دو روش پاره‌سازی چند مرحله‌ای

محمد رضایی‌پژند
دانشیار

سعید برادران همتی
دانشجوی کارشناسی ارشد

گروه عمران دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

دو روش پاره‌سازی چندمرحله‌ای برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها ارائه می‌گردد. به همراه این فنون شش روش دیگر تحلیل غیرخطی به کار می‌رود. مبانی مورد نیاز و پژوهشهای وابسته به موضوع ارائه می‌گردند. با روشهای مزبور مسائل تنش و کرنش مستوی و نیز سازه‌های با تقارن محوری تحلیل خواهد شد. سرانجام با توجه به نتایج عددی بدست آمده درباره توانایی‌های دو روش پاره‌سازی چندمرحله‌ای و نیز سایر فنون اظهار نظر می‌گردد.

Two Multi - Level Substructuring Methods

M. Rezaiee Pajanad
Associate Prof.

S. Baradaran Hemati
Graduate Student

Civil. Eng. Dept. Ferdowsi Univ.

Abstract

Two multi - level substructuring methods for nonlinear analysis of structures are presented. Alongwith these techniques, six other methods are used. Required basises and related researches will be given. With these methods, plane stress, plane strain and axisymmetric structures will be analyzed. Finally, according to the numerical results, about the ability of two multi - level substructuring methods, and other techniques are discussed.

Keywords *: Multi - Level Substructuring, Finite Element, Plane Problems, Skyline, Nonlinear Analysis.*

۱ـ مقدمه

امروزه سازه‌های پیچیده با روش اجزای محدود قابل تحلیل شده‌اند. کلی بودن این ابزار محاسباتی به گونه‌ای است که تحلیل هر نوع سازه‌ای با رفتار خطی و یا غیرخطی در حالت بارگذاری ایستا و یا پویا را پذیرا می‌باشد. شکل سازه پیش از تحلیل به تعداد زیادی جزء ساده و یا شمار کمتری جزء مرتبه بالاتر تقسیم می‌شود و با روی هم گذاری ماتریس سختی این اجزاء تحلیل انجام می‌گیرد. یادآوری می‌کند که تقسیم سازه به شمار مناسبی جزء یک ضرورت بوده و برای دقت تحلیل، لازم می‌باشد. به هر حال با انجام این کار معادلات حاکم بر رفتار سازه دارای ابعاد گسترده‌ای شده و حل آنها با مشکل روبرو می‌گردد.

روشهای گوناگونی برای حل دستگاه معادلات حاکم بزرگ ارائه شده‌اند. استفاده از رایانه‌های پر ظرفیت و یا انبارسازی در وسایل جانبی، اگر در دسترس باشند، مناسب است. چاره دیگری که پژوهشگران برای حل این مشکل اندیشیده‌اند به کارگیری مفهوم پاردسازی در تحلیل سازه می‌باشد. در روش پاره‌سازی، سازه به چندین زیر سازه تقسیم می‌شود و درجات آزادی غیرمرزی حذف می‌گردد. با انجام این کار، درجات آزادی هر

بخش کاهش می‌یابد. سوارنمودن زیر سازه‌ها و تشکیل ماتریس سختی سبب می‌شود که درجات آزادی کاهش یافته و دستگاه معادلات حاکم کوچکتر شده و حل آن ساده‌تر انجام پذیرد. هر چند در آغاز ارائه روشهای پاره‌سازی، تحلیل به صورت درج شده صورت‌می‌گرفت ولی با گذشت‌زمان به تدریج فنونی به این مفاهیم افزوده شد که توانایی روش را گسترش داده است.

پاره‌سازی خود انطباق یک گام بسوی خودکار نمودن تحلیل سازه می‌باشد. با این روش تحلیل کشسان ـ مومسان به آسانی صورت می‌گیرد. باید آگاه بود که اینگونه تحلیل به صورت گام‌به‌گام انجام می‌گیرد و چنانچه تدابیری اندیشه نشود باید همه معادلات حاکم ـ که ابعاد بزرگی دارد ـ بارها حل گردد. چاره مناسب پاره سازی خود انطباق چنین است که اجزای مومسان و کشسان را بطور خودکار از هم جدا سازد. ماتریس سختی زیرسازه کشسان که دارای ابعاد قابلّ ملاحظه‌ای است را یک بار تجزیه نموده و در تحلیلهای پیاپی از آن استفاده می‌کنند. زیرسازه مومسان ـ که بطور معمول کوچک است ـ را در گامهای مختلف تغییر داده و اثر آن را در تحلیل وارد می‌سازند. انجام این تدبیر سبب می‌گردد که ابعاد معادلات حاکم در گامهای تحلیل غیرخطی کاهش یابد و از نظر انبارسازی و زمان حل معادلات در روش پاره سازی خود انطباق صرفه‌جویی شود.

پاره‌سازی چند مرحله‌ای یک روش دیگر بهره‌جویی از مفاهیم اولیه پاره‌سازی می‌باشد. یادآوری می‌کند زیرسازه‌های موردنظر ممکن است دارای درجات متفاوتی باشند. زیرسازه درجه اول تنها از اجزای پایه ـ که ماتریس سختی آنها در دست است ـ تشکیل می‌شود. اگر زیر سازه‌ای از چند زیرسازه درجه اول تشکیل گردد آن را زیرسازه درجه دوم می‌نامند. به همین صورت زیرسازه‌های درجه سوم و مرتبه‌های بالاتر تعریف می‌گردند. در واقع، فن پاره‌سازی چند مرحله‌ای از تکرار شکل هندسی سازه استفاده نموده و هر زیر سازه می‌تواند از مجموعه زیرسازه‌های دیگر تشکیل گردد. زیرسازه‌هایی که شکل یکسانی دارند تنها یکبار محاسبه شده و درجات آزادی آنها کم‌سازی می‌شود. با انجام این کارها هیچگونه تقریبی در محاسبات وارد نشده و تحلیل دقیق می‌باشد. شایان توجه است که به کارگیری روش پاره‌سازی چندمرحله‌ای سبب کاهش درجات آزادی و در نتیجه آسانی تحلیل سازه خواهد شد.

در ادامه این مقاله پژوهشهای وابسته ارائه می‌شود و درباره آنها اظهارنظر می‌گردد. سپس از روش اجزای محدود و پاره‌سازی سخن به میان می‌آید. پاره‌سازی چندمرحله‌ای تشریح می‌شود و چگونگی استفاده از آن در تحلیل کشسان ـ مومسان به نظر خوانندگان می‌رسد. دو روش پاره‌سازی چندمرحله‌ای مورد بحث قرار می‌گیرد. از این فنون در تحلیل کشسان ـ مومسان استفاده خواهد شد. روند برنامه رایانه‌ای آماده شده برای تحلیل مزبور به‌اختصار ارائه می‌شود. با این برنامه چند مسأله مختلف تحلیل غیرخطی شده و ویژگیهای پاره‌سازی چندمرحله‌ای، مورد بحث مشخص می‌گردد.

۲ـ پژوهشهای وابسته

کمتر از نیم‌قرن می‌باشد که روش اجزای محدود به عنوان یکی از ابزارهای محاسباتی در تحلیل سازه‌ها ارائه شده است. روش پاره‌سازی سازه‌ها ـ که یکی از فنون اجزای محدود می‌باشد ـ در دهه ۶۰ میلادی شناخته شده است. برای اولین بار شمنسکی مبانی این روش را ارائه نمود و آن را در تحلیل سازه هواپیما به کاربرد [P1]. پس از آن پژوهشهای زیادی برای ساده کردن و سرعت بخشیدن به این روش آغاز شد. دنکه و شمنسکی در سال ۱۹۶۶ متراکم سازی ماتریس سختی را به صورت مثلثی کردن پاره‌ای ارائه نمودند [H3]. در سال ۱۹۷۰ نیز روسن و رابینشتن متراکم سازی را به کمک تجزیه ماتریس سختی به انجام رساندند [R1]. تجزیه ماتریس سختی تنها به قسمتی از ماتریس سختی سازه ـ که مربوط به درجات آزادی داخل است ـ محدود می‌گردد. به همین جهت این روش آزادسازی پاره‌ای درجات آزادی داخلی نامیده می‌شود. از روش کروت بهبود یافته نیز در سال ۱۹۷۴ برای متراکم سازی استفاده شد. پاول و موندکر روش مزبور را بر اساس تجزیه پاره‌ای ارائه نمودند [H3].

پیترسون و پوپوف در سال ۱۹۷۵ روشی بر مبنای کم سازی درجات آزادی داخلی در سطح جزء ارائه نمودند. با این روش در مرحله سوار کردن ماتریس سختی‌سازه، درجات آزادی هر جزء وارسی می‌شوند. سپس درجات آزادی که در ارتباط با اجزای بعدی نباشند، حذف می‌گردند. این روش مشابه حل جبهه‌ای دستگاه معادلات حاکم بر رفتار سازه می‌باشد. در صورت وجود تغییر مکانهای وابسته (محدودیت) آنها نیز در همین هنگام حذف می‌گردند. در این پژوهش پاره‌سازی چند مرحله‌ای نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. مثال ارائه شده برای این مورد یک قاب چند طبقه است. در این تحلیل زیر سازه‌های

مشابه در قسمتهای مختلف سازه وجود دارند. چگونگی استفاده از پاره‌سازی چندمرحله‌ای و اثر آن در ساده کردن تحلیل و کاستن از زمان محاسبات بوسیله پژوهشگران نامبرده تشریح شده است [P2].

بکارگیری روش جبهه‌ای برای محاسبه ماتریس سختی مؤثر زیر سازه‌ها در پژوهشی دیگر توسط ویل و علیزاده در سال ۱۹۷۸ صورت گرفته است. در کار ارائه شده برای حل سازه‌های با درجات آزادی زیاد انجام سه نوع فعالیت پیش‌بینی شده است. نخست اینکه سازه به چند زیر سازه تقسیم شود. سپس از روش جبهه‌ای در حل دستگاه معادلات حاکم بر رفتار سازه استفاده گردد. در پایان کار اگر جبهه بزرگ شد و اطلاعات مربوط به آن از حافظه جاری رایانه فراتر رفت، از حافظه جانبی برای ذخیره سازی استفاده نمود. به این ترتیب روش مزبور را برای حل سازه‌های با درجات آزادی زیاد می‌توان به کاربرد. بااین همه، سرعت محاسباتی روش بسیارکم است [A2].

در سال ۱۹۷۸ گوروجی و دشپانده روشی را به نام حذف درونی ارائه نمودند. این روش در سازه‌های خاصی کاربرد دارد. در این سازه‌ها، زیرسازه‌ها زنجیروار به دنبال یکدیگر قرار می‌گیرند. برجها، دکلها و قابهای چند طبقه از این گونه سازه‌ها هستند. سپس با شماره‌گذاری خاصی پهنای نوار ماتریس سختی کاهش می‌یابد. به این ترتیب و بر مبنای روش نواری با پهنای ثابت، ماتریس سختی مؤثر محاسبه می‌گردد [G1].

