وزن کمینه صفحه‌های خمشی با تغییر مرزها
و
مشتقات صریح جزء مرتبه بالا

محمد رضایی پژند
دانشیار

محمدرضا سالاری
مربی

گروه عمران دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی
«مشهد»

چکیده

یك جزء مثلثی با ۳۵ درجه آزادی برای یافتن وزن کمینه صفحه‌های خمشی به کار می‌رود. این جزء مرتبه بالا دارای دوازده گره در پهلوها و چهار گره داخلی است. دقت بسیار خوب نتایج و نداشتن اثر قفل شدن برشی در صفحات نازك خمشی از ویژگی‌های جزء مورد بحث می‌باشند. مشتقات صریح درایه‌های ماتریس سختی این جزء حساب می‌شوند و از آنها در بهینه سازی شکل صفحه‌های خمشی استفاده می‌گردد. برنامه‌ای برای به کار بردن مشتقات مزبور نوشته شده و با حل نمونه‌های عددی توانایی جزء مرتبه بالا برای تغییر مرزها و یافتن شکل بهینه به نظر خوانندگان می‌رسد. شایان توجه است که شمار زیاد درجات آزادی و نیز تنوع آنها نیاز به برنامه نویسی دشواری دارد. با وجود این، نتایج دقیق به دست آمده گواه آن می‌باشد که جزء مثلثی با ۳۵ درجه آزادی شایستگی انجام تحلیل پیچیده را دارد.

Minimum Weight of Bending Plates by Boundary Changing

M. Rezaiee-Pajand

M. R. Salari

Department of Civil Engineering
Ferdowsi University, Mashhad

Abstract

A triangular element with 35 D.O.F. is utilized to minimize the weight of bending plates. This higher-order element has 12 side-nodes and 4 inner-nodes. High accuracy and no shear locking effect in analyzing thin bending plates are the speciality of this element. The explicit derivatives of the stiffness matrix entries are calculated and used to optimize the shape of bending plates. A computer program is written in order to show the application of the aforementioned derivatives. Numerical examples illustrate the abillity of this higher-order element in finding optimal shape by boundary changing. It is necessary to mention that the larger number of D.O.F. and their variations create a difficult programming task.. However, the results obtained by utilizing this element are accurate and worthy of complex analysis.

۱ـ مقدمه

روز بروز بر اهمیت بهینه سازی سازه ها افزوده می گردد. دلیل اصلی آن کمبود و گران شدن مصالح از یک سو و افزایش توان تحلیلی مهندسین از سوی دیگر است. از دیر باز همه طراحان در پی یافتن سازه هایی با وزن کمتر بوده اند، به گونه ای که همه شرایط دلخواه آنها فراهم گردد. پس از در دسترس قرار گرفتن رایانه و روشهای عددی بهینه سازی مؤثر، تحلیلگران در طراحی سازه های سبک موفقتر از گذشته می باشند.

به طور کلی، بهینه سازی سازه ها به دو صورت انجام می شود. یکی با ثابت نگه داشتن شکل هندسی، تنها به تغییر اندازه می پردازد. به عنوان نمونه، با تغییر سطوح مقطع خرپاها و یا لنگر لختی قابها و ثابت گرفتن مختصات همه گره های سازه طرح بهینه آنها به دست می آید. در این راستا، ضخامت صفحه های غشایی، برشی و یا خمشی به صورت متغیر در طراحی اندازه این گونه سازه ها به کار می رود. افزون بر این، با تغییر شکل هندسی سازه می توان طرح بهینه آن را یافت. در سازه های پیوسته و با تغییر مرزها وزن کمینه سازه به دست می آید. شایان توجه است که بهینه سازی شکل در کاهش مصالح مؤثرتر از بهینه سازی هندسه سازه است.

به صورتهای متفاوتی شکل بهینه سازه پیدا می گردد. در آغاز بهینه سازی شکل از متغیر مختصات گره های مرزی استفاده می شد. این گونه متغیرهای طراحی ممکن است به شکل سازه نامناسبی منجر گردد. اگر تدابیر لازم گرفته نشود، شکل بهینه دارای هندسه نامناسب مانند مرزهای با گوشه های تند و تغییرات شدید خواهد بود. نوع دیگر انتخاب متغیر طراحی، ارائه نمودن مرزها با چند جمله ای های دارای ضرایب متغیر می باشد. حالت کلی روش مزبور به این صورت است که مجموعه خطی از توابع شکل با ضرایب متغیر (متغیر طراحی) برای مرزها تعریف می شود. باید دانست که چند جمله ای های مرتبه بالا سبب ارائه سازه های بهینه با مرزهای پرچین می گردند. اگر از توابع اسپلاین بهره جویند، این مشکل پاسخ ندارد [B3]. این گونه توابع مرزها را صاف می سازند و شکل بهینه مناسبی ارائه می دهند. افزون بر این، توابع اسپلاین در تحلیل حساسیت دقت بهتری از ارائه مرزها با توابع خطی دارد.

جزء طراحی یک روش دیگر یافتن شکل بهینه سازه ها است [I1]. هر جزء طراحی یک شبکه از اجزای محدود را در برمی گیرد. با تغییر مختصات گره های جزء طراحی، شکل سازه تغییر می کند. در واقع، مختصات این گره های جزء طراحی (گره های کلیدی) همان متغیرهای طراحی مسأله بهینه سازی می باشند. روشن است که با تغییرات مورد بحث، شبکه اجزای محدود نیز تغییر می کند. به هر حال، تا هنگامی که محدودیتهای رفتاری مسأله مانند: تنش و تغییر مکان اجازه می دهند، تغییرات شکل سازه به سوی طرح بهینه ادامه می یابد. سرانجام، یک نوع دیگر بهینه سازی شکل سازه با مواد برداری از نقاط مختلف سازه انجام می پذیرد. در این روش هر جا که دارای تنش کمی باشد، مصالح برداشته شده وبه جای آن اشکال خالی از پیش تعیین شده جایگذاری می گردند [R1].

به دلیل گستردگی زمینه های مختلف بهینه سازی سازه ها، نمی شود همه تحولات آنها را در این نوشته درج نمود. برای آگاهی بیشتر، خوانندگان، در صورت نیاز، می توانند به پاره‌ای از مقالات مروری موجود مراجعه فرمایند [H2, D1]. مقاله های تخصصی دیگری نوشته شده که در آنها رفتار سازه خاصی را مورد مطالعه قرار داده اند. از آن میان، بهینه سازی سازه های صفحه ای و پوسته ای می باشد [B4, B1]. پژوهشهای قابل ملاحظه ای در سالهای اخیر برای صفحه های خمشی انجام پذیرفته است [G1, L2, L1]. باید آگاه بود که به دلیل پیچیدگی روابط صفحات خمشی در مقایسه با سازه هایی مانند: خرپاها، صفحه های برشی و غشایی، بهینه سازی صفحه های خمشی مشکلتر می باشد [P1]. افزون بر این، با روشهای ریاضی ثابت گردیده که فرضیات بنیادی صفحه های خمشی پاره ای از شرایط لازم بهینه سازی را نداشته و به همین دلیل، یک بهینه کلی برای آن وجود ندارد. در واقع، به جای یک بهینه کلی، شمار زیادی از پاسخهای بهینه ـ که تا حدودی با هم تفاوت دارند ـ برای یک صفحه خمشی به دست آمده است [A1].

در ادامه این مقاله، نخست، چندین روش تحلیل حساسیت تشریح می گردد. دانستنی است که روش تحلیلی حساسیت به صورت دقیق انجام می گردد، در صورتی که روش نیمه تحلیلی با استفاده از تفاوت محدود، تحلیل حساسیت خطاداری به دست می دهد. افزون بر این، زمان محاسبه مشتق تحلیلی کوتاهتر از روشهای عددی است [B5]. در ضمن، در روش نیمه تحلیلی باید مقادیر نمو متغیرهای طراحی نه بزرگ ونه

کوچک انتخاب شده و به گونه ای تنظیم گردند تا دقت لازم به دست آید. بر این اساس، روش تحلیلی شایستگی بهتری داشته وبه دلیل مزبور در این مقاله از آن استفاده می گردد. یادآوری می کند کـه مشکلات ارائه نمـودن مشتقات صریح و نوشتن برنامه رایانه ای برای روش تحلیلی حساسیت وجود دارند. با این شرایط از جزء مثلثی خمشی مرتبه بالایی ـ که تابع تغییر مکانهای جانبی آن درجه چهار کامل بوده و تابع دورانهای گرهی جزء درجه سه کامل است ـ بهره گرفته می شود. مشتقات درایه های ماتریس سختی جزء مورد بحث به صورت صریح حساب می گردند. با این مشقات صریح، بهینه سازی به سرعت انجام شده و برای تحلیل به حافظه رایانه ای کمی نیاز می باشد. در پایان مقاله، نمونه های عددی ـ که نشانگر دقت و کارآیی جزء مثلثی با ۳۵ درجه آزادی است ـ به نظر خوانندگان می رسد.

۲ـ تحلیل حساسیت

روشهای بهینه سازی نیاز به مشتقاتی دارند که به وسیله تحلیل حساسیت مهیا می گردند. به دو صورت تغییر اندازه (هندسه) و یا تغییر شکل، حجم سازه کاهش می یابد. در بهینه سازی اندازه، شبکه بندی و در نتیجه مرزهای سازه ثابت می ماند، در صورتی که در بهینه سازی شکل، مرزهای سازه تغییر می کند. باید دانست که این تغییرات سبب مؤثر بودن بهینه سازی شکل شده و به همین دلیل، روز بروز بر اهمیت این نوع بهینه سازی افزوده می شود. بهینه سازی شکل به خاطر تغییر شبکه مشکلتر و گرانتر از بهینه سازی اندازه انجام می گردد [H3].

تحلیل حساسیت رفتاری، فرآیندی است که نسبت تغییرات مقادیر پاسخ ـ مانند تغییر مکان و یا تنش ـ به تغییرات متغیر طراحی ـ مانند ضخامت یا مختصات گرهی ـ هنگامی که سایر متغیرها ثابت اند را به دست می دهد. دو روش اصلی برای انجام تحلیل حساسیت وجود دارد. یکی تحلیل حساسیت مستقیم و دیگری تحلیل حساسیت تغییراتی نام دارد. تحلیل حساسیت مستقیم با استفاده از مشتق گیری صریح از معادلات گسسته حاکم اجزاء محدود برحسب متغیرهای طراحی انجام می گیرد. بر خلاف آن، تحلیل حساسیت تغییراتی از معادلات مکانیک پیوسته استفاده نموده و از تابع وابسته پیش از گسسته نمودن مشتق صریح می گیرند [S1]، شایان توجه است که با ترکیب هر یک از دو روش اصلی با روش تفاوتهای محدود، تحلیل حساسیت به صورت های گوناگون انجام می گیرد که در ادامه به پاره ای از آنها پرداخته می شود [H4].

