راهکاری برای یافتن تابعهای شکل اجزای مثلّثی

محمّد رضایی پژند — استاد

محمّدحسن فرشچی — کارشناس ارشد

گروه عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

روشهای گوناگون محاسبه تابعهای شکل ناهرمیتی مورد توجه قرار می‌گیرند. همچنین از ناتوانی آنها در آفرینش اجـزای مثلّثـی یاد می‌شود. سپس، روش درک مستقیم رفتار برای محاسبه تابعهای اجزای مثلّثی با گره‌های پیرامونی پیشـنهاد مـی‌گـردد. در ادامـهٔ بحث، شیوهٔ برپایی اجزای با گره‌های درونی گسترش می‌یابد. سرانجام، اجزای آفریده شده از تابعهای مزبور به وسـیله چنـد نمونـهٔ عددی ارزیابی می‌شوند.

کلمات کلیدی

جزء مثلّثی، تابع شکل، ماتریس سختی، جزء مستطیلی، سازگاری، گره، درجه آزادی، مختصات سطحی، اجزای ناهرمیتی.

A Method for Finding Triangular Element Shape Functions

M. Rezaiee-Pajand
Professor

M. H. Farshchi
M.Sc.

Department of Civil Engineering,
Ferdowsi Univerzity of Mashhad

Abstract

Several ways of calculating non-Hermitian shape functions are considered. Also, disabilities of these techniques in generating triangular elements are mentioned. A direct method of behaviour understanding for finding shape functions of triangular element with side nodes is suggested. In addition, this technique is generalized to include internal nodes. Finally, suggested elements with these kinds of shape functions are evaluated numerically.

Keywords

Triangular Element, Shape Function, Stiffness Matrix, Rectangular Element, Compatibility, Node, Degree of Freedom, AREA Coordinates, Non-Hermitian Elements.

مقدمه

بحث تابعهای شکل از همان سالهای نخستین پیدایش فن اجزای محدود مطرح بوده است. روش معمول محاسبهٔ ماتریس سختی، به کار بردن تابعهای شکل جزء است. تابعهای مزبور، تغییر مکان نقطه‌های داخل جزء را به مقدارهای مجهول گرهی پیوند می‌دهند. در حالت کلی برای محاسبه آنها به وارون سازی و ضرب ماتریسی نیاز می‌باشد. استفاده از دستگاه مختصات طبیعی، تا حدودی محاسبه تابعهای مزبور را، به ویژه در اجزای ناهرمیتی، ساده می‌کند.

باید افزود، تابعهای شکل پاره‌ای از اجزای ناهرمیتی را می‌توان بطور مستقیم و بدون نیاز به تابع میدان به دست آورد. نخستین شیوه‌ای که برای محاسبه تابعهای شکل اجزای لاگرانژی به کار رفت، روش تابعهای لاگرانژی می‌باشد. این فن بسیار کلی است و از آن برای یافتن گستره وسیعی از اجزا استفاده می‌شود. تابعهای شکل مزبور از ضرب چند جمله‌ایهای لاگرانژی نتیجه می‌شوند. روش دیگری در سال ۱۹۷۶، به وسیله کارامان‌لیان معرفی شد [1]. این شیوه که روش بازرسی نام دارد، در سه گام به محاسبه تابعهای شکل می‌پردازد. در گامهای یکم و دوم، به ترتیب تابع شکل گره‌های گوشه و میانی به دست می‌آیند. در گام سوم، تابع شکل گره‌های گوشه اصلاح می‌شوند. لیونگ، در سال ۱۹۸۶، روند دیگری به نام تابعهای شکل «معمولی» ارائه کرد [2]. استفاده از تابعهای لاگرانژی اساس کار این فن می‌باشد. برتری این شیوه در توانایی خودکارسازی آن است. باید افزود رابطه‌سازی اجزای هرمیتی نیز در این روش پیش‌بینی شده است. استفاده از جزءهای لاگرانژی برای رسیدن به تابعهای شکل جزءهایی که گره کمتری دارند، به روش «کاهش مرتبه» معروف است. کریشنامورتی، در سال ۱۹۸۷، با به‌کار بردن این شیوه و استفاده از جزء شش گرهی، تابعهای شکل اجزای چهار و پنج گرهی را تعیین نمود [3].