با انجام تغییراتی در روش رابینشتن توسط هان و آبل، سرعت محاسباتی متراکم‌سازی ماتریس سختی افزوده شد. هان در سال ۱۹۸۴ روش چولسکی رابا انجام تغییراتی در تجزیه پاره‌ای ماتریس سختی به کار برد. این کار سبب کاستن شمار عملیات محاسباتی و در نتیجه بهبود سرعت شد. با استفاده از این روش و با محدودکردن محاسبات به پهنای نوار ماتریس سختی، متراکم سازی ۲۵ درصد نسبت به روش پیشین سریعتر انجام می‌شود [H1]. پس از آن در سال ۱۹۸۵ با اصلاحی دیگر در روش تجزیه چولسکی و به کمک تجزیه پاره‌ای روشی نو برای متراکم سازی ارائه شد. ماری و الوی ضمن انجام این اصلاحات از روش آسمانخراش نیز برای ذخیره‌سازی ماتریس سختی استفاده نمودند. با محدودکردن محاسبات به درایه‌های داخل آسمانخراش روشی کارآمد در متراکم سازی ماتریس سختی پدید می‌آید [E1].

روشی برای حذف تغییر مکانهای وابسته یا محدودیتها از زیرسازه‌ها توسط گلگر ارائه گردید. کاهش تغییر مکانهای وابسته ممکن است سبب از بین رفتن تقارن ماتریس سختی زیرسازه گردد. اما گلگر ماتریس تبدیلی ارائه نمود که ضمن حذف درجات آزادی داخلی، تغییر مکانهای وابسته را نیز حذف می‌کند و تقارن ماتریس سختی باقی می‌ماند [G2].

تاکنون تاریخچه‌ای از روشهای متراکم سازی ماتریس سختی زیرسازه‌ها و راههای کم کردن زمان محاسبات ارائه شد. پاره سازی در شاخه‌های مختلف تحلیل به کار رفته است و در هر یک از آنها کارآیی خود را به اثبات رسانده است. اناند و سابهاش در سال ۱۹۸۰ روشی بر مبنای پاره‌سازی چند مرحله‌ای برای ریز کردن شبکه اجزای محدود ارائه نمودند. در تحلیل سازه و برای دستیابی به دقت بالاتر باید در قسمتهایی از سازه که تغییرات تنش شدید است، شبکه اجزاء ریزتر باشد. در روش ارائه شده اناند، نخست سازه با شبکه‌ای درشت پوشانده می‌شود، سپس این شبکه با روش پاره‌سازی چند مرحله‌ای تا حد لازم ریزتر می‌گردد [A1].

برای حل سازه‌های بزرگ، شاخه‌ای به نام تحلیل موازی سازه‌ها بوجود آمده است. این شاخه از تحلیل بسیارجوان بوده و اساس آن بر پاره‌سازی چندمرحله‌ای استوار می‌باشد. در این روشها تحلیل یک سازه واحد به کمک چند رایانه مرتبط به هم به صورت موازی و همزمان صورت می‌گیرد. سازه به تعدادی زیرسازه ـ که برابر با تعداد رایانه‌ها است ـ تقسیم می‌گردد. پژوهشهای انجام شده بیشتر در زمینه ارائه راهی بهینه در چگونگی تقسیم سازه به زیرسازه‌ها و تقسیم کار متعادل بین رایانه‌ها است. به این ترتیب کوشش می‌شود زمان تحلیل به حداقل ممکن برسد [N2 و F1].

پاره‌سازی در کاهش زمان تحلیل پویا نیز نقش بسزایی دارد. پژوهشهای زیادی در زمینه چگونگی استفاده از پاره‌سازی در تحلیل پویا به انجام رسیده است [D1]. در دو سال اخیر پژوهشهای جدیدی نیز در مورد استفاده از پاره‌سازی در تحلیل کمانشی سازه صورت گرفته است. این پژوهشها کارآیی پاره‌سازی را در این شاخه از تحلیل نیز اثبات‌می‌کند [W1 و H4].

در زمینه استفاده از پاره‌سازی در تحلیل کشسان ـ مومسان نیز کارهای متعددی توسط پژوهشگران انجام شده است. در سال ۱۹۷۷ نور و دیگران امکان استفاده از پاره‌سازی در تحلیل غیرخطی مواد را بررسی نموده و روابط متراکم‌سازی ماتریس سختی زیرسازه مومسان را ارائه نمودند [N1]. دادس و لوپز نیز

در سال ۱۹۸۰ مطالبی را در این زمینه ارائه کردند [DI]. آنها چند برنامه تجاری که توان استفاده از روش پاره‌سازی را دارند معرفی می‌نمایند. سپس امکان استفاده از پاره‌سازی در تحلیل کشسان ـ مومسان را مطرح کرده و مثالی را حل می‌کنند.

اون و گونکلوز، در سال ۱۹۸۰ پژوهشی در تحلیل کشسان ـ مومسان با استفاده از پاره‌سازی چند مرحله‌ای به انجام رساندند. [O2]. در این تحقیق روابط اساسی متراکم سازی ماتریس سختی زیرسازه مومسان و روند تحلیل کشسان ـ مومسان سازه با استفاده از پاره‌سازی ارائه شده است. آنها با آگاهی از چگونگی گستردگی نقاط مومسان، سازه را به دو زیر سازه کشسان و مومسان تقسیم می‌کنند. ماتریس سختی زیرسازه کشسان در اولین گام بارگذاری محاسبه شده و بر حسب درجات آزادی مرزی دو زیرسازه متراکم می‌گردد. این ماتریس در گامهای بعد تغییر نکرده و ثابت نگه داشته می‌شود. ماتریس سختی زیرسازه مومسان نیز در گامهای بعدی و هر یک از تکرارهای این گامها با توجه به وضعیت تنش در اجزای این زیر سازه دوباره برپا می‌شود. به این ترتیب با روش مزبور تحلیل غیرخطی سریعتر انجام می‌گردد. در این روش باید پیش از تحلیل از گستردگی ناحیه مومسان آگاه بود. به همین دلیل به کارگیری، این روش با مشکلاتی همراه است. برای حل این مشکل می‌توان از روشی به نام «پاره‌سازی خود انطباق» استفاده نمود.

در روش خود انطباق روند تحلیل به گونه‌ای است که اجزای سازه بر اساس سطح تنش مؤثر خود در دو زیرسازه کشسان و مومسان قرار می‌گیرند. اندازه زیرسازه‌ها به صورت خودکار در هر گام بارگذاری تعیین می‌شود. به این ترتیب زیرسازه مومسان همراه با گسترش مومسانی در سازه رشد یافته و خود را بر این ناحیه انطباق ارائه می‌دهد. در سال ۱۹۸۴ آبل و هان روشی را بر مبنای پاره‌سازی خودانطباق ارائه نمودند. در روش آنها قسمت کشسان سازه از نظر هندسی ممکن است به چند زیرسازه تقسیم گردد. قسمت مومسان نیز تنها در یک زیرسازه مومسان قرار می‌گیرد. ماتریس سختی زیرسازه کشسان در اولین تکرار یک گام بارگذاری محاسبه شده و تا هنگامی که شکل زیرسازه تغییر نکند ثابت نگه‌داشته می‌شود. ماتریس سختی زیرسازه مومسان در هر تکرار دوباره برپا می‌شود. با مومسان شدن اجزایی از زیرسازه کشسان دوباره شکل زیرسازه‌ها تغییر کرده و اجزای مومسان در زیر سازه مومسان قرار می‌گیرند. به این ترتیب زیرسازه مومسان خود را بر ناحیه مومسان شده انطباق می‌دهد. در این روش، تحلیل‌گر بدون آگاهی از چگونگی گستردگی نقاط مومسان در سازه از روش پاره‌سازی در تحلیل کشسان ـ مومسان استفاده می‌کند. زمان محاسبات در این روش در مواردی تا ۴۰ درصد بهبود را نسبت به روشهای معمولی نشان می‌دهد [H5].

قابهای پر شده با مصالح بنایی از خود رفتار غیرخطی نشان می‌دهند. تحلیل غیرخطی این قابها با استفاده از روش پاره‌سازی در سال ۱۹۸۵ توسط تیروونگادام ارائه گردید [T1]. پژوهشی دیگر در سال ۱۹۸۷ توسط علی، مور و پیج در مورد رفتار غیرخطی مصالح بنایی شکننده زیر بارهای متمرکز انجام شد. در این کار قسمتی از دیوار ـ که تنش در آن به حد جاری‌شدن می‌رسد ـ بعنوان زیرسازه مومسان انتخاب می‌شود. بقیه سازه که تنش آن کمتر از جاری‌شدن است به عنوان زیرسازه کشسان منظور می‌گردد [M2].

سو و دیگران در سال ۱۹۸۸ پژوهشی در مورد استفاده از پاره‌سازی چندمرحله‌ای در تحلیل غیرخطی مواد انجام دادند. آنها زیرسازه‌های مومسان را ـ که از نظرهندسی در نقاط پراکنده‌ای از سازه قراردارند ـ در زیرسازه‌هایی از مرتبه بالاتر قرارداده و تحلیل نمودند. زیرسازه مرتبه بالاتر از دو یا چند زیرسازه درجه پایین‌تر تشکیل شده است. در یک سازه ممکن است قسمتهای مومسان سازه از نظر هندسی به یکدیگر متصل نباشند. بطور مثال در یک تیر دو سر گیردار ـ که زیر بار گسترده‌ای قرار دارد ـ دو سر و نیز وسط تیر مومسان می‌شوند، در حالی که بقیه قسمتهای سازه کشسان است. در پژوهش مزبور هر قسمت مومسان شده به عنوان یک زیرسازه درنظرگرفته می‌شود و سپس زیرسازه‌های مومسان در زیرسازه‌ای از درجه بالاتر قرار می‌گیرند. قسمتهای کشسان نیز در زیرسازه‌های کشسان جا دارند. خاطرنشان می‌سازد در روش ارائه شده پاره‌سازی خود انطباق درنظر نبوده و پیش از آغاز تحلیل تقسیم سازه به زیرسازه‌های مورد نظر انجام می‌گیرد. در مقالات ارائه شده مثالهای عددی نیز برای نشان دادن کارآیی روش درج شده است [S1 و R4].