نخستین روش تحلیل حساسیت از مشتق گیری صریح استفاده نموده و روش گسسته مستقیم (Direct Discrete) نام دارد. از معادله حاکم جزء استفاده شده و مشتق صریح درایه های ماتریس سختی برحسب متغیر طراحی حساب می گردد. سپس، با سوار نمودن مشتقات اجزاء بر روی هم به مشتق ماتریس سختی سازه می رسند. بنابراین، از برنامه های آماده اجزای محدود نمی توان بهره جست و باید برای تحلیل حساسیت هر جزء برنامه مورد نیاز نوشته شود. در ادامه، معادلات تحلیل حساسیت درج می گردد. در این معادلات ماتریس سختی به $[S]$، تغییر مکان ها به $\{D\}$، بارهای وارده به $\{P\}$، بارهای دروغی به $\{P\}_s$ و متغیر طراحی به x نشان داده می شود.

$$[S]\{D\}=\{P\} \qquad (۱)$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]\{D\}+[S]\left\{\frac{\partial D}{\partial x}\right\}=\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\right\}$$

$$[S]\left\{\frac{\partial D}{\partial x}\right\}=\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\right\}-\left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]\{D\}$$

$$\{P\}_s=\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\right\}-\left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]\{D\} \qquad (۲)$$

$$\{S\}\left\{\frac{\partial D}{\partial x}\right\}=\{P\}_s \qquad (۳)$$

رابطه (۲) بار دروغی را به دست می دهد. باید دانست که در بیشتر بهینه سازی ها بارهای وارد به سازه را مستقل از ابعاد سازه می پندارند. با این حساب، مشتق بار وارد بر سازه نسبت به متغیر طراحی صفر شده و بار دروغی برابر با منهای حاصلضرب مشتق ماتریس سختی در تغییر مکان گرهی است. پس از محاسبه بار دروغی و به کار بردن معادلات (۳) مشتق تغییر مکان به دست می آید. شایان توجه است که برای تحلیل حساسیت تغییر مکان دوباره ماتریس سختی سازه تجزیه نمی شود و از همان ماتریسهای مثلث پایینی $[L]$ و قطری $[d]$ که در حل معادلات حاکم (۱) به کار رفته استفاده می گردد. روابط مورد بحث به قرار زیر می باشند:

$$[S]=[L][d][L]^T \tag{۴}$$

$$[L][d][L]^T\left\{\frac{\partial D}{\partial x}\right\}=\{P\}_s \tag{۵}$$

روش نیمه تحلیلی (Semi-Analytical) دومین فن تحلیل حساسیت است که می توان به جای روش گسسته مستقیم از آن بهره جست. از تفاوتهای محدود در این روش استفاده می گردد. به همین سبب روش گران و خطاداری است و در برنامه های آماده وجود ندارد[H1]. اگر e و n، به ترتیب، نشانه جزء و شمار آنها بوده و Δx نمو متغیر طراحی باشد، روابط زیر مشتق ماتریس سختی را بر پایه تفاوت پیشرو درجه اول می دهد:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]\approx\left[\frac{\Delta S}{\Delta x}\right]=\frac{[S(x+\Delta x)-S(x)]}{\Delta x}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{S_e(x+\Delta x)-S_e(x)}{\Delta x}\right]_i \tag{۶}$$

سومین روش محاسبه حساسیت تغییر مکان از روش تفاوتهای محدود استفاده می نماید. در روش مزبور تغییر مکان دوبار و به ازای x و $x+\Delta x$ محاسبه می گردد. چون ماتریس سختی دومرتبه سوار شده و معادله حاکم دو بار حل می شود، این روش گران است. در ضمن، روش مورد بحث دارای خطا نیز می باشد. معادلات روش سوم در ادامه درج می گردند:

$$[S(x+\Delta x)]\{D(x+\Delta x)\}=\{P\} \tag{۷}$$

$$\left\{\frac{\partial D}{\partial x}\right\}\approx\left\{\frac{\Delta D}{\Delta x}\right\}=\left\{\frac{D(x+\Delta x)-D(x)}{\Delta x}\right\} \tag{۸}$$

چهارمین فن انجام تحلیل حساسیت، روش تغییرات مستقیم (Direct Variation) نام دارد. در روش مزبور، بار دروغی با استفاده از حساب تغییرات به دست می آید و سپس تحلیل حساسیت انجام می گیرد. هنگامی که بار جسم در مرزها تغییر نکند، این روش به کار می رود. باید دانست که روش تغییرات مستقیم بدون وارد شدن به برنامه های آماده مورد استفاده قرار می گیرد. اگر تابع تغییر مکان، کرنش، تنش و بار سطحی جسم، به ترتیب، u، ε، σ و T باشد، در آن صورت معادله کار مجازی برای حجم v و سطح s نوشته شده و تغییرات آن محاسبه می گردد تا بار دروغی بر حسب عامل میدان سرعت شکل V به دست آید.

$$\int_v \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dv=\int_s T_i\,\delta u_i\,ds \tag{۹}$$

$$\int_v \sigma'_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dv=\int_s (u_{i,k}V_{k,j}\,\delta\sigma_{ij}+\sigma_{ij}V_{k,j}\,\delta u_{i,k}-\sigma_{ij}V_{k,k}\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij})\,dv=\{P\}_s \tag{۱۰}$$

دامنه تغییرات وابسته (Adjoint Variational Domain) پنجمین، روش تحلیل حساسیت می باشد. با این روش، مشتق یک تابع تغییراتی ـ که بار وابسته یا فرضی را مشخص می سازد ـ حساب می گردد. اگر پاسخ مسأله وابسته با رونویس a نوشته شود، در آن صورت بار متمرکز وابسته ـ در نقطه ای که مشتق تغییر مکان آن حساب می گردد ـ به قرار زیر می باشد:

$$\psi'=\int_u (\sigma^a_{ij}u_{i,k}V_{k,j}+\sigma_{ij}u^a_{i,k}V_{k,j}-\sigma_{ij}\varepsilon^a_{ij}V_{k,k})\,dv \tag{۱۱}$$

ششمین روش تحلیل حساسیت تغییر مکان، سطح تغییرات وابسته (Adjoint Variational Surface) نامیده می شود. در این روش، به جای حساب نمودن بار وابسته از تابع اولیه حجم، آن را با استفاده از قضیه گوس به تابع اولیه سطحی تبدیل نموده و سپس محاسبه انجام می پذیرد. اگر مرز به G و قائم بر آن به n نشان داده شود و مقادیر جهش دار در [ ] قرار گیرند، آن گاه بار وابسته در این روش از رابطه زیر حساب می گردد:

$$\psi'=\int_\Gamma (T^a_i[u_{i,n}]-[\sigma_{ij}]\varepsilon^a_{ij})V_n\,d\Gamma \tag{۱۲}$$

افزون بر آنچه ارائه گشت روشهای تحلیل حساسیت دیگری نیز وجود دارند. از میان آنها، روشهای تفاوت محدود مرتبه بالا، روش تحلیلی و یا نیمه تحلیلی وابسته گسسته را می توان نام برد. در ضمن، ترکیب روشهای ارائه شده نیز امکان پذیر بوده و روش پیوندی (Hybrid) یکی از آنها است [T1]. افزون بر اینها، روشهای دیگر تحلیل حساسیت ارائه شده است [Y1]. شایان توجه می باشد که خطای تحلیل حساسیت نقش به سزایی در دستیابی به پاسخ بهینه دارد [Y3, Y2, C1, F1]. به طور کلی، خطاهای تحلیل حساسیت وابسته به نوع جزء و

شبکه بندی، روش تفاوت محدود و تابع اولیه های عددی می باشد. اهمیت پیشنهاد کرده است، مطالعه بیشتری بر روی مسایلی که حل دقیق دارند انجام پذیرد تا شایستگی هر روش نسبت به پاسخ دقیق مشخص گردد [S1].

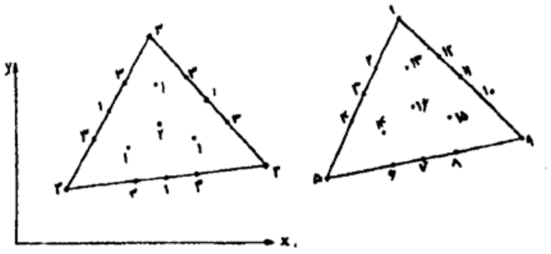
شبکه بندی اجزای محدود در فرآیند بهینه سازی شکل سازه باید تغییر کند. هرگاه شکل اجزا در اثر بهینه سازی شکل به صورت ناموزون (Distortion) درآید، باید شبکه بندی دوباره انجام شود و فرآیند بهینه سازی با آن ادامه یابد. یک روش شبکه بندی به وسیله دست تحلیلگر انجام می گیرد و آنجایی که تنش بالا رفته باشد، ریزسازی شبکه اجرا می گردد. روش دوم، استفاده خودکار از فن شبکه بندی است. از ریز سازی شبکه خود انطباق برای این کار استفاده می شود. ریزسازی یا با افزودن اجزای بیشتر و یا به وسیله بالا بردن درجه جزء امکان پذیر است. در نتیجه فرآیند مزبور، اجزایی که در فرآیند بهینه سازی شکل به صورت ناموزون در آمده اند به صورت مناسب در می آیند. از گرادیان چگالی کارمایه تغییر شکل برای شناخت ناحیه هایی که نیاز به ریزسازی شبکه دارند استفاده می گردد [B2, H3].

۳ـ جزء مرتبه بالا

در سال ۱۹۹۱، سنگوپتا یک جزء خمشی مثلثی مرتبه بالا ارائه کرد [S2]. در این بخش، نخست به ویژگی های خمشی جزء اشاره می شود و سپس، تحلیل حساسیت آن انجام شده و از آن در بهینه سازی صفحه های خمشی استفاده می گردد. از نگره «رایسنر – میندلین» ـ که در آن قائم بر میان صفحه پیش و پس از تغییر شکل مستقیم می ماند ـ بهره گرفته می شود. جزء مثلثی مرتبه بالای مورد بحث دارای سی و پنج درجه آزادی بوده که پنج درجه داخلی آن قابل حذف می باشد. جزء مزبور دارای دوازده گره در پهلوها و چهار گره داخلی است. شایان توجه می باشد که جزء مثلثی سنگوپتا دارای دقت محاسباتی خوبی بوده و اثر قفل شدن برشی برای صفحات نازک در آن وجود ندارد. افزون بر آن، چون روابط صریح ماتریس سختی جزء در دست است تحلیل سازه به سرعت انجام شده و به حافظه رایانه ای کمی نیاز دارد. یادآوری می نماید که در محاسبه ماتریس سختی جزء از وارونه سازی ماتریسی استفاده نشده و به توابع اولیه گیری عددی نیاز نمی باشد. به جای آنها، چندین ضرب ماتریسی با مرتبه پایین برای این کار مورد نیاز است.

