- k_v ماتریس سختی معادل برای جزء اندرکنش
- K_{eq} جرم چرخ و محور
- m_w جرم جزء پل
- m_b جرم جزء پل

مراجع

1. Biggs, J. M., "Introduction to structural dynamics", Mc Graw-Hill, Inc., New York, N. Y. (1964).
2. Inbanathan Mahil. J., and Wieland Martin., "Bridge Vibration Due to Vehicle Moving Over Rough Surface", *Journal of Structural Engineering*, vol. 113, No. 9, pp. 1944 -2008, (1987).
3. Esmailzadeh E., and Ghorashi M., "Beams carrying Moving Loads and Masses", Technical Report, Mech. Eng. Dept., Sharif University of Technology, Tehran, Iran, pp. 112-121, (1991).
4. Esmailzadeh E., and Ghorashi M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by Moving Masses", *International Conference on Engineering Application Mechanics, Sharif University of Technology, Tehran, Iran*, pp. 232-238, (1992).
5. Huang Dongzhou, Wang Ton-Lo and Shahawy Mohsen., "Impact Studies of Multigirder Concrete Bridges", *Journal of Structural Engineering*, vol. 119, No. 8, pp. 2387-2402, (1993).
6. Huang Dongzhou, Wang Ton-Lo and Shahawy Mohsen "Vibration of Thin-Walled Box-Girder Bridges Excited by Vehicles" *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, No. 9, pp.1330-1337, (1995).
7. Laura, P. A. A. and Rossi R. E., "Dynamic Response Analysis of Slab-Type Bridges" *Journal of Structural Engineering*, vol. 122, No. 4, (1996).
8. Yang Yeong-Bin., and Lin Bing-Hong., "Vehicle-Bridge Interaction Analysis by Dynamic Condensation Method" *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, No. 11, pp.1636-1643, (1995).
9. Yang Yeong-Bin, Liao Shu-Shyan and Lin Bing-Houng ., "Impact Formulas for Vehicles Moving Over Simple and Continuous Beams" *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, No. 11, pp.1644-1650, (1995).
10. Yang Yeong-Bin and Yau Jong-Dar, "Vehicle-Bridge Interaction Element for Dynamic Analysis", *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, No. 11, pp.1512-1518, (1997).
11. اسماعیلی فر، رضا " اثر دینامیکی خودرو بر پل با الگوی جرم متحرک " پایان نامه کارشناسی ارشد سازه، گروه عمران دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۷۹).