۳ـ اجزای محدود و پاره‌سازی

یکی از فنون محاسباتی که توان بررسی پاسخ انواع سازه‌ها را در مقابل عوامل مختلف دارد، روش اجزای محدود است. اساس روش مزبور بر رابطه ساده (۱) استوار است. در این رابطه ماتریس سختی [S] مشخصات مکانیکی و هندسی سازه را در

بردارد و نیروها و تغییر مکانهای گرهی را به هم پیوند می‌دهد.

$$[S]\{D\} = \{P\} \qquad (۱)$$

در روش اجزای محدود، سازه به تعدادی اجزاء که ماتریس سختی آنها قابل محاسبه باشد تقسیم می‌گردد. سپس ماتریس سختی سازه از روی ماتریسهای سختی اجزاء برپا می‌شود. به این ترتیب ماتریس سختی سازه بر اساس رفتار هر جزء شکل می‌گیرد. بارهای خارجی وارد بر درجات آزادی سازه، بردار بارها {P} راتشکیل می‌دهند. با حل دستگاه معادلات (۱) مجهولات ـ که همان تغییر مکانهای درجات آزادی سازه می‌باشند ـ بدست می‌آیند. سپس تغییر مکانهای مربوط به درجات آزادی هر جزء از بین تغییر مکانهای سازه جدا می‌شوند. با داشتن ماتریس کرنش [B]، کرنشهای جزء از روی تغییر مکانها بدست می‌آیند. پس از آن با توجه به ماتریس مشخصات مواد $[D_m]$ تنشهای هر جزء قابل محاسبه است.

به این ترتیب با روش اجزای محدود، تحلیل یک سازه به صورت کامل ممکن می‌شود. یکی از نیازهای اولیه در روش اجزای محدود، پیداکردن ماتریس سختی اجزاء است. تاکنون پژوهشهای بسیاری برای تعیین ماتریس سختی اجزاء با شکلها و رفتارهای مختلف صورت گرفته است. بطور معمول هر چه درجات آزادی یک سازه بیشتر باشد، دقت محاسبات افزایش می‌یابد. این کار سبب بزرگ شدن ماتریس سختی سازه نیز شده و در نتیجه حل دستگاه معادلات حاکم بر رفتار سازه ـ رابطه (۱) ـ با مشکل مواجه می‌شود. مشکل دیگر، حافظه موردنیاز برای انبارسازی درایه‌های ماتریس سختی است. سرانجام آخرین مشکل، زمان‌بر بودن حل دستگاه معادلات است. باید آگاه بود یکی از روشهایی که برای کاهش این مشکلات ارائه شده است روش پاره‌سازی می‌باشد.

۴ـ پاره‌سازی سازه‌ها

در روش پاره‌سازی، سازه نخست به چند زیرسازه تقسیم می‌شود. هر زیرسازه در واقع بخشی از سازه است که خود دارای چندین گره و جزء می‌باشد. زیرسازه‌ها در گره‌هایی با یکدیگر در ارتباط می‌باشند. گره‌هایی که فقط متعلق به یک زیرسازه باشند، گره‌های داخلی زیرسازه نامیده می‌شوند. گره‌هایی که ارتباط دهنده و متصل کننده دو یا چند زیرسازه به هم باشند، گره‌های مرزی نام دارند. درجات آزادی و یا تغییر مکانهای زیرسازه‌ها نیز به همین صورت دسته‌بندی می‌شوند.

در یک زیرسازه رابطه حاکم رفتاری را می‌توان به شکل جدا شده بر حسب دو دسته تغییر مکانهای مرزی با زیرنویس b و تغییر مکانهای داخلی با زیرنویس i نوشت. با گسترش این رابطه، معادله‌ای بدست می‌آید که تنها مجهولات آن تغییر مکانهای مرزی باشند. ماتریس سختی در این معادله ـ رابطه (۷) ـ ماتریس سختی مؤثر زیرسازه نامیده می‌شود. این روند متراکم سازی ماتریس سختی نام دارد.

$$\begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ib} \\ S_{bi} & S_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_b \end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

$$[S_{ii}]\{D_i\} + [S_{ib}]\{D_b\} = \{P_i\} \qquad (۳)$$

$$[S_{bi}]\{D_i\} + [S_{bb}]\{D_b\} = \{P_b\} \qquad (۴)$$

$$\{D_i\} = [S_{ii}]^{-1}(\{P_i\} - [S_{ib}]\{D_b\}) \qquad (۵)$$

$$[S_{ib}][S_{ii}]^{-1}(\{P_i\} - [S_{ib}]\{D_b\}) + [S_{bb}]\{D_b\} = \{P_b\}$$

$$([S_{bb}] - [S_{bi}][S_{ii}]^{-1}[S_{ib}])\{D_b\} = \{P_b\} - [S_{bi}][S_{ii}]^{-1}\{P_i\} \qquad (۶)$$

$$[S_b]\{D_b\} = \{\bar{P}_b\} \qquad (۷)$$

$$[S_b] = [S_{bb}] - [S_{bi}][S_{ii}]^{-1}[S_{ib}] \qquad (۸)$$

$$\{\bar{P}_b\} = \{P_b\} - [S_{bi}][S_{ii}]^{-1}[P_i] \qquad (۹)$$

در سازه‌ای که به چند زیرسازه تقسیم شده، در هر زیرسازه ماتریس سختی مؤثر $[S_b]$ محاسبه می‌شود. سپس با سوارکردن ماتریس سختی زیرسازه‌ها، ماتریس سختی کلی سازه تشکیل و تحلیل صورت می‌پذیرد. به این ترتیب تعداد زیادی از درجات آزادی داخلی تمامی زیرسازه‌ها در ماتریس سختی کلی سازه وارد نشده و ابعاد ماتریس مزبور بسیار کوچکتر می‌گردد. بطوری که در رابطه (۸) دیده می‌شود $[S_b]$ یک ماتریس مربعی بوده و دارای b سطر و ستون می‌باشد. این در حالی است که اثر تمامی درجات آزادی داخلی در تحلیل داخل شده و هیچ تغییری در دقت محاسبات به وجود نیامده است.

شایان توجه است که در عمل ماتریس سختی $[S_b]$ به سبب وقت‌گیر بودن وارون‌کردن ماتریس $[S_{ii}]$ با استفاده مستقیم از رابطه (۸) محاسبه نمی‌گردد. روشهای مختلفی برای محاسبه ماتریس سختی مؤثر زیرسازه وجود دارد [۱]. برخی از این روشها برای سازه‌های خاصی کاربرد داشته و تعدادی نیز استفاده عمومی دارند. در بیشتر روشها هدف کم کردن زمان محاسبات و کاستن از حافظه مورد نیاز می‌باشد. از سوی دیگر سهولت کاربرد و برنامه نویسی نیز موردنظر است.

بیشتر روشهایی که در حل دستگاه معادلات حاکم بر رفتار سازه کاربرد دارند را می‌توان با تغییراتی در متراکم سازی

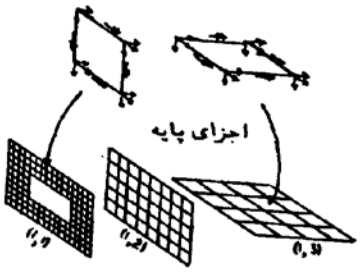
به‌کاربرد. از جمله این روشها، روش حذفی گوس است. برای متراکم سازی، ماتریس سختی به صورت دسته‌بندی شده بر حسب تغییر مکانهای داخلی و مرزی برپا می‌شود. در روش گوس تغییر مکانهای داخلی سطر به سطر از ماتریس سختی حذف می‌شوند. روند حذفی با حذف آخرین درجه آزادی داخلی پایان می‌یابد. به این ترتیب تغییراتی در زیر ماتریسهای ماتریس سختی و بردار بار بوجود می‌آید. در آخر زیر ماتریس درجات آزادی مرزی همان ماتریس سختی مؤثر زیرسازه است. این روش به حذف پاره‌ای مشهور است. از روش چولسکی نیز در متراکم سازی می‌توان استفاده کرد. در روش تجزیه پاره‌ای بر اساس روش چولسکی ، زیر ماتریس درجات آزادی داخلی به صورت کامل تجزیه می‌شود. پس از آن با استفاده از زیرماتریسهای بوجود آمده و چند ضرب ماتریسی، ماتریس سختی مؤثر زیرسازه قابل محاسبه است [E1].

در یک سازه بسیاری از درجات آزادی با یکدیگر ارتباطی ندارند. به سخن دیگر، جزئی وجود ندارد که اتصال دهنده این درجات آزادی باشد. از این رو درایه‌های زیادی در داخل ماتریس سختی صفر هستند. از این موضوع و نیز تقارن ماتریس سختی می‌توان استفاده کرد و تنها درایه‌های ناصفر بالای قطر ماتریس سختی را انبار نمود. در روش آسمانخراش پهنای نوار ماتریس سختی در هر ستون با توجه به شماره سطر بالاترین درایه ناصفر تعیین می‌شود. به این ترتیب در ستونهای ماتریس سختی پهنای نوار متفاوت است. با استفاده از روش آسمانخراش فقط درایه‌های داخل آسمانخراش و بالای قطر انبار می‌شوند و محاسبات فقط بر روی همین درایه‌ها انجام می‌شود. این کار سبب می‌گردد روشی سریع که احتیاج به حافظه جاری کمی نیز دارد در متراکم‌سازی ماتریس سختی بوجود آید.

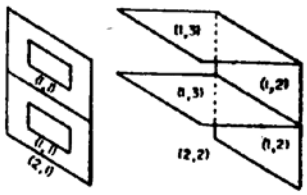
۵ـ پاره‌سازی چند مرحله‌ای

هر زیرسازه به عنوان یک جزء برتر و پیچیده از سازه شناخته می‌شود. تشکیل ماتریس سختی جزئی با شکل پیچیده و دلخواه بطورمستقیم ممکن نمی‌باشد. با وجود این، می‌توان با رویهم‌گذاری ماتریس سختی اجزاء هر زیرسازه و سپس کم‌سازی درجات آزادی داخلی، ماتریس سختی کاهش یافته آن زیرسازه را برحسب درجات آزادی مرزی بدست آورد. هر زیرسازه می‌تواند خود از مجموعه‌ای دیگر از زیرسازه‌ها تشکیل شده باشد. زیرسازه‌ها، بسته به این که از اجزاء پایه تشکیل شده باشند، یا این که در درون آنها تا چند مرتبه از اجزاء برتر استفاده شده باشد، زیرسازه درجه اول یا دوم و یا بالاتر شناخته می‌شوند. یک زیرسازه درجه اول تنها از اجزاء پایه تشکیل شده است. به همین صورت، زیرسازه درجه دو از دو یا چند زیرسازه درجه اول تشکیل می‌شود. زیرسازه‌های درجه بالاتر شامل زیرسازه‌های درجه پایین‌تر بوده و می‌توان آنها را بطور مشابه تعریف کرد. جزئی به عنوان جزء پایه شناخته می‌شودکه بتوان ماتریس‌سختی آن را بطور مستقیم بدست‌آورد.