اثر تغییر شکل برشی در این جزء مرتبه بالا وارد می شود. لنگر محاسبه شده در هر گره تفاوت زیادی با آن که از اجزای دور آن گره به دست می آید ندارد. به همین دلیل، لنگرها به طور مستقیم در گره ها حساب می گردند و هیچگونه میانگین گیری و برونیابی نیاز نمی باشد. توابع شکل جزء با استفاده از مختصات طبیعی به دست می آیند.

دو نوع تابع مختلف برای تغییر مکانهای انتقالی و دورانی به کار رفته اند. در واقع، تابع درجه چهار کامل برای تغییر مکانهای جانبی (w) و تابع درجه سه کامل برای دورانها (θ_x و θ_y) اختیار می گردند. برای گره های وسط پهلوها، یک تغییر مکان خیز جانبی و برای سایر گره های واقع بر پهلوهای جزء یک تغییر مکان خیز جانبی و دو دوران به کار می روند. همچنین، برای گره مرکزی تنها دو دوران و برای سایر گره های درونی جزء تنها یک تغییر مکان خیز جانبی انتخاب می شود. اینک شکل جزء و توابع اختیار شده برای تغییر مکان جانبی w و دورانهای θ_x و θ_y ارائه می گردند. شمار درجات آزادی گرهی و نیز شماره گره های جزء در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱)

$$w=\alpha_1L_1^4+\alpha_2L_2^4+\alpha_3L_3^4+\alpha_4L_1^3L_2+\alpha_5L_2^3L_1+\alpha_6L_2^3L_3$$
$$+\alpha_7L_3^3L_2+\alpha_8L_3^3L_1+\alpha_9L_1^3L_3+\alpha_{10}L_1^2L_2^2+\alpha_{11}L_2^2L_3^2$$
$$+\alpha_{12}L_1^2L_3^2+\alpha_{13}L_1^2L_2L_3+\alpha_{14}L_2^2L_1L_3+\alpha_{15}L_3^2L_1L_2$$

$$\theta_x=\beta_1L_1^3+\beta_2L_2^3+\beta_3L_3^3+\beta_4L_1^2L_2+\beta_5L_2^2L_1+\beta_6L_2^2L_3+\beta_7L_3^2L_2$$
$$+\beta_8L_3^2L_1+\beta_9L_1^2L_3+\beta_{10}L_1L_2L_3$$

$$\theta_y=\gamma_1L_1^3+\gamma_2L_2^3+\gamma_3L_3^3+\gamma_4L_1^2L_2+\gamma_5L_2^2L_1+\gamma_6L_2^2L_3+\gamma_7L_3^2L_2$$
$$+\gamma_8L_3^2L_1+\gamma_9L_1^2L_3+\gamma_{10}L_1L_2L_3$$

(۱۲)

با جایگزین نمودن مختصات طبیعی جزء در روابط (۱۳) ضرایب α_i ، β_i و γ_i محاسبه شده و توابع شکل جزء مطابق روابط زیر به دست می‌آیند. البته، باید توجه داشت که توابع شکل دورانهای θ_x و θ_y همانند می‌باشند.

$$N_{w1}=L_1^4-\frac{7}{2}L_1^3L_2-L_2^3L_1-L_3^3L_1-\frac{7}{2}L_1^3L_3+\frac{7}{2}L_1^2L_2^2$$
$$+\frac{7}{2}L_1^2L_3^2+\frac{23}{4}L_1^2L_2L_3-\frac{7}{4}L_2^2L_1L_3-\frac{7}{4}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w2}=27L_1^3L_2+\frac{27}{2}L_2^3L_1-\frac{81}{2}L_1^2L_2^2-\frac{243}{8}L_1^2L_2L_3+\frac{81}{8}L_2^2L_1L_3+\frac{81}{8}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w3}=-32L_1^3L_2-32L_2^3L_1+80L_1^2L_2^2+2L_1^2L_2L_3+2L_2^2L_1L_3-6L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w4}=\frac{27}{2}L_1^3L_2+27L_2^3L_1-\frac{81}{2}L_1^2L_2^2+\frac{81}{8}L_1^2L_2L_3-\frac{243}{8}L_2^2L_1L_3+\frac{81}{8}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w5}=L_2^4-L_1^3L_2-\frac{7}{2}L_2^3L_1-\frac{7}{2}L_2^3L_3-L_3^3L_2+\frac{7}{2}L_1^2L_2^2$$
$$+\frac{7}{2}L_2^2L_3^2-\frac{7}{4}L_1^2L_2L_3+\frac{23}{4}L_2^2L_1L_3-\frac{7}{4}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w6}=27L_2^3L_3+\frac{27}{2}L_3^3L_2-\frac{81}{2}L_2^2L_3^2+\frac{81}{8}L_1^2L_2L_3-\frac{243}{8}L_2^2L_1L_3+\frac{81}{8}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w7}=-32L_2^3L_3-32L_3^3L_2+80L_2^2L_3^2-6L_1^2L_2L_3+2L_2^2L_1L_3+2L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w8}=\frac{27}{2}L_2^3L_3+27L_3^3L_2-\frac{81}{2}L_2^2L_3^2+\frac{81}{8}L_1^2L_2L_3-\frac{81}{8}L_2^2L_1L_3-\frac{243}{8}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w9}=L_3^4-L_2^3L_3-\frac{7}{2}L_3^3L_2-\frac{7}{2}L_3^3L_1-L_1^3L_3+\frac{7}{2}L_2^2L_3^2$$
$$+\frac{7}{2}L_1^2L_3^3-\frac{7}{4}L_1^2L_2L_3-\frac{7}{4}L_2^2L_1L_3+\frac{23}{4}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w10}=27L_3^3L_1+\frac{27}{2}L_1^3L_3-\frac{81}{2}L_1^2L_3^2+\frac{81}{3}L_1^2L_2L_3+\frac{81}{8}L_2^2L_1L_3-\frac{243}{8}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w11}=-32L_3^3L_1-32L_1^3L_3+80L_1^2L_3^2+2L_1^2L_2L_3-6L_2^2L_1L_3+2L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w12}=\frac{27}{2}L_3^3L_1+27L_1^3L_3-\frac{81}{2}L_1^2L_3^2-\frac{243}{8}L_1^2L_2L_3+\frac{81}{8}L_2^2L_1L_3+\frac{81}{8}L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w13}=96L_1^2L_2L_3-32L_2^2L_1L_3-32L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w14}=-32L_1^2L_2L_3+96L_2^2L_1L_3-32L_3^2L_1L_2$$

$$N_{w15}=-32L_1^2L_2L_3-32L_2^2L_1L_3+96L_3^2L_1L_2$$

$$N_{\theta1}=L_1^3-\frac{5}{2}L_1^2L_2+L_2^2L_1+L_3^2L_1-\frac{5}{2}L_1^2L_3+2L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta2}=9L_1^2L_2-\frac{9}{2}L_2^2L_1-\frac{9}{2}L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta4}=-\frac{9}{2}L_1^2L_2+9L_2^2L_1-\frac{9}{2}L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta5}=L_2^3+L_1^2L_2-\frac{5}{2}L_2^2L_1-\frac{5}{2}L_2^2L_3+L_3^2L_2+2L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta6}=9L_2^2L_3-\frac{9}{2}L_3^2L_2-\frac{9}{2}L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta8}=-\frac{9}{2}L_2^2L_3+9L_3^2L_2-\frac{9}{2}L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta9}=L_3^3+L_2^2L_3-\frac{5}{2}L_3^2L_2-\frac{5}{2}L_3^2L_1+L_1^2L_3+2L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta10}=9L_3^2L_1-\frac{9}{2}L_1^2L_3-\frac{9}{2}L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta12}=-\frac{9}{2}L_3^2L_1+9L_1^2L_3-\frac{9}{2}L_1L_2L_3$$

$$N_{\theta16}=27L_1L_2L_3 \qquad (۱۴)$$

با در اختیار داشتن توابع شکل جزء محدود، تغییر مکانهای هر نقطه آن از روابط زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_w & \circ & \circ \\ \circ & N_\theta & \circ \\ \circ & \circ & N_\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}=[N]\{D\}_e \qquad (۱۵)$$

$$\{w_i\}=\{w_1, w_2, w_3, ..., w_{15}\}^T$$

$$\{\theta_{xj}\}=\{\theta_{x1}, \theta_{x2}, \theta_{x4}, \theta_{x5}, \theta_{x6}, \theta_{x8}, \theta_{x9}, \theta_{x10}, \theta_{x12}, \theta_{x16}\}^T$$

$$\{\theta_{yj}\}=\{\theta_{y1}, \theta_{y2}, \theta_{y4}, \theta_{y5}, \theta_{y6}, \theta_{y8}, \theta_{y9}, \theta_{y10}, \theta_{y12}, \theta_{y16}\}^T$$
(۱۶)

اینک به ارائه روابط لازم برای محاسبه ماتریس سختی جزء پرداخته می شود. با در نظر گرفتن اثر تغییر شکلهای برشی، رابطه کرنش ـ تغییر مکان و رابطه تنش ـ کرنش جزء مورد نظر را می توان به شکل زیر نوشت.

یادآور می‌شود که به طور معمول در تحلیل صفحه‌های خمشی تنش را با لنگر و برش و همچنین، کرنش را با انحنا ({k}) و تغییر شکل برشی ({b}) جایگزین می‌کنند.