تابعهای شکل اجزای مستطیلی با گره‌های پیرامونی، به شیوه‌های گوناگونی محاسبه می‌شوند. روش بررسی مستقیم گره‌ها که در سال ۱۹۷۷، به وسیله زینکویچ معرفی شد، یکی از آنها می‌باشد [4]. در این فن، تابع شکل هر گره از حاصلضرب خطهای گذرنده از سایر گره‌ها به دست می‌آید. در سال ۱۹۸۰، بال با استفاده از تابعهای شکل اجزای لاگرانژی، به ارائه جزءهای مستطیلی با گره‌های پیرامونی پرداخت [5]. او برای انجام این کار، معادله‌های مربوط به مقدارهای گرهی درونی را برابر صفر قرار داد. پس از آن، در سال ۱۹۸۳، سی‌تی‌پی‌تیگلو تابعهای شکل جزءهای سرندیپیتی «کلی» را ارائه کرد [6]. این اجزا دارای رفتار خطی درجه دو و سه، بر روی مرزها هستند. برای این منظور نخست تابعهای شکل اجزای یک بعدی پایه‌ای نوشته می‌شوند. سطحهای پایه‌ای که برای محاسبه تابعهای شکل دو بعدی مورد نیاز هستند، از ضرب تابعهای شکل جزءهای یک بعدی مزبور محاسبه می‌گردند.

روش ترکیب خطی تابعهای درونیاب پهلوها، در سال ۱۹۸۶، توسط ال-زفرانی و همکارش ارائه شد [7]. این شیوه برای محاسبه تابعهای اجزای مستطیلی سرندیپیتی کاربرد دارد. راهکار مزبور حالت گسترش یافته‌ای از روش زلامال است که در سال ۱۹۷۳ معرفی گردید [8]. همچنین این پژوهشگران روش رویهم‌گذاری را برای محاسبه تابعهای اجزای هرمیتی و ناهرمیتی کلی ارائه نمودند. خاطرنشان می‌شود، این فن در اجزای مرتبه بالا، پاسخهای تقریبی ارائه می‌دهد. افزون بر اینها، تابعهای شکل اجزای هرمیتی با شبکه منظمی از گره‌ها نیز پیشنهاد شده‌اند.

تابعهای شکل، از اساسی‌ترین نیازیهای روش اجزای محدود هستند. در واقع تابع شکل سهم هر درجه آزادی را به صورت جداگانه در رفتار جزء مشخص می‌نماید. باید دانست درجه‌های آزادی یک جزء، می‌توانند خود تابع میدان و مشتقهای گوناگون آن باشند. از این‌رو اجزا براساس نوع درجه‌های آزادی، به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول، اجزای ناهرمیتی هستند. درجه‌های آزادی در این اجزا، از جنس تابع میدان و نه مشتق آن می‌باشند. باید افزود تابعهای شکل این اجزا، تابعهای ناهرمیتی نامیده می‌شوند. دسته دوم اجزای هرمیتی هستند که درجه‌های آزادی آنها، مجموعه‌ای از تابع میدان و مشتق آن را تشکیل می‌دهند.

پیدا کردن این تابعها از مهمترین کارهای برپاسازی رابطه‌های جزء محدود است. باید آگاه بود روشهای محاسبه تابعهای اجزای مستطیلی با گره‌های موردنیاز تا حدود زیادی گسترش یافته‌اند. همچنین پاره‌ای از راهکارهای مزبور قابل خودکار سازی می‌باشند. در مورد اجزای مثلثی، این کار به اجزای ویژه‌ای محدود می‌گردد. به سخن دیگر، روشهای موجود تنها توانایی برپایی تابعهای اجزای لاگرانژی را به صورت خودکار دارند. خاطر نشان می‌کند استفاده از اجزای لاگرانژی درجه بالا به دلیل وجود گره‌های درونی فراوان، اقتصادی نمی‌باشد.