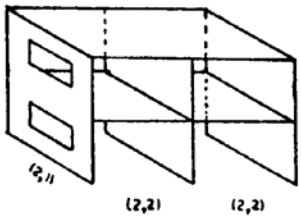
سازه‌ای که در شکل (۱ـ۳) نشان داده شده است از دو نوع زیرسازه (۱،۱) و (۲،۲) تشکیل شده است. باتوجه به شکل (۱ـ۲) زیرسازه‌های (۱،۱) و (۲،۲) خود از زیرسازه‌های درجه دومی ایجاد شده‌اند. زیرسازه درجه دوم (۲،۱) از زیرسازه‌های درجه اول (۱،۱) و زیرسازه درجه دوم (۲،۲) از زیرسازه‌های درجه اول (۳،۱) و (۲،۱) شکل یافته‌اند. شکل (۱ـ۱) نیز چگونگی شبکه‌بندی زیرسازه‌های درجه اول (۱،۱) و (۲،۱) و (۳،۱) را نشان می‌دهد. زیرسازه‌های مزبور از دو نوع اجزای



(۱) زیرسازه‌های درجه اول



(۲) زیرسازه‌های درجه دوم

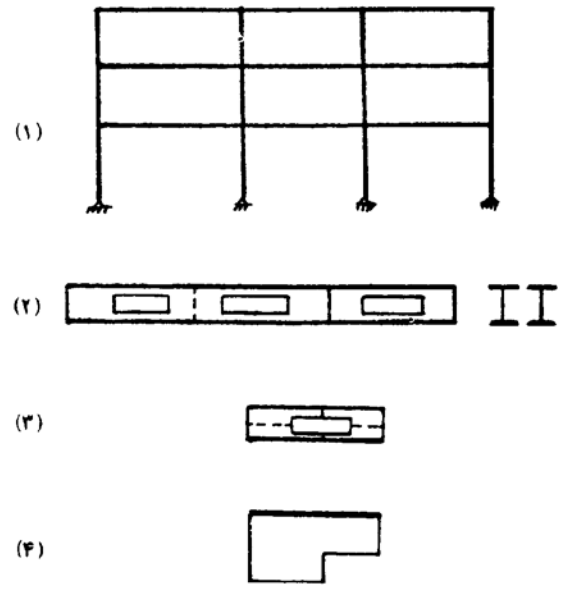


(۳) زیرسازه‌های درجه سوم

شکل (۱) زیرسازه‌های درجه ۱،۲و۳

پایه تشکیل شده‌اند. به این ترتیب ماتریس سختی سازه با توجه به ماتریس سختی اجزاء پایه بر پا شده و درجات آزادی سازه بسیار کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، ماتریس سختی زیرسازه‌هایی که شکل یکسانی دارند تنها یک مرتبه محاسبه و برحسب درجات آزادی مرزی آن کاهش می‌یابد.

برای روشن‌ترشدن موضوع پاره‌سازی چند مرحله‌ای، قاب سه طبقه و زیرسازه‌های آن در شکل (۲) درنظر گرفته می‌شود. شاهتیرهای این قاب خود به زیرسازه‌هایی تقسیم‌بندی شده‌است. جزء نشان داده شده در شکل (۲ـ۴) می‌تواند به عنوان نخستین و کوچکترین زیرسازه از شکل (۲ـ۱) منظور گردد. این جزء به نام زیرسازهٔ درجه اول ـ شکل (۲ـ۴) ـ به اجزاء کوچکتر تقسیم‌بندی شده و با استفاده از روش اجزای محدود ماتریس سختی آن برپا می‌شود. سپس با استفاده از روشهای مختلف پاره‌سازی، ماتریس سختی کاهش یافته آن برحسب درجات آزادی مرزی محاسبه می‌گردد. شکل (۲ـ۳) نیز می‌تواند به عنوان زیرسازه درجه دومی از قاب اصلی درنظر گرفته شود. این زیرسازه درجه دوم از چهار زیرسازه درجه اول تشکیل شده است. درجات آزادی مرزی زیرسازه درجه اول که داخل زیرسازه درجه دوم قرار می‌گیرند و ارتباطی با سایر زیرسازه‌ها ندارد، درجات آزادی داخلی زیرسازه درجه دوم محسوب شده و بقیه درجات آزادی مرزی درنظر گرفته می‌شوند. ماتریس



شکل (۲) قاب سه‌طبقه و زیرسازه‌های آن

سختی مؤثر زیرسازه درجه دوم نیز با سوارشدن از روی سختی‌های زیرسازه‌های درجه اول تشکیل دهنده‌اش و با استفاده از روشهای مختلف محاسبه می‌گردد. به همین ترتیب، تیر شکل (۲ـ۲) زیرسازه درجه سوم سازه اصلی محسوب شده و می‌توان ماتریس سختی آن را فقط در رابطه با تغییر مکانهای سر و ته تیر تعیین نمود. با استفاده از این فرآیند، ماتریس سختی تیر مزبور با روش مستقیم محاسبه می‌شود. پس از تحلیل سازه و مشخص شدن تغییر مکانهای مرزی، با فرآیند پسرفتی به ترتیب تمامی تغییر مکانهای مرزی زیرسازه‌های درجه سوم تا اول محاسبه می‌گردند.

۶ـ تحلیل غیرخطی با اجزای محدود

تحلیل سازه‌ای با رفتار کشسان ـ مومسان با تدابیری در روش اجزای محدود ممکن است. در تحلیل این سازه‌ها بار موردنظر به چند قسمت تقسیم شده و هر بخش در یک گام به سازه وارد می‌شود. در هر گام بارگذاری، رابطه حاکم خطی فرض می‌گردد و سپس با محاسبه بارهای نامیزان ـ که ناشی از رفتار غیرخطی مواد می‌باشند ـ خطای غیرخطی بودن رفتار سازه جبران می‌شود. در هر گام تحلیل، بارهای نامیزان در چند تکرار به سازه وارد می‌شوند تا اینکه مقدار آن ناچیز گردد. برحسب این که از چه روشی در تحلیل غیرخطی استفاده شود، ماتریس سختی در هر یک از مراحل تحلیل دوباره برپا می‌شود یا ثابت می‌ماند.

استفاده از روش پاره‌سازی در تحلیل کشسان ـ مومسان سبب افزایش سرعت محاسبات می‌گردد. یادآوری می‌شود، بطور معمول در بیشترمسایل غیرخطی تمام سازه به حد مومسانی نمی‌رسد و قسمت مومسان شده از محدوده خاصی تجاوز نمی‌کند. هنگامی که شکل سازه و بارگذاری وارد بر آن به گونه‌ای باشد که قسمتی از سازه در روند گامهای بارگذاری به حالت مومسان نرسیده و همواره کشسان باقی بماند، این قسمت از سازه را به عنوان زیرسازه کشسان درنظر گرفته و بقیه سازه که در آن تغییر شکل مومسان رخ می‌دهد به عنوان زیرسازه مومسان تعیین می‌شود. در تحلیل سازه مزبور با روش نموی ـ تکراری، می‌توان ماتریس سختی زیرسازه کشسان را یک مرتبه محاسبه و برحسب درجات آزادی مرزی زیرسازه مومسان و کشسان کاهش داد. با این کار ماتریس سختی مؤثر زیرسازه کشسان بدست می‌آید. اگر هیچ نقطه‌ای از زیرسازه کشسان در روند بارگذاری مومسان نگردد، ماتریس مزبور تغییری نکرده و ثابت باقی می‌ماند

و فقط ماتریس سختی زیرسازه مومسان در هر گام بارگذاری و یا تکرارها باید اصلاح گردد. از این‌رو تحلیل سازه‌ای با رفتار غیرخطی به روش نموی به زیرسازه مومسان محدود می‌گردد و ابعاد مسأله کوچک می‌شود. برای استفاده از این روش تحلیل‌گر باید در آغاز کار تا حدودی از محدوده مومسان شده در آخرین گام بارگذاری آگاه باشد و دو زیرسازه کشسان و مومسان را در گام اول تحلیل تعریف نماید.

۷ـ پاره‌سازی چندمرحله‌ای کشسان ـ مومسان

پاره‌سازی چند مرحله‌ای را در تحلیل کشسان ـ مومسان نیز می‌توان به کاربرد. در این روش، به صورتهای متفاوتی سازه را به زیرسازه‌هایی تقسیم نموده و هر یک از زیرسازه‌ها نیز می‌تواند مشتمل بر زیرسازه‌های دیگری باشد. بار پس‌ماند زیرسازه‌هایی که پاره‌ای از نقاط آن جاری شدهٔ باشند را بایددر هر تکرار محاسبه و بردار بار مؤثر مرزی آنها را در تحلیل واردنمود. بار معادل مرزی زیرسازه‌های کشسان نیز برای یافتن تغییر مکان هر تکرار باید محاسبه گردد. با توجه به نحوه گسترش نواحی مومسان شده در سازه باید شکل زیرسازه‌ها و ترتیب شماره‌بندی آنها رابه گونه‌ای انجام داد که زمان تحلیل تا حد امکان کاهش یابد. باید دانست استفاده از پاره‌سازی چندمرحله‌ای در هر زیرسازه با درنظرگرفتن اهداف خاص آن انجام می‌شود. بطور مثال در سازه‌های بزرگ واحدهای تکراری را می‌توان به عنوان زیرسازه‌هایی تعریف نمود. در تحلیل کشسان ـ مومسان نیز پراکندگی اجزای مومسان شده در قسمتهای مختلف سازه و جدابودن این نواحی از هم می‌تواند ملاک جداسازی زیرسازه‌ها باشد [S1]. جداسازی اجزای زیرسازه بر اساس سطح تنش مؤثر آنها نیز روشی برای استفاده از پاره‌سازی چندمرحله‌ای می‌باشد.

برای بررسی اثر پاره‌سازی چندمرحله‌ای در تحلیل غیرخطی کارهایی در ادامه ارائه می‌شود. یادآوری می‌گردد،یک زیرسازه درجه اول تنها از اجزای پایه تشکیل شده است و زیرسازه دیگری در درون آن قرار ندارد. در روش ارائه شده اجزای سازه بر اساس سطح تنش خود به سه زیرسازه درجه اول تفکیک شده است. گروه نخست اجزایی که سطح تنش مؤثر آنها بیش از حد جاری شدن اولیه می‌باشد. این اجزاء در زیرسازه مومسان قرار می‌گیرند. گروه دیگر اجزایی است که سطح تنش آنها کمتر از F1 برابر تنش جاری شدن است. اجزای مزبور در زیرسازه کشسان جای داده شده‌اند. F1 ضریب جداسازی زیرسازه‌ها بر اساس روش پاره‌سازی خود انطباق است که توسط هان و آبل پیشنهاد شده است [H5]. سایراجزاء نیز در زیرسازه میانی قرارگرفته‌اند. سپس زیرسازه‌های درجه اول مزبور رامی‌توان به صورتهای مختلف در زیرسازه‌های مرتبه بالاتر قرارداد. چه بسا با این کار بتوان زمان محاسبات را کاهش داد. ماتریس سختی هر یک از زیرسازه‌ها نیز می‌تواند بنا برنظر تحلیل‌گر در هر تکرار ثابت یامتغیر باشد. هدف از این‌کار،بررسی تعداد تکرارها و زمان تحلیل در روشهای مختلف می‌باشد.