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix} M \\ V \end{Bmatrix}=\{\; M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad V_x \quad V_y \;\}^T$$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \kappa \\ \beta \end{Bmatrix}=\{\; \kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy} \quad \beta_x \quad \beta_y \;\}^T$$

$$\{\sigma\}=[D_m]\,\{\varepsilon\}$$

$$[D_m]=\begin{bmatrix} D_b & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix}$$

$$[D_b]=\frac{Et^3}{12\,(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D_s]=\frac{Et}{2.4\,(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -\frac{\partial\theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial\theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_\theta}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_\theta}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_\theta}{\partial y} & -\frac{\partial N_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_w}{\partial x} & -N_\theta & 0 \\ \frac{\partial N_w}{\partial y} & 0 & -N_\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}=[B]\,\{D\}$$

(۱۷)

خواص مصالح جزء خمشی در درایه های ماتریس $[D_m]$ جا دارند. عامل کشسانی و نسبت پواسون، به ترتیب با، E و υ نشان داده شده‌اند. سنگوپتا با تجزیه ماتریس [B] به دو ماتریس [F] و [Q]، ماتریس سختی جزء را به صورت زیر ارائه نموده است. با این جداسازی، ماتریس سختی جزء به صورت صریح محاسبه شده و نیاز به محاسبه عددی تابع اولیه برطرف می‌گردد.

$$[B]_{5\times35}=[F]_{5\times38}[Q]_{38\times35}$$

$$[S]_e=\int_A [B]^T[D_m][B]\,dA=[Q]^T\int_A [F]^T[D_m][F]\,dA\,[Q]$$

(۱۸)

ماتریس‌های [F] و [Q] از روابط زیر قابل محاسبه‌اند:

$$[F]=\begin{bmatrix} F1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F2 \end{bmatrix}$$

$$\{F1\}=\{L_1^2 \quad L_2^2 \quad L_3^2 \quad L_1L_2 \quad L_2L_3 \quad L_1L_3\}$$

$$\{F2\}=\{L_1^3 \quad L_2^3 \quad L_3^3 \quad L_1^2L_2 \quad L_2^2L_1 \quad L_3^2L_2 \quad L_3^2L_1 \quad L_1^2L_3 \quad L_1L_2L_3\}$$

$$[Q]=\begin{bmatrix} 0 & -Q_3 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_4 \\ 0 & -Q_4 & -Q_3 \\ Q_1 & -Q_5 & 0 \\ Q_2 & 0 & -Q_5 \end{bmatrix}$$

(۱۹)

در روابط اخیر، ماتریسهای $[Q_1]$ و $[Q_3]$، به ترتیب، دارای ابعاد ۱۵ × ۱۰ و ۱۰ × ۶ بوده و با مشتق گیری از توابع شکل جزء نسبت به x نتیجه می‌گردند. همچنین، ماتریسهای $[Q_2]$ و $[Q_4]$ با تبدیل مقادیر b_i به c_i، به

ترتیب، در ماتریسهای $[Q_1]$ و $[Q_3]$ به دست می‌آیند. ماتریس $[Q_5]$ نیز به طور مستقیم از ضرایب توابع شکل دوران در رابطه (۱۴) حاصل می‌گردد. درایه‌های ماتریسهای مورد بحث در پیوست مقاله درج می‌شوند. در ادامه، با جایگزین نمودن ماتریسهای $[F]$ و $[Q]$ در رابطه (۱۸) و محاسبه تابع اولیه آن ماتریس سختی جزء به قرار زیر نتیجه می‌شود:

$$[S]_{35\times35}=\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_5 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

$$[S_1]=D_{44}[Q_1]^T[R_2][Q_1]+D_{55}[Q_2]^T[R_2][Q_2]$$

$$[S_2]=-D_{44}[Q_1]^T[R_2][Q_5]$$

$$[S_3]=D_{11}[Q_3]^T[R_1][Q_3]+D_{33}[Q_4]^T[R_1][Q_4]+D_{44}[Q_5]^T[R_2][Q_5]$$

$$[S_4]=-D_{55}[Q_2]^T[R_2][Q_5]$$

$$[S_5]=D_{12}[Q_3]^T[R_1][Q_4]+D_{33}[Q_4]^T[R_1][Q_3]$$

$$[S_6]=D_{22}[Q_4]^T[R_1][Q_4]+D_{33}[Q_3]^T[R_1][Q_3]+D_{55}[Q_5]^T[R_2][Q_5]$$

(۲۱)

$$[R_1]=\frac{2A}{360}\begin{bmatrix} 12 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & 12 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ & & 12 & 1 & 3 & 3 \\ & & & 2 & 1 & 1 \\ & \text{متقارن} & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$[R_2]=\frac{2A}{10080}\begin{bmatrix} 180 & 9 & 9 & 30 & 12 & 3 & 3 & 12 & 30 & 6 \\ & 180 & 9 & 12 & 30 & 30 & 12 & 3 & 3 & 6 \\ & & 180 & 3 & 3 & 12 & 30 & 30 & 12 & 6 \\ & & & 12 & 9 & 3 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ & & & & 12 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ & & & & & 12 & 9 & 3 & 2 & 3 \\ & & & & & & 12 & 6 & 3 & 3 \\ & & & & & & & 12 & 9 & 3 \\ & \text{متقارن} & & & & & & & 12 & 3 \\ & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

(۲۲)

در پایان باید اشاره نمود که در روابط اخیر عامل D_{ij} درایه کلی ماتریس $[D_m]$ را نشان می‌دهد. سطح جزء نیز با عامل A مشخص شده است.

٤ـ مشتق ماتریس سختی

جداسازی عوامل تشکیل دهنده ماتریس سختی جزء مثلثی مرتبه بالا و ارائه روابط صریح برای محاسبه درایه‌های این ماتریس، امکان به دست آوردن مشتق ماتریس سختی آن را به خوبی فراهم نموده است. باید دانست که به دلیل ثابت بودن ماتریس [Q5] مشتق آن نسبت به متغیرهای طراحی همواره برابر با صفر خواهد بود. یادآوری می‌نماید، برای بهینه سازی از روش جزء طراحی استفاده می‌گردد. با تغییر مختصات گره کلیدی کلی lk‌ام $(y_k\ ,\ x_k)$ شکل بهینه صفحه خمشی به دست می‌آید. از این رو، متغیر طراحی همان مختصات گره‌های کلیدی می‌باشند. براین اساس، رابطه زیر برای محاسبه مشتق ماتریس سختی جزء مورد نظر نسبت به متغیر طراحی α ارائه می‌گردد:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right]_{35\times35}=\begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial S_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial S_4}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial S_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial S_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial S_5}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial S_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial S_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial S_6}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

$$\left[\frac{\partial S_1}{\partial \alpha}\right]=D_{44}\left(\left[\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}\right]^T[R_2][Q_1]+[Q_1]^T[R_2]\left[\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_1]^T[R_2][Q_1]\right)+$$
$$D_{55}\left(\left[\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha}\right]^T[R_2][Q_2]+[Q_2]^T[R_2]\left[\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_2]^T[R_2][Q_2]\right)$$

$$\left[\frac{\partial S_2}{\partial \alpha}\right]=-D_{44}\left(\left[\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}\right]^T[R_2][Q_5]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_1]^T[R_2][Q_5]\right)$$

$$\left[\frac{\partial S_3}{\partial \alpha}\right]=D_{11}\left(\left[\frac{\partial Q_3}{\partial \alpha}\right]^T[R_1][Q_3]+[Q_3]^T[R_1]\left[\frac{\partial Q_3}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_3]^T[R_1][Q_3]\right)$$
$$+D_{33}\left(\left[\frac{\partial Q_4}{\partial \alpha}\right]^T[R_1][Q_4]+[Q_4]^T[R_1]\left[\frac{\partial Q_4}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_4]^T[R_1][Q_4]\right)$$
$$+D_{44}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_5]^T[R_2][Q_5]\right)$$

$$\left[\frac{\partial S_4}{\partial \alpha}\right]=-D_{55}\left(\left[\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha}\right]^T[R_2][Q_5]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_2]^T[R_2][Q_5]\right)$$

$$\left[\frac{\partial S_5}{\partial \alpha}\right]=D_{12}\left(\left[\frac{\partial Q_3}{\partial \alpha}\right]^T[R_1][Q_4]+[Q_3]^T[R_1]\left[\frac{\partial Q_4}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_3]^T[R_1][Q_4]\right)$$
$$+D_{33}\left(\left[\frac{\partial Q_4}{\partial \alpha}\right]^T[R_1][Q_3]+[Q_4]^T[R_1]\left[\frac{\partial Q_3}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_4]^T[R_1][Q_3]\right)$$

$$\left[\frac{\partial S_6}{\partial \alpha}\right]=D_{22}\left(\left[\frac{\partial Q_4}{\partial \alpha}\right]^T[R_1][Q_4]+[Q_4]^T[R_1]\left[\frac{\partial Q_4}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_4]^T[R_1][Q_4]\right)$$
$$+D_{33}\left(\left[\frac{\partial Q_3}{\partial \alpha}\right]^T[R_1][Q_3]+[Q_3]^T[R_1]\left[\frac{\partial Q_3}{\partial \alpha}\right]+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_3]^T[R_1][Q_3]\right)$$
$$+D_{55}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}[Q_5]^T[R_2][Q_5]\right) \qquad (۲۴)$$

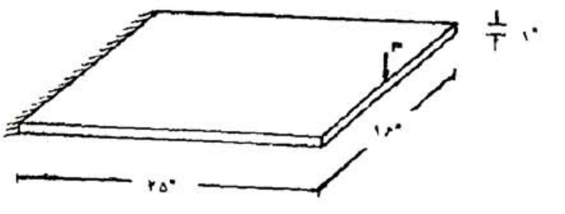
همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در روابط اخیر، مشتقات ماتریسهای [Q1]، [Q2]، [Q3] و [Q4] نسبت به متغیر طراحی α مورد نیاز می‌باشند. باتوجه به این که درایه‌های ماتریسهای مزبور برحسب عوامل b_i و c_i (وابسته به جزء مثلثی) ارائه می‌گردند، مشتقات آنها نیز تنها به مشتقات این عوامل بستگی خواهند داشت. بنابراین، چنانچه از روش جزء طراحی برای نمایش شکل هندسی سازه استفاده شود و مختصات گره‌های کلیدی آن به عنوان متغیر طراحی اختیار گردند، مشتقات مورد نیاز با استفاده از روابط ارائه شده در پیوست مقاله قابل محاسبه خواهند بود.

۵ـ نمونه‌های عددی

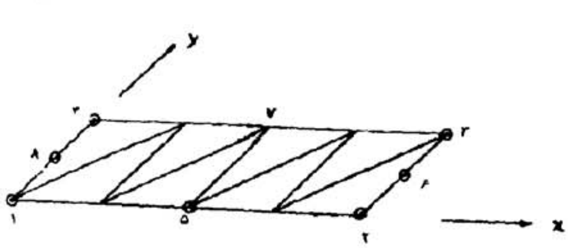
نخستین نمونه عددی ارائه شده طرح بهینه یک صفحه مستطیلی طره‌ای می‌باشد. به این سازه بار متمرکز P = 500 پوند بر سر آزاد آن، همانند شکل (۲)، وارد می گردد. صفحه فولادی بوده و ضریب کشسانی و تنش مجاز آن، به ترتیب، $E=3.10^7$ و $\sigma=3.10^4$ پوند بر اینچ مربع است. نسبت پواسون $\upsilon = 0.3$ می‌باشد. طول صفحه مستطیلی L=25 و ضخامت آن t=1 اینچ است.

به دلیل تقارن سازه، تنها نیمی از آن در نظر گرفته می شود. تحلیل سازه با تقسیم آن به ۸ جزء محدود، همانند شکل (۳)، انجام گرفته و محدودیتهای تنش فون ـ میسز در گوشه های این اجزاء وارد گردیده‌اند. فرآیند بهینه سازی پس از ۲۸ چرخه به طرح بهینه نشان داده شده در شکل (۴) همگرا گردیده و حجم سازه با ۸۸/۱۳ درصد کاهش از مقدار اولیه ۲۰۰ به مقدار نهایی ۲۳/۷۴ اینچ مکعب رسیده است. روند کاهش حجم سازه در شکل (۵) ارائه گردیده است.