بر اساس نکات ارائه شده، چهار روش مورد مطالعه قرارگرفته‌اند. در روش اول فقط از زیر سازه‌های درجه اول استفاده شده و تنها ماتریس سختی زیرسازه میانی در هر تکرار دوباره برپا شده است. در واقع چنین فرض شده که ماتریس سختی اجزایی که سطح تنش مؤثر آنها بیش از حد جاری شدن است، چندان تغییر نکرده و نیازی به تشکیل دوباره آنها نمی‌باشد.

روش دوم نیز مشابه روش اول بوده، با این تفاوت که زیرسازه‌های کشسان و مومسان که ماتریس سختی آنها ثابت نگهداشته می‌شود، در زیرسازه درجه دومی قرار می‌گیرند. یادآوری می‌شود بنا به تعریف، زیرسازه درجه دوم از دو یا چند زیرسازه درجه اول تشکیل می‌شود. ماتریس سختی این زیرسازه نیز در تکرارها ثابت می‌ماند. سپس ماتریس سختی سازه با توجه به ماتریسهای سختی مؤثر زیرسازه درجه دوم مزبور و زیرسازه میانی برپا می‌گردد. با مقایسه این روش با روش اول اثر پاره‌سازی چندمرحله‌ای را در کاهش یا افزایش زمان محاسبات می‌توان بررسی کرد.

در روش سوم ماتریس سختی زیرسازه مومسان نیز در هر تکرار دوباره تشکیل می‌شود و زیرسازه درجه دوم، از زیرسازه‌های درجه اول مومسان و میانی تشکیل شده است. بنابراین روش سوم مشابه روش پاره‌سازی خودانطباق ارائه شده توسط هان می‌باشد، با این تفاوت که پاره‌سازی چندمرحله‌ای در آن به کار رفته است. سرانجام در روش چهارم زیرسازه مومسان از پیش تعریف شده و سازه تنها از دو زیرسازه کشسان و مومسان تشکیل شده است. در این روش از پاره‌سازی خود انطباق استفاده نمی‌شود و شکل زیرسازه‌ها تا پایان تحلیل ثابت می‌ماند. ماتریس سختی زیرسازه کشسان در تکرارها ثابت است، اما ماتریس سختی زیرسازه مومسان دوباره تشکیل می‌شود. یادآوری می‌گردد، استفاده از این روش به سبب مشخص نبودن

گستردگی ناحیه مومسان شونده با مشکلاتی همراه است. شایان توجه است که زیرسازه مومسان با استفاده از نتایج تحلیل پیشین سازه تعریف شده است. از این پس، منظور از روشهای اول تا چهارم در متن، روشهای تشریح شده می‌باشد.

خاطرنشان می‌شود که در روش نیوتن رافسون کامل (مماسی) ماتریس سختی کل سازه در هر تکرار برپا می‌شود. در روش نیوتن رافسون بهبود یافته نیز ماتریس سختی سازه در آغاز هر گام بارگذاری و در تکرار اول محاسبه می‌گردد. بنابراین روش سوم در واقع مشابه روش نیوتن رافسون کامل است، زیرا ماتریس سختی ناحیه مومسان سازه در هر تکرار دوباره برپا می‌شود. ماتریس سختی ناحیه کشسان سازه نیز در تکرارها تغییر نمی‌کند. از این‌رو ماتریس سختی سازه در هر تکرار بطور کامل با تغییر خصوصیات سازه انطباق می‌یابد. تعداد تکرارها در یک گام بارگذاری در روش نیوتن رافسون بهبود یافته بیش از روش نیوتن رافسون کامل است. با توجه به شکل سازه و رفتار غیرخطی آن و نیز اندازه بار وارد شده در گام بارگذاری، ممکن است یکی از دو روش بر دیگری برتری یابد. محاسبه بار پس‌ماند تمام زیرسازه‌ها در هر تکرار، این امکان را به تحلیل‌گر می‌دهد که ماتریس سختی هر یک از زیرسازه‌ها را اعم‌از این که در چه سطحی از تنش باشد، در هر تکرار اصلاح نماید یا ثابت نگه دارد. از این‌رو با انتخاب معیاری مناسب که لزوم برپایی دوباره یا ثابت ماندن ماتریس سختی را مشخص کند، این روش می‌تواند بین دو روش نیوتن رافسون کامل و بهبود یافته عمل نماید. به این ترتیب می‌توان راهی کوتاه را در تحلیل سازه اختیار کرد.

۸ـ برنامه رایانه‌ای

برای تحلیل کشسان ـ مومسان سازه‌های پیوسته دو بعدی برنامه‌ای رایانه‌ای تهیه شده است. در این برنامه، امکان استفاده از پاره‌سازی خود انطباق چند مرحله‌ای وجود دارد. برنامه مزبور به زبان فرترن بوده و در حدود ۲۶۰۰ خط و ۳۸ زیربرنامه می‌باشد. تأکید می‌گردد در نوشتن برنامه از کتاب و زیربرنامه‌های هینتون واون استفاده‌های زیادی شده است [O1]. در برنامه تهیه شده سطوح تسلیم ترسکای ساده شده (تقریبی)، فن میسز، موهر ـ کولمب و دراکر ـ پراگر به انتخاب تحلیل‌گر قابل کاربرد می‌باشند. روند برنامه بر اساس بندهای زیرین می‌باشد :

۱ـ داده‌های اولیه مسأله خوانده می‌شود.این داده‌ها شامل: نوع مسأله، تنش یا کرنش مستوی یا سازه با تقارن محوری، مختصات سازه، ترتیب قرارگیری گره‌ها در اجزاء، شماره اجزای همسایه هر جزء، مشخصات بارها و رفتار مواد و مشخصات زیرسازه‌ها، در صورت وجود، و نیز سایر داده‌های لازم می‌باشد. تمامی مشخصات از بایگانی که از پیش به این منظور تنظیم شده خوانده می‌شود.

۲ـ برنامه قابلیت کاربری سه نوع بارگذاری را دارد. بارهای متمرکز گرهی ، بارهای گسترده در لبه اجزاء و نیز بارهای وزنی که به صورت یکنواخت در سطح اجزاء گسترده شده‌اند. در زیر روالی از برنامه مزبور بارهای معادل گرهی محاسبه می‌شوند.

۳ـ بارها در چندین گام بر سازه وارد می‌شوند. در هر گام، ضریب بارگذاری از بایگان ورودی خوانده شده و ضریب مزبور در باری که در بند ۲ محاسبه شده وارد می‌گردد. به این ترتیب، بار تعیین شده برای هر گام بارگذاری مشخص می‌شود.

۴ـ گره‌های مرزی و داخلی زیرسازه‌ها مشخص می‌شوند. در هر زیرسازه، نخست گره‌های داخلی و پس از آن گره‌های مرزی شماره‌گذاری می‌گردند. این شماره‌ها بطور حتم با شماره‌های پیشین گره‌ها یکسان نیستند. به هر حال، شماره پیشین گره نیز در حافظه نگهداری می‌گردد. در هر گام تعداد درجات آزادی مرزی و داخلی زیرسازه‌ها نیز محاسبه می‌شوند. باید دانست شماره‌گذاری و جداسازی گره‌ها فقط در تکرار اول در هر گام بارگذاری صورت می‌پذیرد.

در ادامه، بندهای ۵، ۶، ۷ و ۸ به منظور تشکیل ماتریس سختی و بردار بار کل سازه به تعداد زیرسازه‌ها تکرار می‌گردد.

۵ـ ماتریس سختی زیرسازه محاسبه می‌گردد. این کار فقط برای زیرسازه‌هایی انجام می‌شود که روند برنامه برپایی دوباره ماتریس سختی آن را ایجاب کرده باشد. در صورتی که زیرسازه از نوع درجه اول باشد ـ به این معنی که از زیرسازه دیگری تشکیل نشده باشد و فقط شامل تعدادی از اجزاء اولیه باشد ـ محاسبه ماتریس سختی اجزاء و سوارکردن آنها در ماتریس سختی سازه در زیر روال مربوط انجام می‌شود. اگر زیرسازه درجه اول نباشد، ماتریس سختی آن از سوارکردن ماتریسهای سختی مؤثر زیرسازه‌های درجه پایین‌تر داخل آن توسط زیربرنامه دیگری صورت می‌پذیرد.

۶ـ بارهای گرهی مربوط به درجات آزادی زیرسازه در بردار بار هر زیرسازه وارد می‌گردند. یادآوری می‌کند، بارهای گرهی هر

جزء پیش ازاین دربند ۳ به بارهای نموی تبدیل شده‌اند یا این که بارهای پس ماندی می‌باشند که در تکرار پیشین محاسبه گردیده‌اند. اگر زیرسازه‌ها درجه اول باشند، بردارهای بار با توجه به بارهای گرهی اجزاء تشکیل می‌شود. در غیر این صورت، به کمک بردار بارهای مؤثر زیرسازه‌های مرتبه پایین‌تر داخل آن محاسبه می‌گردد.

۷ـ شرایط تکیه‌گاهی به ماتریس سختی و نیز بردار بار گرهی زیرسازه وارد می‌گردند. انجام این کار در صورت برپایی دوباره ماتریس سختی با توجه به بند ۵ فقط برای زیرسازه‌های درجه اول لازم می‌باشد.

۸ـ ماتریس سختی و بردار بار گرهی زیرسازه متراکم شده و ماتریس سختی و بردار بار مؤثر زیرسازه تعیین می‌گردد. ماتریس سختی فقط وقتی متراکم می‌شود که بند ۵ اجرا شده باشد.

۹ـ در بندهای ۵ تا ۸ ماتریس سختی کل و بردار بار سازه تعیین شده و ابعاد آن برابر با درجات آزادی مرزی موجود در سازه می‌باشد. این دستگاه معادلات حل شده و تغییر مکانهای مربوطه تعیین می‌گردند. سپس با جایگزینی پسرفتی در ماتریسهای سختی زیرسازه‌های موجود ـ به ترتیب درجه آنها، نخست تغییر مکانهای درجات آزادی مرزی و سپس تغییر مکانهای درجات آزادی داخلی زیرسازه‌ها تعیین می‌گردند. به این ترتیب تمام تغییر مکانهای درجات آزادی سازه محاسبه خواهد شد. این تغییر مکانها به تغییر مکانهای تکرارهای پیشین افزوده می‌گردد.