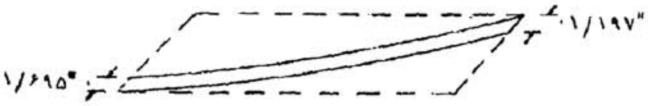
شایان توجه می‌باشد که صفحه مستطیلی طره‌ای به وسیله پژوهشگران دیگر هم بهینه شده است. براساس نتایج ارائه شده در مقاله روزن و گروس پاسخ های بهینه پیشینیان برای این صفحه به ترتیب ۶۱٪ و ۷۹٪ کاهش حجم داشته است [R1]. باید دانست که تفاوت بین پاسخهای به دست آمده بستگی به اجزای به کار رفته، محدودیتهای وارده و شکل بهینه نتیجه شده دارد. نظر به این نکات پاسخ ارائه شده برتری خود را نشان می‌دهد.



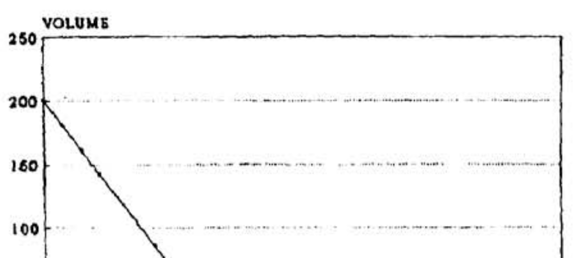
شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)



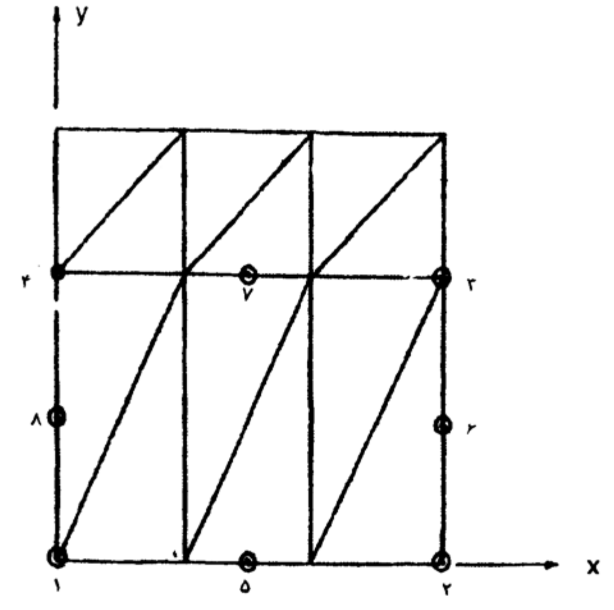
شکل (۵)

دومین نمونه عددی حل شده با جزء مثلثی مرتبه بالا،

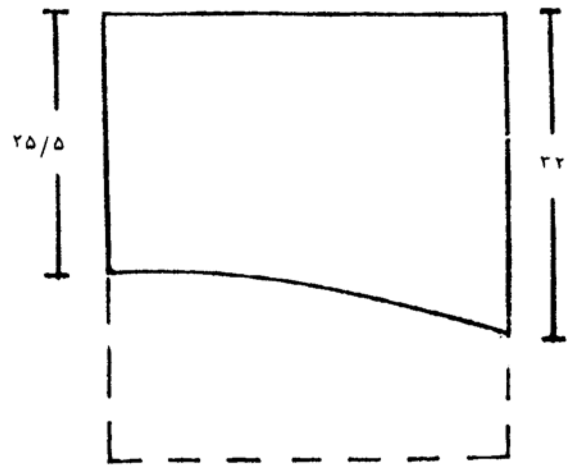
صفحه مربعی شکل (۶) می‌باشد. صفحه در دو پهلوی خود بر روی تکیه گاه گیردار قرار داشته و دو پهلوی دیگر آن آزاد می‌باشند. بار وارد بر صفحه به صورت گسترده یکنواخت با شدت $q = 500$ کیلوگرم بر متر مربع بوده که بر سطح سایه دار شکل (۶) اثر می‌نماید. طول ضلع صفحه $a = 90$ سانتی‌متر بوده و ضریب کشسانی مصالح $E = 2.1(10^6)$ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع در نظر گرفته شده است. همچنین، نسبت پواسون، $\upsilon = 0.3$ و تنش مجاز بیشینه، $\sigma = 1400$ کیلو گرم بر سانتی‌متر مربع می‌باشد.

به دلیل تقارن، تنها یک چهارم صفحه تحلیل می‌گردد. برای این منظور، سازه همانند شکل (۷) به ۱۲ جزء محدود تقسیم شده و مختصه y گره‌های کلیدی ۱، ۲ و ۵ از جزء طراحی به عنوان متغیر طراحی اختیار شده‌اند. همچنین، محدودیت رفتاری مسأله معیار تنش فون ـ میسز بوده که در گوشه‌های اجزای محدود در نظر گرفته شده است.

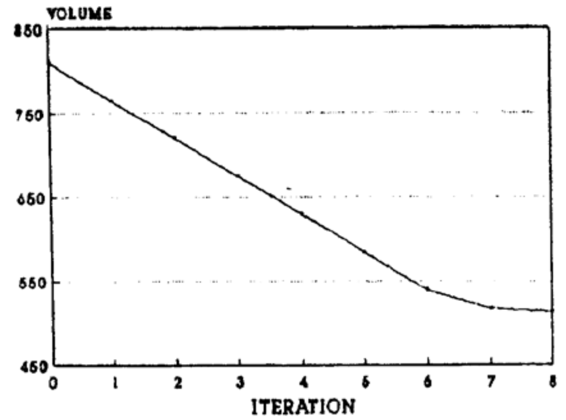
فرآیند بهینه سازی پس از ۸ چرخه به طرح بهینه نشان داده شده در شکل (۸) همگرا شده و حجم سازه از مقدار اولیه ۸۱۰ به مقدار نهایی ۵۱۴ سانتی متر مکعب کاهش یافته است. روند این کاهش در فرآیند بهینه سازی در شکل (۹) ارائه گردیده است.



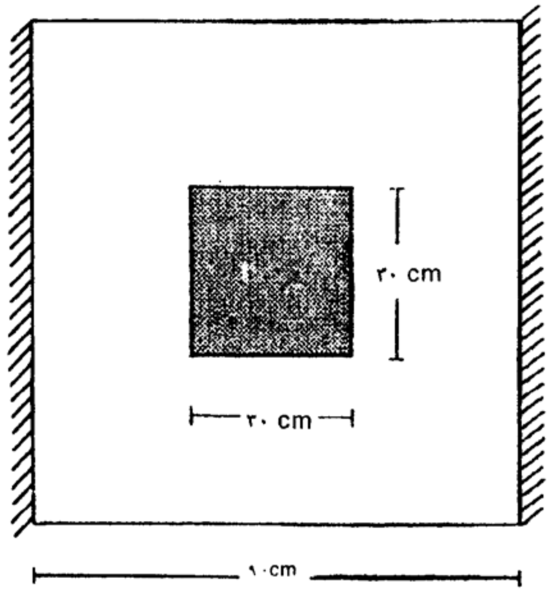
شکل (۷)



شکل (۸)



شکل (۹)



شکل (۶)

۶ـ نتایج

یک جزء مرتبه بالای مثلثی در طرح بهینه شکل صفحه خمشی به کار رفت. جزء مزبور دارای ۳۵ درجه آزادی بوده و بسیار دقیق می‌باشد. مشتقات مورد نیاز تحلیل حساسیت برای این جزء به صورت صریح پیدا شد. از این مشتقات در برنامه رایانه‌ای که برای بهینه‌سازی شکل صفحه خمشی به وسیله نویسندگان نوشته شده استفاده گردید. برنامه مزبور دارای چند هزار خط می‌باشد. نتایج عددی با این جزء دقیق نشانگر آن است که با شبکه‌بندی سازه به تعداد کمی جزء می‌توان شکل صفحه خمشی را بهینه ساخت. دانستنی است که شمار زیاد درجات آزادی و نیز تنوع آنها نیاز به برنامه‌نویسی پیچیده‌ای دارد. به همین دلیل، بهینه‌سازی با جزء مثلثی ۳۵ درجه آزادی در برابر بهینه‌سازی با اجزای ساده‌تر مشکلتر می‌باشد. با وجود این، دقت عالی جزء مرتبه بالای مورد بحث، شایستگی انجام تحلیل پیچیده را دارد. نتایج عددی نشان‌دهنده این توانایی می‌باشد.

مراجع

[A1] J.L. Armand and B. Lodier, "Optimal Design of Bending Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, PP. 373-384 (1978).

[B1] R.A. Brockman and F.Y. Lung, "Sensitivity Analysis with Plate and Shell Finite Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, PP. 1129 _ 1143 (1988).

[B2] M.E. Botkin and J.A. Bennett, "Shape Optimization of Three-Dimensional Folded Plate Structures," AIAA Journal, Vol. 23, No. 11, PP. 1804-1810 (1985).

[B3] V. Braibant and C. Fleury, "Shape Optimal Design Using B-Splines," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 44, No. 3, PP. 247-267 (1984).

[B4] M.E. Botkin, "Shape Optimization of Plate and Shell Structures, "AIAA Journal, Vol. 20, No. 2, PP. 268-273 (1982).

[B5] R. Belevicius and P. Pedersen, "Analysis and Sensitivity Analysis by Computer Algebra for a Third-Order Plate Finite Element," Computers & Structures, Vol. 49, No. 2, pp. 243-252, (1993).

[C1] G. Cheng, Y. Gu and Y. Zhou, "Accuracy of Semi - Analytic Sensitivity Analysis," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 6, PP. 113-128 (1989).

[D1] Y. Ding, "Shape Optimization of Structures: A Literature Survey," Computers & Structures, Vol. 24, No. 6, PP. 985-1004 (1986).

[F1] P.A. Fenyes and R. V. Lust, "Error Analysis of Semi-Analytic Displacement Derivatives for Shape and Sizing Variables," AIAA Journal, Vol. 29, No. 2, PP. 271-279 (February 1991).

[G1] R. V. Grandhi, N.S. Venugopal and V.B. Venkayya, "Generalized Compound Scaling Algorithm and Application to Minimum Weight Design of Plate Structures," AIAA Journal, Vol. 30, No. 10, (October 1992).

[H1] R.T. Haftka and Z. Gurdal, Elements of Structural Optimization, 3rd Ed., Kluwer Academic Publishers, London, (1992).

[H2] R.T. Haftka and B. Prasad, "Optimum Structural Design with Plate Bending Elements - A Survey," AIAA Journal, Vol. 19, No. 4, PP. 517-522 (April 1981).

[H3] R.T. Haftka and R.V. Grandhi, "Structural Shape Optimization - A Survey," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 57, PP. 91-106 (1989).

[H4] R.T. Haftka and B. Barthelemy, "On the Accuracy of Shape Sensitivity Derivatives," In Discretization Methods and Structural Optimization Procedures and Applications, Ed. H.A. Eschenauer and G. Thierauf, Springer Verlag, PP. 136-144 (1989).