۱۰ـ با توجه به تغییر مکانهای موجود، کرنش محاسبه شده و سپس تنش مؤثر در نقاط گوس اجزاء تعیین می‌گردد. درهر نقطه گوس با استفاده از عامل سخت شوندگی و کرنش مومسانی، سطح تنش جاری جدید یا به سخن دیگر سطح تسلیم جدید نقطه مزبور تعیین می‌گردد. تنش مؤثر نقاطی که خارج از سطح تسلیم جدید واقع باشند، باید برروی سطح تسلیم برگردانده شوند. سپس با توجه به تنش مجاز در نقاط گوس، بارهای معادل گرهی اجزاء تعیین می‌گردند.

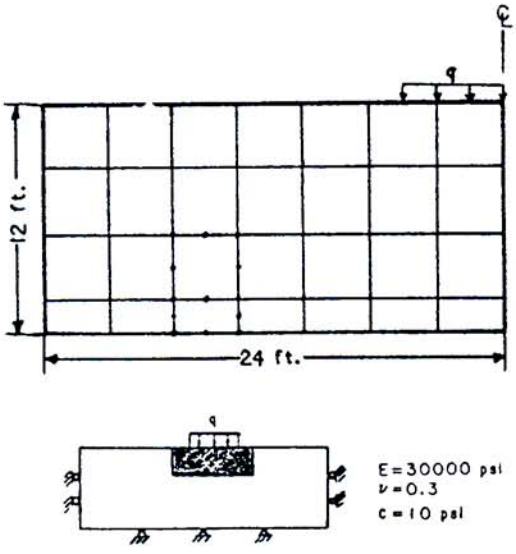
۱۱ـ با مقایسه بارهای معادل گرهی ـ که از بند پیشین محاسبه شده است ـ با بارهایی که تا این گام بارگذاری به سازه وارد شده، همگرایی مسأله بررسی می‌شود. در صورتی که همگرایی حاصل شده باشد، نتایج مربوط به گام بارگذاری در بایگان خروجی انبار شده و محاسبات از بند ۱۲ دنبال می‌گردد. در غیر این صورت با کم کردن بارهای معادل گرهی ـ که از بند ۱۰ محاسبه شده‌اند ـ از بارهای نموی گام بارگذاری، بارهای پس‌ماند تعیین شده و محاسبات از بند ۶ تا رسیدن به همگرایی تکرار می‌گردد.

۱۲ـ اگر گام کنونی آخرین گام بارگذاری نباشد، اجزاء با توجه به سطح تنش مؤثر خود در زیرسازه‌های لازم جداسازی می‌شوند. سپس محاسبات از بند ۳ تا آخرین گام بارگذاری تکرار می‌گردد.

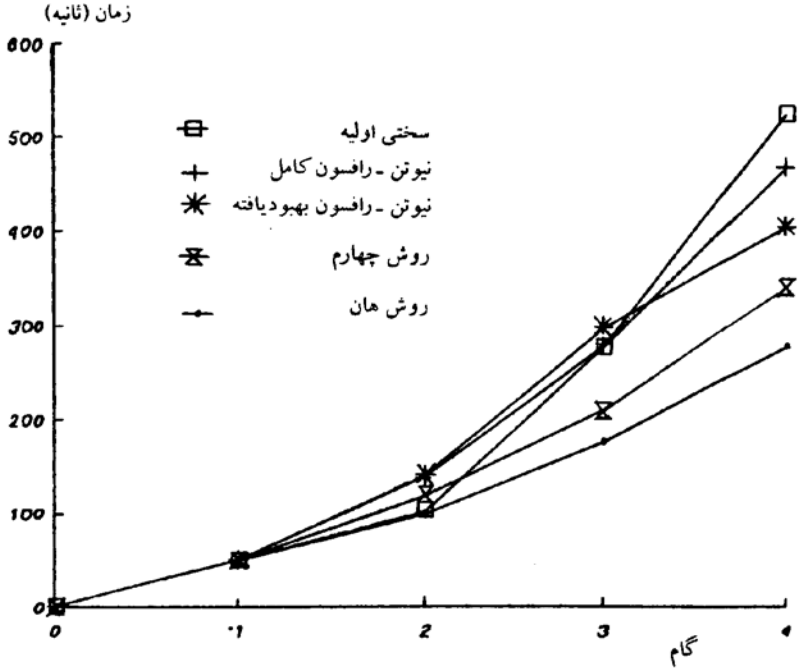
۹ـ پی نواری

در ادامه بحث به حل چند مثال عددی پرداخته می‌شود. یکی از مثالهای حل شده، مقطعی از یک پی نواری با بار یکنواخت بوده که به صورت قائم به آن وارد شده است. محدوده‌ای از خاک زیرپی که در تحمل بار مشارکت دارد به همراه پی به عنوان یک سازه درنظر گرفته شده است. سازه مزبور یک مسأله کرنش مستوی است که دارای یک محور تقارن بوده و به همین دلیل تنها نیمی از سازه برای روش اجزای محدود به کار گرفته می‌شود. ابعاد پی و خاک زیر آن، بارگذاری و محور تقارن سازه و همچنین شبکه بندی آن در شکل (۳) نشان داده شده است.

مشخصات مواد این سازه در ادامه درج می‌شود. ضریب چسبندگی خاک، $c=10psi$ ، عامل کشسانی، $E=30000psi$ ، زاویه اصطکاک داخلی، $\varphi=20$ درجه و نسبت پواسان، $v=0.3$ فرض شده است. برای صلبیت بخشیدن به پی و پخش بهتر بار، عامل کشسانی و تنش تسلیم مواد سازنده پی بسیار بیشتر از خاک می‌باشد. سطح تسلیم دراکر ـ پراگر برای بررسی رفتار غیرخطی خاک به کار رفته است.



شکل (۳) ابعاد پی و خاک زیر آن



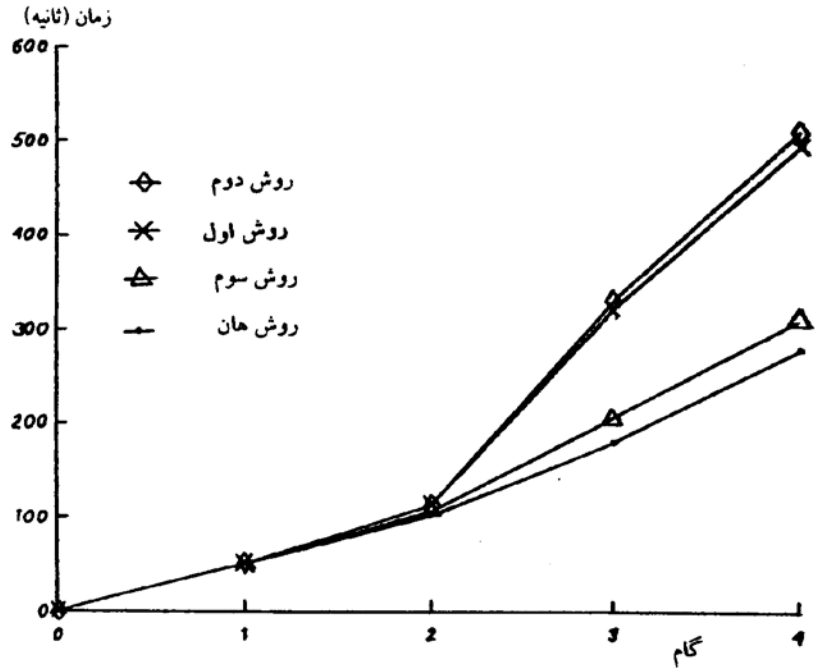
شکل (۴) مقایسه زمانی تحلیل به روشهای گوناگون

در این تحلیل، بار در چهار گام به سازه وارد شده و شدت بار فشاری خارجی به ترتیب 10psi ، 20psi ، 30psi و 35psi بوده است. پی با استفاده از روشهای نیوتن رافسون (مماسی)، نیوتن رافسون بهبود یافته، سختی اولیه و روش خود انطباق تحلیل شده است. نمودار شکل (۴) مقایسه زمانی تحلیل به روشهای مزبور را نشان می‌دهد. در این نمودار محور افقی شماره گام بارگذاری و محور قائم زمان تحلیل برحسب ثانیه را مشخص می‌سازد.

در این مثال، روش نیوتن رافسون بهبود یافته زمان کمتری از روش مماسی داشته است. روش سختی اولیه در گام دوم زمان کمتری را صرف نموده اما زمان آن در گام چهارم بیش از دو روش دیگر می‌باشد. علت این رفتار، تغییر بسیار زیاد مشخصات خاک پس از جاری شدن آن در گامهای پایانی است. یادآوری می‌شود در روش سختی اولیه ماتریس سختی در گامهای تحلیل ثابت بوده و در اولین گام بارگذاری برپا شده است. از این رو در گام پایانی ماتریس مزبور با سختی واقعی سازه تفاوت بسیاری دارد. افزون بر این روش خود انطباق کمترین زمان را در تحلیل به خود اختصاص داده است. در این روش، در هر گام بارگذاری و تکرارهای آن تنها ماتریس سختی اجزاء به تعداد لازم دوباره برپا می‌شود. تعداد تکرارها در گام دوم بارگذاری در روشهای سختی اولیه و بهبود یافته ۸ تکرار و در روشهای مماسی و خو انطباق ۲ تکرار بوده است. گام چهارم بارگذاری در روشها اخیر با ۴ تکرار، در روش بهبود یافته با ۹ تکرار و در روش سختی اولیه با ۳۴ تکرار به همگرایی رسیده است.

برای بررسی کارآیی روشهای ارائه شده در این مقاله ب روشهای پیشین در مرحله دوم پی‌نواری با روشهای اول تا چهار تحلیل شده است. نتایج زمانی این تحلیلها در نمودار شکل (۵ دیده می‌شود. با مقایسه‌ای بین روش خود انطباق ـ که پاره‌سازی چندمرحله‌ای در آن بکار نرفته است ـ و روش سوم، می‌توا دریافت که زمان محاسبات در اثر استفاده از پاره‌سازی چندمرحله‌ای افزایش یافته است. از مقایسه روشهای اول و دو نیز همین نتیجه را می‌توان گرفت.

از سوی دیگر بیشتر بودن زمان تحلیل در روش دوم نسبت به روش سوم، نشان می‌دهد که تقسیم بیشتر ناحیه مومسان سبب کاهش زمان تحلیل نمی‌شود، بلکه این کار و اصلاح نکرد ماتریس سختی همه اجزای مومسان سبب افزایش زمان محاسبا شده است. بنابراین در تحلیل غیرخطی باید ماتریس سختی تم اجزای مومسان شده را اصلاح نمود.

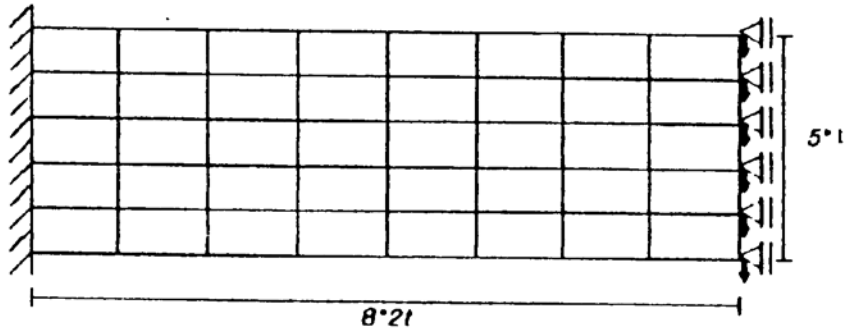


شکل (۵) نتایج زمانی تحلیل‌های گوناگون

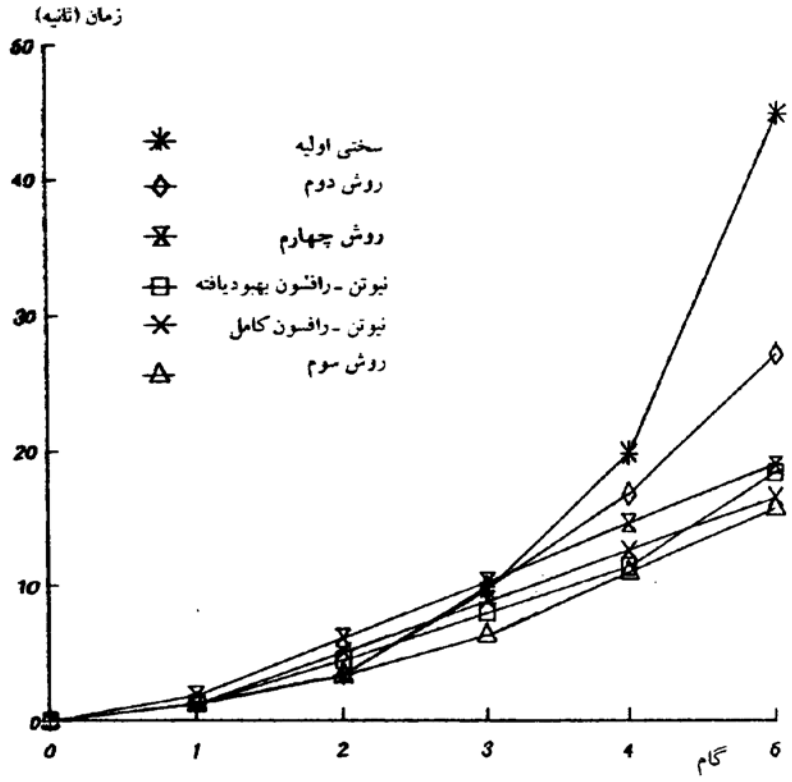
۱۰ـ تیر خمشی

اینک تحلیل غیرخطی یک مسأله تنش مستوی انجام می‌گیرد. تیر خمشی شکل (٦) برای این کار برگزیده شده است. یک سر تیر گیردار فرض شده و درجات آزادی تیر در این قسمت در تمام جهات بسته می‌باشد. در سر دیگر تیر از تغییر مکان افقی درجات آزادی جلوگیری شده و این سر تنها دارای تغییر مکان قائم است. در این تیر تنش تسلیم، σ_y=2333 bar، عامل کشسانی، E=2000000 bar و نسبت پواسان، v=0.3 و بدون سخت شوندگی H'=0 می‌باشند. ضخامت تیر برابر با t=1 می‌باشد. بار اولیه ٦۰۰ کیلوگرم در انتهای آزاد تیر وارد شده و سازه با گامهای بارگذاری افزایشی با ضریب ۱/۷۵ و ضرایب ۰/۷۵ و ۰/۳۵ و ۰/۳۵ و ۰/۲ بارگذاری شده است.

پاره‌سازی چندمرحله‌ای به روشهای دوم و سوم و نیز زیرسازه‌های از پیش تعریف شده به روش چهارم برای تیر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج زمانی تحلیل بر اساس این روشها در شکل (۷) آمده است. دیده می‌شود پاره‌سازی چندمرحله‌ای به صورت به کاررفته در حل این مثال سبب افزایش زمان محاسبات می‌گردد. بنابراین، بهتر است ماتریس سختی تمام اجزای مومسان شده در هر تکرار گام بارگذاری دوباره برپا شوند. همان گونه که انتظار می‌رود، روش چهارم ـ که در آن زیرسازه‌های خطی و



شکل (٦) تیر خمشی



شکل (۷) مقایسه زمانی تحلیل به روشهای گوناگون

غیرخطی پیش از تحلیل تعیین می‌شوند و تا آخر ثابت می‌مانند ـ از روش نیوتن رافسون کامل تندتر کار می‌کند. شایان توجه است که مجموع تکرارها برای تیر گیردار در روش نیوتن رافسون بهبود یافته ۵۶ تکرار، سختی اولیه ۲۴۸ تکرار، نیوتن رافسون کامل ۱۳ تکرار و در روش دوم ۳۵ تکرار بوده است.

۱۱ـ مجرای پوسته‌ای

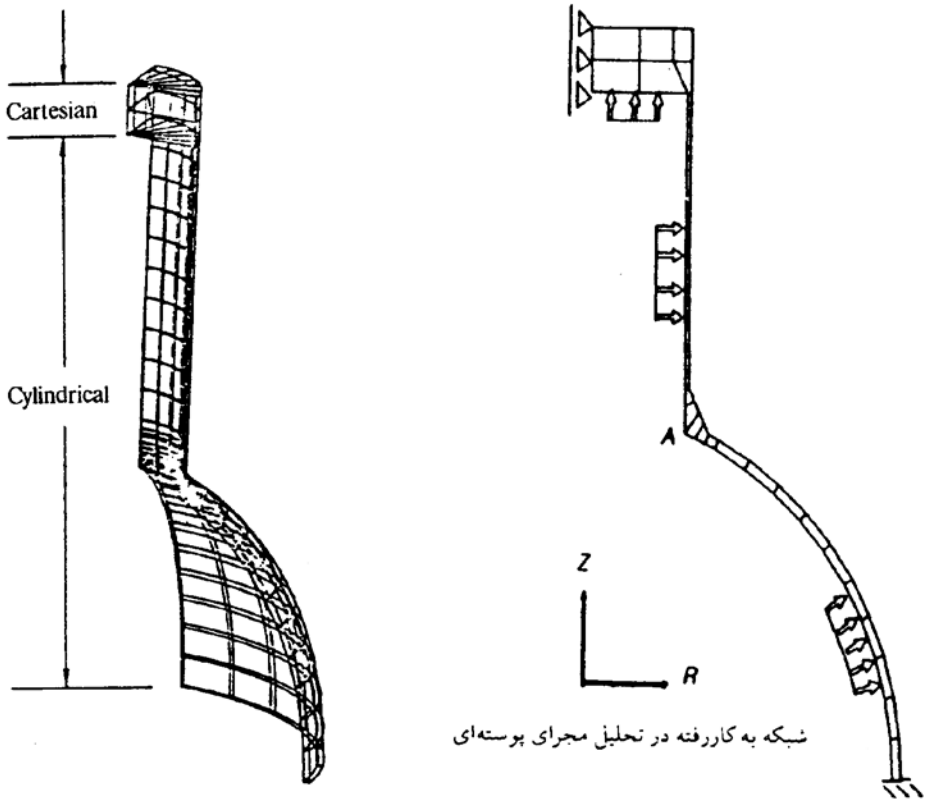
شکل (۸) یک چهارم از مجرای پوسته‌ای را نشان می‌دهد. این سازه دارای تقارن محوری می‌باشد.و از جوش دادن دو پوسته کروی و استوانه‌ای به وجود آمده است. سازه مورد بحث زیر فشار داخلی یکنواختی می‌باشد. مشخصات مواد به کاررفته در سازه به این شرح است :

عامل کشسانی، $E=29120000\ lb/in^2$ ، نسبت پواسان، $\nu=0/3$ ، تنش تسلیم، $\sigma_Y=40540\ lb/in^2$ و عامل سخت شوندگی $H'=0$. شکل سازه و چگونگی شبکه اجزاء درشکل (۸) آمده است. یادآوری می‌نماید تحلیل غیرخطی مجرای پوسته‌ای مزبور به وسیله زینکویچ ارائه گردیده است [۱۷].

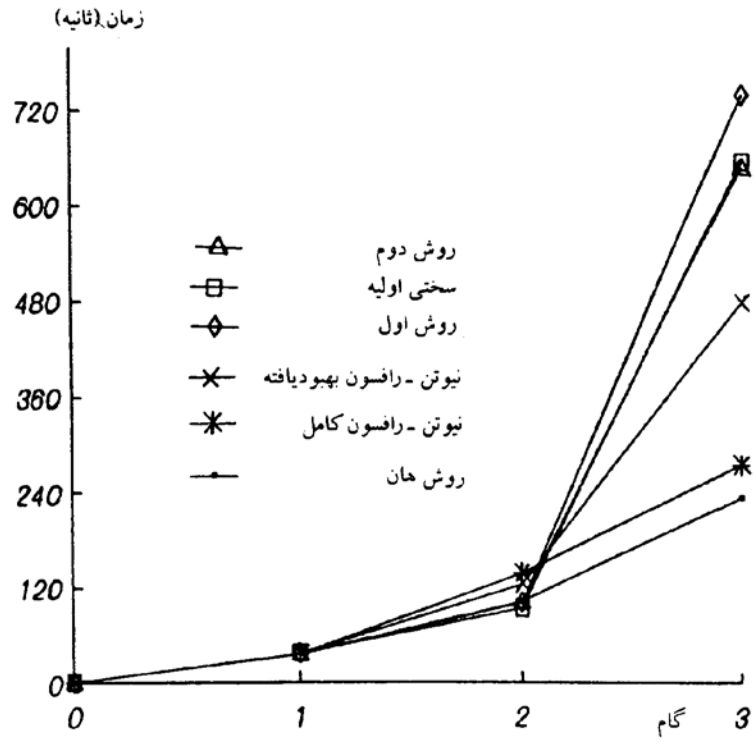
در این مسأله بارگذاری در سه گام انجام شده است. روش نیوتن رافسون کامل در مجموع با ۸ تکرار، روشهای اول و دوم با ۲۳ تکرار، نیوتن رافسون بهبود یافته با ۵۳ تکرار و روش سختی اولیه با ۸۵ تکرار به همگرایی رسیده‌اند.

در نمودار شکل (۹) محور افقی به شماره گام بارگذاری و محور قائم به زمان تحلیل بر حسب ثانیه اختصاص دارد. همانگونه که دیده می‌شود، در روش اول ـ که ماتریس سختی پاره‌ای از اجزای مومسان شده ثابت می‌ماند ـ زمان تحلیل بیش از روش خود انطباق است. در این مسأله روش نیوتن رافسون کامل کمتر از روش بهبود یافته زمان‌بری دارد. اما روشهای اول و دوم کندتر از سایر روشها می‌باشند. روش دوم نیز که از پاره‌سازی چند مرحله‌ای استفاده می‌کند، از روش اول سریعتر است.