[I1] M.H. Imam, "Three - Dimensional Shape Optimization," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, PP. 661-673 (1982).

[L1] R.P. Leal and C.A. Motasoares, "Mixed Elements in Optimal Design of Plates," In Discretization Methods and Structural Optimization - Procedures and Applications, Ed. H.A. Eschenauer and G. Thierauf, Springer Verlag, PP. 221-228 (1989).

[L2] C.C. Lin and T.S. Yang, "Application of Multiplier Update Method to Minimum Weight Design of Elastic Plates", Computers & Structures, Vol. 29, No. 6, PP. 943-948 (1988).

[P1] B. Prasad and R.T. Haftka, "Optimal Structural Design with Plate Finite Elements," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 105, No. ST11, PP. 2367-2382 (November 1979).

[R1] D.W. Rosen and I.R. Grosse, " A Feature Based Shape Optimization Technique for the Configuration and Parametric Design of Flat Plates," Engineering with Computers, Vol. 8, PP. 81-91 (1992).

[S1] L.A. Schmit, "Symposium Summary and Concluding Remarks," In the Optimum Shape Automated Structural Design, Ed. J. A. Bennett, M.E. Botkin, Plenum Press, London, PP. 385-397 (1986).

[S2] D. Sengupta, "Stress Analysis of Flat Plates with Shear Using Explicit Stiffness Matrix," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, PP. 1389-1409 (1991).

[T1] C.H. Tseng and K.Y. Kao, "Performance of a Hybrid Sensitivity Analysis in Structural Design Problems," Computers & Structures, Vol. 33, No. 5, PP. 1125-1131 (1989).

[Y1] B. G. Yoon and A. D. Belegundu, "Iterative Methods for Design Sensitivity Analysis," AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, PP. 1413-1415 (November 1988).

[Y2] R.J. Yang and M.E. Botkin, "Accuracy of the Domain Material Derivative Approach to Shape Design Sensitivities," AIAA Journal, Vol. 25, No. 12, PP. 1606-1610 (December 1987).

[Y3] R. J. Yang and K.K. Choi, "Accuracy of Finite Element Based Shape Design Sensitivity Analysis," Journal of Structural Mechanics, Vol. 13, No. 2, PP. 223-239 (1985).

پیوست

درایه‌های ماتریسهای [Q1]، [Q3] و [Q5] در ادامه درج می‌گردند. همان گونه که پیشتر اشاره شد. ماتریسهای [Q2] و [Q4] با تبدیل مقادیر b_i به c_i، به ترتیب، در ماتریسهای [Q1] و [Q3] به دست می‌آیند. یادآوری می‌کند که عوامل b_i و c_i بر حسب مختصات گرهی جزء ارائه شده و معلوم می‌باشند. مقادیر درایه‌های داده نشده برابر با صفر است.

$Q1(1,1)=(4b_1-3.5b_2-3.5b_3)/2A$
$Q1(2,1)=(-b_1)/2A$
$Q1(3,1)=(-b_1)/2A$
$Q1(4,1)=(-10.5b_1+7b_2+5.75b_3)/2A$
$Q1(5,1)=(-3b_2+7b_1-1.75b_3)/2A$
$Q1(6,1)=(-1.75b_1)/2A$
$Q1(7,1)=(-1.75b_1)/2A$
$Q1(8,1)=(-3b_3+7b_1-1.75b_2)/2A$
$Q1(9,1)=(-10.5b_1+7b_3+5.75b_2)/2A$
$Q1(10,1)=(11.5b_1-3.5b_2-3.5b_3)/2A$
$Q1(1,2)=(27b_2)/2A$
$Q1(2,2)=(13.5b_1)/2A$
$Q1(4,2)=(81b_1-81b_2-30.375b_3)/2A$
$Q1(5,2)=(40.5b_2-81b_1+10.125b_3)/2A$
$Q1(6,2)=(10.125b_1)/2A$
$Q1(7,2)=(10.125b_1)/2A$
$Q1(8,2)=(10.125b_2)/2A$
$Q1(9,2)=(-30.375b_2)/2A$
$Q1(10,2)=(-60.75b_1+20.25b_2+20.25b_3)/2A$
$Q1(1,3)=(-32b_2)/2A$
$Q1(2,3)=(-32b_1)/2A$
$Q1(4,3)=(-96b_1+160b_2+2b_3)/2A$
$Q1(5,3)=(-96b_2+160b_1+2b_3)/2A$
$Q1(6,3)=(2b_1)/2A$
$Q1(7,3)=(-6b_1)/2A$
$Q1(8,3)=(-6b_2)/2A$
$Q1(9,3)=(2b_2)/2A$
$Q1(10,3)=(4b_1+4b_2-12b_3)/2A$
$Q1(1,4)=(13.5b_2)/2A$
$Q1(2,4)=(27b_1)/2A$
$Q1(4,4)=(40.5b_1-81b_2+10.125b_3)/2A$
$Q1(5,4)=(81b_2-81b_1-30.375b_3)/2A$
$Q1(6,4)=(-30.375b_1)/2A$
$Q1(7,4)=(10.125b_1)/2A$
$Q1(8,4)=(10.125b_2)/2A$
$Q1(9,4)=(10.125b_2)/2A$
$Q1(10,4)=(20.25b_1-60.75b_2+20.25b_3)/2A$
$Q1(1,5)=(-b_2)/2A$
$Q1(2,5)=(4b_2-3.5b_1-3.5b_3)/2A$
$Q1(3,5)=(-b_2)/2A$
$Q1(4,5)=(-3b_1+7b_2-1.75b_3)/2A$
$Q1(5,5)=(-10.5b_2+7b_1+5.75b_3)/2A$
$Q1(6,5)=(-10.5b_2+7b_3+5.75b_1)/2A$
$Q1(7,5)=(-3b_3+7b_2-1.75b_1)/2A$
$Q1(8,5)=(-1.75b_2)/2A$
$Q1(9,5)=(-1.75b_2)/2A$
$Q1(10,5)=(-3.5b_1+11.5b_2-3.5b_3)/2A$
$Q1(2,6)=(27b_3)/2A$
$Q1(3,6)=(13.5b_2)/2A$
$Q1(4,6)=(10.125b_3)/2A$
$Q1(5,6)=(-30.375b_3)/2A$
$Q1(6,6)=(81b_2-81b_3-30.375b_1)/2A$
$Q1(7,6)=(40.5b_3-81b_2+10.125b_1)/2A$
$Q1(8,6)=(10.125b_2)/2A$
$Q1(9,6)=(10.125b_2)/2A$
$Q1(10,6)=(20.25b_1-60.75b_2+20.25b_3)/2A$
$Q1(2,7)=(-32b_3)/2A$
$Q1(3,7)=(-32b_2)/2A$
$Q1(4,7)=(-6b_3)/2A$
$Q1(5,7)=(2b_3)/2A$
$Q1(6,7)=(-96b_2+160b_3+2b_1)/2A$
$Q1(7,7)=(-96b_3+160b_2+2b_1)/2A$
$Q1(8,7)=(2b_2)/2A$
$Q1(9,7)=(-6b_2)/2A$
$Q1(10,7)=(-12b_1+4b_2+4b_3)/2A$
$Q1(2,8)=(13.5b_3)/2A$
$Q1(3,8)=(27b_2)/2A$
$Q1(4,8)=(10.125b_3)/2A$
$Q1(5,8)=(10.125b_3)/2A$
$Q1(6,8)=(-81b_3+10.125b_1+40.5b_2)/2A$

$Q1(7, 8)=(81b_3-81b_2-30.375b_1)/2A$

$Q1(8, 8)=(-30.375b_2)/2A$

$Q1(9, 8)=(10.125b_2)/2A$

$Q1(10, 8)=(20.25b_1+20.25b_2-60.75b_3)/2A$

$Q1(1, 9)=(-b_3)/2A$

$Q1(2, 9)=(-b_3)/2A$

$Q1(3, 9)=(4b_3-3.5b_2-3.5b_1)/2A$

$Q1(4, 9)=(-1.75b_3)/2A$

$Q1(5, 9)=(-1.75b_3)/2A$

$Q1(6, 9)=(-3b_2+7b_3-1.75b_1)/2A$

$Q1(7, 9)=(-10.5b_3+7b_2+5.75b_1)/2A$

$Q1(8, 9)=(-10.5b_3+7b_1+5.75b_2)/2A$

$Q1(9, 9)=(-3b_1+7b_3-1.75b_2)/2A$

$Q1(10, 9)=(-3.5b_1-3.5b_2+11.5b_3)/2A$

$Q1(1, 10)=(13.5b_3)/2A$

$Q1(3, 10)=(27b_1)/2A$

$Q1(4, 10)=(10.125b_3)/2A$

$Q1(5, 10)=(10.125b_3)/2A$

$Q1(6, 10)=(10.125b_1)/2A$

$Q1(7, 10)=(-30.375b_1)/2A$

$Q1(8, 10)=(81b_3-81b_1-30.375b_2)/2A$

$Q1(9, 10)=(40.5b_1-81b3+10.125b_2)/2A$

$Q1(10, 10)=(20.25b_1+20.25b_2-60.75b_3)/2A$

$Q1(1, 11)=(-32b_3)/2A$

$Q1(3, 11)=(-32b_1)/2A$

$Q1(4, 11)=(2b_3)/2A$

$Q1(5, 11)=(-6b_3)/2A$

$Q1(6, 11)=(-6b_1)/2A$

$Q1(7, 11)=(2b_1)/2A$

$Q1(8, 11)=(-96b_3+160b_1+2b_2)/2A$

$Q1(9, 11)=(-96b_1+160b_3+2b_2)/2A$

$Q1(10, 11)=(4b_1-12b_2+4b_3)/2A$

$Q1(1, 12)=(27b_3)/2A$

$Q1(3, 12)=(13.5b_1)/2A$

$Q1(4, 12)=(-30.375b_3)/2A$

$Q1(5, 12)=(10.125b_3)/2A$

$Q1(6, 12)=(10.125b_1)/2A$

$Q1(7, 12)=(10.125b_1)/2A$

$Q1(8, 12)=(40.5b_3-81b_1+10.125b_2)/2A$

$Q1(9, 12)=(81b_1-81b_3-30.375b_2)/2A$

$Q1(10, 12)=(-60.75b_1+20.25b_2+20.25b_3)/2A$

$Q1(4, 13)=(96b_3)/2A$

$Q1(5, 13)=(-32b_3)/2A$

$Q1(6, 13)=(-32b_1)/2A$

$Q1(7, 13)=(-32b_1)/2A$

$Q1(8, 13)=(-32b_2)/2A$

$Q1(9, 13)=(96b_2)/2A$

$Q1(10, 13)=(192b_1-64b_2-64b_3)/2A$

$Q1(4, 14)=(-32b_3)/2A$

$Q1(5, 14)=(96b_3)/2A$

$Q1(6, 14)=(96b_1)/2A$

$Q1(7, 14)=(-32b_1)/2A$

$Q1(8, 14)=(-32b_2)/2A$

$Q1(9, 14)=(-32b_2)/2A$

$Q1(10, 14)=(-64b_1+192b_2-64b_3)/2A$

$Q1(4, 15)=(-32b_3)/2A$

$Q1(5, 15)=(-32b_3)/2A$

$Q1(6, 15)=(-32b_1)/2A$

$Q1(7, 15)=(96b_1)/2A$

$Q1(8, 15)=(96b_2)/2A$

$Q1(9, 15)=(-32b_2)/2A$

$Q1(10, 15)=(-64b_1-64b_2+192b_3)/2A$

$Q3\ (1, 1) = (3b_1-2.5b_2-2.5b_3)/2A$

$Q3\ (2, 1) = (b_1)/2A$

$Q3\ (3, 1) = (b_1)/2A$

$Q3\ (4, 1) = (-5b_1+2b_2+2b_3)/2A$

$Q3\ (5, 1) = (2b_1)/2A$

$Q3\ (6, 1) = (-5b_1+2b_2+2b_3)/2A$

$Q3\ (1, 2) = (9b_2)/2A$

$Q3\ (2, 2) = (-4.5b_1)/2A$

$Q3\ (4, 2) = (18b_1-9b_2-4.5b_3)/2A$

$Q3\ (5, 2) = (-4.5b_1)/2A$

$Q3\ (6, 2) = (-4.5b_2)/2A$

$Q3\ (1, 3) = (-4.5b_2)/2A$

$Q3\ (2, 3) = (9b_1)/2A$

$Q3\ (4, 3) = (-9b_1+18b_2-4.5b_3)/2A$

$Q3\ (5, 3) = (-4.5b_1)/2A$

$Q3\ (6, 3) = (-4.5b_2)/2A$

$Q3\ (1, 4) = (b_2)/2A$

$Q3\ (2, 4) = (-2.5b_1+3b_2-2.5b_3)/2A$

$Q3\ (3, 4) = (b_2)/2A$

$Q3\ (4, 4) = (2b_1-5b_2+2b_3)/2A$

$Q3\ (5, 4) = (2b_1-5b_2+2b_3)/2A$
$Q3\ (6, 4) = (2b_2)/2A$
$Q3\ (2, 5) = (9b_3)/2A$
$Q3\ (3, 5) = (-4.5b_2)/2A$
$Q3\ (4, 5) = (-4.5b_3)/2A$
$Q3\ (5, 5) = (-4.5b_1+18b_2-9b_3)/2A$
$Q3\ (6, 5) = (-4.5b_2)/2A$
$Q3\ (2, 6) = (-4.5b_3)/2A$
$Q3\ (3, 6) = (9b_2)/2A$
$Q3\ (4, 6) = (-4.5b_3)/2A$
$Q3\ (5, 6) = (-4.5b_1-9b_2+18b_3)/2A$
$Q3\ (6, 6) = (-4.5b_2)/2A$
$Q3\ (1, 7) = (b_3)/2A$
$Q3\ (2, 7) = (b_3)/2A$
$Q3\ (3, 7) = (-2.5b_1-2.5b_2+3b_3)/2A$
$Q3\ (4, 7) = (2b_3)/2A$
$Q3\ (5, 7) = (2b_1+2b_2-5b_3)/2A$
$Q3\ (6, 7) = (2b_1+2b_2-5b_3)/2A$
$Q3\ (1, 8) = (-4.5b_3)/2A$
$Q3\ (3, 8) = (9b_1)/2A$
$Q3\ (4, 8) = (-4.5b_3)/2A$
$Q3\ (5, 8) = (-4.5b_1)/2A$
$Q3\ (6, 8) = (-9b_1-4.5b_2+18b_3)/2A$
$Q3\ (1, 9) = (9b_3)/2A$
$Q3\ (3, 9) = (-4.5b_1)/2A$
$Q3\ (4, 9) = (-4.5b_3)/2A$
$Q3\ (5, 9) = (-4.5b_1)/2A$
$Q3\ (6, 9) = (18b_1-4.5b_2-9b_3)/2A$
$Q3\ (4, 10) = (27b_3)/2A$
$Q3\ (5, 10) = (27b_1)/2A$
$Q3\ (6, 10) = (27b_2)/2A$
Q5 (1, 1) = 1.0
Q5 (4, 1) = -2.5
Q5 (5, 1) = 1.0
Q5 (8, 1) = 1.0
Q5 (9, 1) = -2.5
Q5 (10, 1) = 2.0
Q5 (4, 2) = 9.0
Q5 (5, 2) = -4.5
Q5 (10, 2) = -4.5
Q5 (4, 3) = -4.5
Q5 (5, 3) = 9.0
Q5 (10,3) = -4.5
Q5 (2, 4) = 1.0
Q5 (4, 4) = 1.0
Q5 (5, 4) = -2.5
Q5 (6, 4) = -2.5
Q5 (7, 4) = 1.0
Q5 (10, 4) = 2.0
Q5 (6, 5) = 9.0
Q5 (7, 5) = -4.5
Q5 (10, 5) = -4.5
Q5 (6, 6) = -4.5
Q5 (7, 6) = 9.0
Q5 (10, 6) = -4.5
Q5 (3, 7) = 1.0
Q5 (6, 7) = 1.0
Q5 (7, 7) = -2.5
Q5 (8, 7) = -2.5
Q5 (9, 7) = 1.0
Q5 (10, 7) = 2.0
Q5 (8, 8) = 9.0
Q5 (9, 8) = -4.5
Q5 (10, 8) = -4.5
Q5 (8, 9) = -4.5
Q5 (9, 9) = 9.0
Q5 (10, 9) = -4.5
Q5 (10, 10) = 27.0

مشتقات درایه های ماتریسهای [Q1] و [Q3] نسبت به متغیر طراحی α در ادامه ارائه می‌گردند. باید اشاره نمود که با تبدیل عوامل b_i به c_i در روابط زیر، به ترتیب، مشتقات ماتریسهای [Q2] و [Q4] به دست می آیند. در ضمن، مشتق درایه های داده نشده برابر با صفر است.