به سبب شکل خاص سازه و این که اجزاء به طور منفرد در یک خط به دنبال هم قرار می‌گیرند و نیز چگونگی شماره‌گذاری گره‌ها، درایه‌های غیر صفر ماتریس سختی در نزدیکی قطر جمع شده و پراکندگی کمی دارند. به گونه‌ای که



شکل (۸) یک چهارم از مجرای پوسته‌ای



شکل (۹) مقایسه زمانی تحلیل به روشهای گوناگون

تنها حدود ۱۱ درصد درایه‌ها در داخل آسمانخراش ماتریس سختی قرار می‌گیرند. در سازه مزبور، تعداد درجات آزادی ۲۹۸ عدد، تعداد درایه‌های بالا و روی قطر ماتریس سختی ۴۴۵۵۱ عدد بوده که از این تعداد فقط ۵۰۹۴ عدد آنها در آسمانخراش قراردارند. به این ترتیب در روش آسمانخراش تنها حدود یازده درصد درایه‌ها انبار شده و محاسبات بر روی آنها انجام می‌گیرد.

۱۲ـ نتیجه‌گیری

هدف اصلی این مقاله‌مشخص‌نمودن توانایی‌های روشهای ارائه شده بخصوص پاره‌سازی چندمرحله‌ای است. بر اساس تجربیات عددی نویسندگان نکاتی روشن شده است که در ادامه به آنها پرداخته می‌شود. در روش اول اجزای سازه بر اساس سطح تنش خود در سه زیرسازه درجه اول جای داده می‌شوند. ماتریس سختی زیرسازه کشسان و مومسان ثابت باقی‌مانده و ماتریس سختی زیرسازه میانی در هر تکرار دوباره تشکیل می‌شود. دیده می‌شود این روش، زمانی بیش از روش نیوتن رافسون کامل می‌برد و از روش سختی اولیه تندتر کار می‌کند. در مقایسه با روش خودانطباق، این روش کندتر بوده و به این ترتیب برپایی دوباره ماتریس سختی تمامی اجزای مومسان شده در هر تکرار لازم است.

روش دوم نیز مشابه روش اول است، با این تفاوت که در این روش از پاره‌سازی چند مرحله‌ای استفاده شده است و زیرسازه‌های با ماتریس سختی ثابت در زیرسازه‌های درجه بالاتر قرارمی‌گیرند. در مقایسه زمانی روشهای اول و دوم مشاهده می‌شود پاره‌سازی چند مرحله‌ای تنها سبب افزایش زمان محاسبات شده است. از این رو می‌توان نتیجه گرفت در سازه‌های کوچک پاره‌سازی چند مرحله‌ای ـ به صورتی که در این روش به کار رفته است ـ کارآیی ندارد.

روش سوم مشابه روش خودانطباق است با این تفاوت که پاره‌سازی چندمرحله‌ای نیز به کاررفته است. در روش مزبور اجزای زیرسازه مومسان نیز از نظر سطح تنش به دو دسته تقسیم شده‌اند و ماتریس سختی زیرسازه مومسان از سوارکردن ماتریس سختی این دو زیرسازه تشکیل می‌شود. نتایج زمانی تحلیل نشان می‌دهد، پاره‌سازی چند مرحله‌ای به این صورت نیز نتوانسته بر سرعت تحلیل بیفزاید. زمان تحلیل در این روش بیش از روش خودانطباق است. با این همه، دو روش پاره‌سازی چندمرحله‌ای ارائه شده از روش سختی اولیه سریعتر تحلیل را به انجام می‌رساند.

در روش چهارم تحلیل غیرخطی به کمک روش پاره‌سازی ـ به شکل ساده ـ مورد بررسی قرارگرفت. در این روش سازه به دو زیرسازه کشسان و مومسان تقسیم شد. زیرسازه مومسان براساس پیش‌بینی نقاط مومسان شونده در آخرین گام بارگذاری مشخص گردید. یادآوری می‌شود در این روش شکل زیرسازه‌ها تا پایان تحلیل ثابت می‌ماند. ماتریس سختی زیرسازه کشسان نیز تا همگرا شدن پاسخ ثابت مانده و ماتریس سختی زیر سازه مومسان، در هر تکرار گام بارگذاری، دوباره بر پا می‌گردد. روش مزبور، به سبب اصلاح ماتریس سختی پاره‌ای از اجزاء، از روش نیوتن رافسون سریعتر می‌باشد. سرعت این روش بستگی به بزرگی زیرسازه مومسان دارد. اگر شکل سازه و بارگذاری وارد بر آن به گونه‌ای باشد که زیرسازه مومسان بسیار کوچکتر از کل سازه باشد، روش مزبور کارآیی زیادتری خواهد داشت. پیش‌بینی زیرسازه مومسان در این روش مشکل بوده و نیاز به تحلیل‌گر مجرب دارد.

مراجع

[۱] سعید برادران همتی؛ پاره‌سازی سازه‌ها، سمینار کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۰.

[۲] محمد رضایی پژند؛ تحلیل کشسان ـ مومسان و برنامه رایانه‌ای آن، نشریه دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، سال چهارم، شماره ۱ و ۲، ۱۳۷۰.

[۳] محمد رضایی‌پژند؛ تحلیل غیرخطی سازه‌ها، گزارش نهایی طرح پژوهشی، دانشگاه فردوسی مشهد، شماره ۷۰، ۱۳۷۰.

[A1] *Anand S.C., Shaw R.H., "Mesh - Refinement And Substructuring Technique In Elastic - Plastic Finite Element Analysis", Computers & Structures, Vol. 11. PP 13-21. 1980.*

[A2] *Alizadeh a., Will G.T., "A Substructured Frontal Solver And Its Application To Localized Material Nonlinearity", Computers & Structures, Vol. 10. PP 225-231., 1979.*

[B1] *Bathe K.J., "Finite Element Procedures In*

Techniques for Finite Element Analysis With Localised Nonlinearity", Finite Element Methods For Nonlinear Problems, Ed. Bergan & Bathe, PP 481-494, 1986.

[M1] *Mc. Guire W., Gallagher R.H., "Matrix Structural Analysis", John Wiley, 1976.*

[M2] *Moore I.D., Ali S., Page A.W., "Substurcturing Technique In Nonlinear Analysis of Brick Masonry Subjected To Concentrated Load", Computers & Structures, Vol. 27, No. 3, PP 417-425, 1987.*

[N1] *Noor A.K., Kamel H.A., Fulton R.E., "Substructuring Techniques - Status And Projections", Computers & Structures, Vol. 8, PP 621-632., 1978.*

[N2] *Nasra M., Nguyen D.T., "An Algorithm For Domain Decomposition In Finite Element Analysis", Computers & Structures, Vol. 39, No. 314, PP 181 - 192., 1985.*

[O1] *Owen D.R.J., Hinton E., "Finite Elements In Plasticity", Pineridge Press Limited. 1980.*

[O2] *Owen D.R.J., Goncalves O.J.A., "Substructuring Techniques In Material Nonlinear Analysis", Computers & Structures, Vol. 15, No. 3, PP 205-213., 1982.*

[P1] *Przemienieck J.S., "Theory Of Matrix Structural Analysis", Mc. Graw Hill, 1968.*

[P2] *Petersson H., Popov E.P., "Subtructuring And Equation System Solutions In Finite Element Analysis", Computers & Structures, Vol. 7, PP 197 - 206, 1977.*

[R1] *Rosen R., Moshe, Robinstein F., "Substructure Analysis By Matrix Decomposition", Journal Of Structural Division, ASCE, PP 663-670. March 1970.*

[R2] *Rourke M., Bizal T., "Optimal Substructuring Schemes", Methods Of Structural Analysis, ASCE, PP 1037-1045, 1976.*

Engineering Analysis", Printce - Hall, 1982.

[C1] *Crisfield M.A., "Non - Linear Finite Element Analysis Of Solids And Structures", John Wiley And Sons, 1991.*

[D1] *Dodds R.H., Lopez L.A., "Substructuring In Linear and Nonlinear Analysis", International journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 15, PP 583-597, 1980.*

[E1] *Elwi A.E., Murray D.W., "Skyline Algorithms For Multilevel Substructure Analysis", International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 21, PP 465-479, 1985.*

[F1] *Farhat C., "A Simple And Efficient Automatic FEM Domain Decomposer" Computers & Structures, Vol. 28, PP 579-602, 1988.*

[G1] *Gurujec C.S., Deshpande V., "An Improved Method of Substructure Analysis", Computers & Structures, Vol. 8, pp 147-152,1978.*

[G2] *Gallagher R.H., "Finite Element Analysis Fundamentals", Printce - Hall, 1975.*

[H1] *Han T.Y., Abel J.F., "Substructure Condensation Using Modified Decomposition", Internationl Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol.20, PP 1959-1964, 1984.*

[H2] *Han T.Y., Abel J.F., Adaptive Substructuring Techniques In Elasto - Plastic Finite Element Analysis", Computers & Structures, Vol. 20, No. 1-3, PP 181-192, 1985.*

[H3] *Han T.Y., "Adaptive Substructuring And Interactive Graphics For Three - Dimensional Elasto - Plastic Finite. Element Analysis", PhD. Dissertation of cornell university, U.S.A., 1984.*

[H4] *Huang J., Wang T.L., "Buckling Analysis of Large And Complex Structures By Using Substructuring Techniques", Computers & Structures, Vol. 46, No. 5, PP 845-850,1993.*

[H5] *Han T.Y., Abel J.F., "Adaptive Substructuring*

PP 489-497, 1989.

[T1] *Thiruvengadam V., "Analysis Of Large Infilled Frames By Substructuring Techniques", Proc. Int. Conf. Finite Elements In Computational Mechanics 2-6, India. PP 143-152, December 1986.*

[W1] *Williams F.W., "Review Of Exact Buckling And Frequency By Calculations With Optional Multi - level Substructuring", Computers & Structures, Vol. 48, No. 3,1993.*

[Z1] *Zienkiewicz O.C., "The Finite Element Method", Tata Mc. Graw Hill, 1977.*

[R3] *Ryu Y.S., Arora J. "Review Of Nonlinear FE Method With Substructures", Journal Of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 111 No. 11, PP 1361 - 1379, November 1985.*

[R4] *Roeck G.De, Vanlaethem M., Sheu C.H., "Multilevel Substructuring In Elasto - Plastic Domain", Computers & Structures, Vol. 31, No. 5, PP 757-765, 1989.*

[S1] *Sheu C.H., Roeck G.De, Laethem M.V, Geyskens P., Multi - Level Substructuring And An Experimental Self - Adaptive Newton - Raphson Method For two - Dimensional Nonlinear Analysis"., Computers & Structures, Vol. 33, No. 2,*