$$\frac{\partial Q1(1,1)}{\partial\alpha}=\frac{(4\partial b_1/\partial\alpha-3.5\partial b_2/\partial\alpha-3.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(1,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(2,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(2,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(3,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(3,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(4,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-10.5\partial b_1/\partial\alpha+7\partial b_2/\partial\alpha+5.75\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(5,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-3\partial b_2/\partial\alpha+7\partial b_1/\partial\alpha-1.75\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(5,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(6,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-1.75\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(6,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(7,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-1.75\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(7,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(8,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-3\partial b_3/\partial\alpha+7\partial b_1/\partial\alpha-1.75\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(8,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(9,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-10.5\partial b_1/\partial\alpha+7\partial b_3/\partial\alpha+5.75\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(9,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(10,1)}{\partial\alpha}=\frac{(11.5\partial b_1/\partial\alpha-3.5\partial b_2/\partial\alpha-3.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(10,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(1,2)}{\partial\alpha}=\frac{(27\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(1,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(2,2)}{\partial\alpha}=\frac{(13.5\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(2,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(4,2)}{\partial\alpha}=\frac{(81\partial b_1/\partial\alpha-81\partial b_2/\partial\alpha-30.375\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(5,2)}{\partial\alpha}=\frac{(40.5\partial b_3/\partial\alpha-81\partial b_1/\partial\alpha+10.125\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(5,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(6,2)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(6,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(7,2)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(7,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(8,2)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(8,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(9,2)}{\partial\alpha}=\frac{(-30.375\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(9,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(10,2)}{\partial\alpha}=\frac{(-60.75\partial b_1/\partial\alpha+20.25\partial b_2/\partial\alpha+20.25\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(10,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(1,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(1,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(2,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(2,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(4,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-96\partial b_1/\partial\alpha+160\partial b_2/\partial\alpha+2\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(5,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-96\partial b_2/\partial\alpha+160\partial b_1+2\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(5,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(6,3)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(6,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(7,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-6\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(7,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(8,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-6\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(8,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(9,3)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(9,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(10,3)}{\partial\alpha}=\frac{(4\partial b_1/\partial\alpha+4\partial b_2/\partial\alpha-12\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(10,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(1,4)}{\partial\alpha}=\frac{(13.5\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(1,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(2,4)}{\partial\alpha}=\frac{(27\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(2,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,4)}{\partial \alpha} = \frac{(40.5\partial b_1/\partial \alpha - 81\partial b_2/\partial \alpha + 10.125\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(4,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,4)}{\partial \alpha} = \frac{(81\partial b_2/\partial \alpha - 81\partial b_1/\partial \alpha - 30.375\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(5,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,4)}{\partial \alpha} = \frac{(-30.375\partial b_1/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(6,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,4)}{\partial \alpha} = \frac{(10.125\partial b_1/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(7,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,4)}{\partial \alpha} = \frac{(10.125\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(8,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,4)}{\partial \alpha} = \frac{(10.125\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(9,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,4)}{\partial \alpha} = \frac{(20.25\partial b_1/\partial \alpha - 60.75\partial b_2/\partial \alpha + 20.25\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(10,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(1,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(1,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(2,5)}{\partial \alpha} = \frac{(4\partial b_2/\partial \alpha - 3.5\partial b_1/\partial \alpha - 3.5\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(2,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(3,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(3,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-3\partial b_1/\partial \alpha + 7\partial b_2/\partial \alpha - 1.75\partial b_3 - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(4,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-10.5\partial b_2/\partial \alpha + 7\partial b_1/\partial \alpha + 5.75\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(5,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6.5)}{\partial \alpha} = \frac{(-10.5\partial b_2/\partial \alpha + 7\partial b_3/\partial \alpha + 5.75\partial b_1/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(6.5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-3\partial b_3/\partial \alpha + 7\partial b_2/\partial \alpha - 1.75\partial b_1/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(7,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-1.75\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(8,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-1.75\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(9,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,5)}{\partial \alpha} = \frac{(-3.5\partial b_1/\partial \alpha + 11.5\partial b_2/\partial \alpha - 3.5\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(10,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(2,6)}{\partial \alpha} = \frac{(27\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(2,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(3,6)}{\partial \alpha} = \frac{(13.5\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(3,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,6)}{\partial \alpha} = \frac{(10.125\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(4,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,6)}{\partial \alpha} = \frac{(-30.375\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(5,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,6)}{\partial \alpha} = \frac{(81\partial b_2/\partial \alpha - 81\partial b_3/\partial \alpha - 30.375\partial b_1/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(6,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,6)}{\partial \alpha} = \frac{(40.5\partial b_3/\partial \alpha - 81\partial b_2/\partial \alpha + 10.125\partial b_1/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(7,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,6)}{\partial \alpha} = \frac{(10.125\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(8,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,6)}{\partial \alpha} = \frac{(10.125\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(9,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,6)}{\partial \alpha} = \frac{(20.25\partial b_1/\partial \alpha - 60.75\partial b_2/\partial \alpha + 20.25\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(10,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(2,7)}{\partial \alpha} = \frac{(-32\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(2,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(3,7)}{\partial \alpha} = \frac{(-32\partial b_2/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(3,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,7)}{\partial \alpha} = \frac{(-6\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(4,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,7)}{\partial \alpha} = \frac{(2\partial b_3/\partial \alpha - 2\partial A/\partial \alpha \,.\, Q1\,(5,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,7)}{\partial\alpha}=\frac{(-96\partial b_2/\partial\alpha+160\partial b_3/\partial\alpha+2\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(6,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,7)}{\partial\alpha}=\frac{(-96\partial b_3/\partial\alpha+160\partial b_2/\partial\alpha+2\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(7,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,7)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(8,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,7)}{\partial\alpha}=\frac{(-6\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(9,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,7)}{\partial\alpha}=\frac{(-12\partial b_1/\partial\alpha+4\partial b_2/\partial\alpha+4\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(10,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(2,8)}{\partial\alpha}=\frac{(13.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(2,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(3,8)}{\partial\alpha}=\frac{(27\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(3,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,8)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,8)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(5,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,8)}{\partial\alpha}=\frac{(-81\partial b_3/\partial\alpha+10.125\partial b_1/\partial\alpha+40.5\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(6,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,8)}{\partial\alpha}=\frac{(81\partial b_3/\partial\alpha-81\partial b_2/\partial\alpha-30.375\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(7,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,8)}{\partial\alpha}=\frac{(-30.375\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(8,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,8)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(9,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,8)}{\partial\alpha}=\frac{(20.25\partial b_1/\partial\alpha+20.25\partial b_2/\partial\alpha-60.75\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(10,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(1,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(1,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(2,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(2,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(3,9)}{\partial\alpha}=\frac{(4\partial b_3/\partial\alpha-3.5\partial b_2/\partial\alpha-3.5\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(3,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-1.75\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-1.75\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(5,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-3\partial b_2/\partial\alpha+7\partial b_3/\partial\alpha-1.75\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(6,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-10.5\partial b_3/\partial\alpha+7\partial b_2/\partial\alpha+5.75\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(7,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-10.5\partial b_3/\partial\alpha+7\partial b_1/\partial\alpha+5.75\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(8,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-3\partial b_1/\partial\alpha+7\partial b_3/\partial\alpha-1.75\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(9,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-3.5\partial b_1/\partial\alpha-3.5\partial b_2/\partial\alpha+11.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(10,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(1,10)}{\partial\alpha}=\frac{(13.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(1,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(3,10)}{\partial\alpha}=\frac{(27\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(3,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,10)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,10)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(5,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,10)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(6,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,10)}{\partial\alpha}=\frac{(-30.375\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(7,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(8,10)}{\partial\alpha}=\frac{(81\partial b_3/\partial\alpha-81\partial b_1/\partial\alpha-30.375\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(9,10)}{\partial\alpha}=\frac{(40.5\partial b_1/\partial\alpha-81\partial b_3/\partial\alpha+10.125\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(10,10)}{\partial\alpha}=\frac{(20.25\partial b_1/\partial\alpha+20.25\partial b_3/\partial\alpha-60.75\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(1,11)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(3,11)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(4,11)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(5,11)}{\partial\alpha}=\frac{(-6\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(6,11)}{\partial\alpha}=\frac{(-6\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(7,11)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(8,11)}{\partial\alpha}=\frac{(-96\partial b_3/\partial\alpha+160\partial b_1/\partial\alpha+2\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(9,11)}{\partial\alpha}=\frac{(-96\partial b_1/\partial\alpha+160\partial b_3/\partial\alpha+2\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(10,11)}{\partial\alpha}=\frac{(4\partial b_1/\partial\alpha-12\partial b_2/\partial\alpha+4\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,11))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(1,12)}{\partial\alpha}=\frac{(27\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(3,12)}{\partial\alpha}=\frac{(13.5\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(4,12)}{\partial\alpha}=\frac{(-30.375\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(5,12)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(6,12)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(7,12)}{\partial\alpha}=\frac{(10.125\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(8,12)}{\partial\alpha}=\frac{(40.5\partial b_3/\partial\alpha-81\partial b_1/\partial\alpha+10.125\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(9,12)}{\partial\alpha}=\frac{(81\partial b_1/\partial\alpha-81\partial b_3/\partial\alpha-30.375\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(10,12)}{\partial\alpha}=\frac{(-60.75\partial b_1/\partial\alpha+20.25\partial b_2/\partial\alpha+20.25\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,12))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(4,13)}{\partial\alpha}=\frac{(96\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,13))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(5,13)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,13))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(6,13)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,13))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(7,13)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,13))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(8,13)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,13))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(9,13)}{\partial\alpha}=\frac{(96\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,13))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(10,13)}{\partial\alpha}=\frac{(192\partial b_1/\partial\alpha-64\partial b_2/\partial\alpha-64\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,13))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(4,14)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,14))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1(5,14)}{\partial\alpha}=\frac{(96\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1(4,14))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,14)}{\partial\alpha}=\frac{(96\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,14))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,14)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,14))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,14)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,14))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,14)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,14))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,14)}{\partial\alpha}=\frac{(-64\partial b_1/\partial\alpha + 192\partial b_2/\partial\alpha - 64\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,14))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(4,15)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,15))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(5,15)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,15))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(6,15)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,15))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(7,15)}{\partial\alpha}=\frac{(96\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,15))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(8,15)}{\partial\alpha}=\frac{(96\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,15))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(9,15)}{\partial\alpha}=\frac{(-32\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,15))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q1\,(10,15)}{\partial\alpha}=\frac{(-64\partial b_1/\partial\alpha - 64\partial b_2/\partial\alpha + 192\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q1\,(4,15))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(1.\,1)}{\partial\alpha}=\frac{(3\partial b_1/\partial\alpha - 2.5\partial b_2/\partial\alpha - 2.5\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(1,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(2,1)}{\partial\alpha}=\frac{(\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(2,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(3,1)}{\partial\alpha}=\frac{(\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(3,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-5\partial b_1/\partial\alpha + 2\partial b_2/\partial\alpha + 2\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,1)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,1)}{\partial\alpha}=\frac{(-5\partial b_1/\partial\alpha + 2\partial b_2/\partial\alpha + 2\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,1))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(1,2)}{\partial\alpha}=\frac{(9\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(1,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(2,2)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(2,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,2)}{\partial\alpha}=\frac{(18\partial b_1/\partial\alpha - 9\partial b_2/\partial\alpha - 4.5\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,2)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,2)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,2))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(1,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(1,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(2,3)}{\partial\alpha}=\frac{(9\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(2,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-9\partial b_1/\partial\alpha + 18\partial b_2/\partial\alpha - 4.5\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,3)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,3))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(1,4)}{\partial\alpha}=\frac{(\partial b_2/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(1,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(2,4)}{\partial\alpha}=\frac{(-2.5\partial b_1/\partial\alpha + 3\partial b_2/\partial\alpha - 2.5\partial b_3/\partial\alpha - 2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(2,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(3,4)}{\partial\alpha}=\frac{(\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(3,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,4)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_1/\partial\alpha-5\partial b_2/\partial\alpha+2\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,4)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_1/\partial\alpha-5\partial b_2/\partial\alpha+2\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,4)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,4))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(2,5)}{\partial\alpha}=\frac{(9\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(2,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(3,5)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(3,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,5)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,5)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha+18\partial b_2/\partial\alpha-9\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,5)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,5))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(2,6)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(2,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(3,6)}{\partial\alpha}=\frac{(9\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(3,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,6)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,6)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha-9\partial b_3/\partial\alpha+18\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,6)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_2/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,6))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(1,7)}{\partial\alpha}=\frac{(\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(1,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(2,7)}{\partial\alpha}=\frac{(\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(2,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(3,7)}{\partial\alpha}=\frac{(-2.5\partial b_1/\partial\alpha-2.5\partial b_2/\partial\alpha+3\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(3,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,7)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,7)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_1/\partial\alpha+2\partial b_2/\partial\alpha-5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,7)}{\partial\alpha}=\frac{(2\partial b_1/\partial\alpha+2\partial b_2/\partial\alpha-5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,7))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(1,8)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(1,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(3,8)}{\partial\alpha}=\frac{(9\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(3,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,8)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,8)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,8)}{\partial\alpha}=\frac{(-9\partial b_1/\partial\alpha-4.5\partial b_2/\partial\alpha+18\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,8))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(1,9)}{\partial\alpha}=\frac{(9\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(1,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(3,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(3.9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(4,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,9)}{\partial\alpha}=\frac{(-4.5\partial b_1/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(5,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,9)}{\partial\alpha}=\frac{(18\partial b_1/\partial\alpha-4.5\partial b_2/\partial\alpha-9\partial b_3/\partial\alpha-2\partial A/\partial\alpha\,.\,Q3\,(6,9))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(6,\,10)}{\partial \alpha}=\frac{(27\partial b_2/\partial \alpha-2\partial A/\partial \alpha\,.\,Q3\,(6,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(4,\,10)}{\partial \alpha}=\frac{(27\partial b_3/\partial \alpha-2\partial A/\partial \alpha\,.\,Q3\,(4,10))}{2A}$$

$$\frac{\partial Q3\,(5,\,10)}{\partial \alpha}=\frac{(27\partial b_1/\partial \alpha-2\partial A/\partial \alpha\,.\,Q3\,(5,10))}{2A}$$

همان گونه که مشاهده می‌شود، در روابط اخیر مشتقات $\partial b_i/\partial \alpha, \partial A/\partial \alpha$ و $\partial c_i/\partial \alpha$ مورد نیاز می‌باشند. مشتق $\partial A/\partial \alpha$ باتوجه به رابطه مساحت جزء مثلثی در ادامه ارائه گردیده است. همچنین، مشتقات $\partial c_i/\partial \alpha$، $\partial b_i/\partial \alpha$ بسته به این که متغیر طراحی α کدام یک از مختصات x یا y گره کلیدی kام جزء طراحی باشد، مطابق روابط زیر به دست می‌آیند. در این روابط f_k تابع شکل وابسته به گره کلیدی k ام جزء طراحی را نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial b_2}{\partial y_k}=f_k\,(r_3,s_3)-f_k\,(r_1,s_1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}c_2+b_1\frac{\partial c_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}c_1-b_2\frac{\partial c_1}{\partial \alpha}\right)$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial y_k}=f_k\,(r_1,s_1)-f_k\,(r_2,s_2)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \chi_k}=\frac{\partial b_2}{\partial \chi_k}=\frac{\partial b_3}{\partial \chi_k}=0$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \chi_k}=-\frac{\partial b_i}{\partial y_k}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_k}=\frac{\partial c_2}{\partial y_k}=\frac{\partial c_3}{\partial y_k}=0$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial y_k}=f_k\,(r_2,s_2)-f_k\,(r_3,s_3)$$