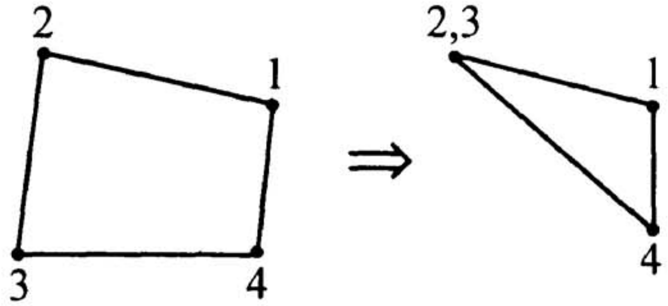
از سوی دیگر، برتری شکل جزء مثلّثی برای سازگاری بهتر با هر نوع مرز دلخواه، استفاده از آن را در روش اجـزای محـدود افزایش داده است. با وجود این به دلیل در دست نبودن روشهای کلی محاسبه تابع شکل این اجزا، تا کنون شـمار محـدودی از آنها گسترش یافته‌اند. در این مقاله نخست ناتوانایی شیوه‌های موجود محاسبه اجزای مثلّثی مورد بحث قرار مـی‌گـیرند. سـپس یک روش جدید پیشنهاد می‌گردد. باید افزود شیوه پیشنهادی توانایی محاسبه تابعهای شکل جزء با گره‌های مورد نیـاز را دارد. همچنین با این فن امکان برپایی خودکار تابعهای شکل، به ویژه برای اجزای سرندیپیتی فراهم خواهد شد.

اجزای مثلّثی با گره‌های پیرامونی

اجزای با گره‌های پیرامونی که شامل درجه‌های آزادی تابع میـدان هسـتند، بـه اجـزای سـرندیپیتی مشـهوراند. ایـن اجـزا نخستین بار توسط آیرونز معرفی شدند [۹] تاکنون روشهای مختلفی برای برپایی تابعهای شکل این گونه جزءها ارائـه گردیـده است. باید دانست از میان تمام روشهای محاسبه تابع شکل، تعدادی تنها توانایی بـرپاسـازی اجـزای سـرندیپیتی مسـتطیلی را دارند. شمار دیگر نیز فقط می‌توانند تابعهای شکل اجزای مثلّثی درجه پایین را ارائه دهند. در ادامه بحث شـیوه‌های گونـاگـون موجود برای ارائه تابعهای شکل اجزای سرندیپیتی مثلّثی مورد توجه قرار می‌گیرند و ناتوانایی‌های آنها در ارائه تابعـهای شـکل، مشخص می‌شود. پس از آن روش پیشنهادی به نظر خوانندگان می‌رسد. شایان توجه است شیوه «درک مستقیم رفتار»، توانایی ارائه تابعهای شکل اجزای مورد نظر را بدون هیچگونه محدودیتی دارا است. همچنین در این روش امکان خودکارسازی که یکی از هدفهای اصلی تحلیلگران می‌باشد وجود دارد.

یکی از فنهای یافتن تابعهای شکل اجزای با گره‌های پیرامونی، روش غیرمستقیم می‌باشد. مهمترین مسأله در شیوه مزبـور، انتخاب جمله‌های تابع میدان است. یادآوری باید کرد، انتخاب این جمله‌ها به محل قرارگـیری و شـمار گره‌هـای جـزء وابسـته می‌باشد. در حقیقت تابع میدان انتخابی باید بتواند شرطهای کامل بودن و همچنین پیوستگی C^0 را در مرزها برپا نمـاید. بـاید آگاه بود، برای اجزای درجه سه و بالاتر حدس جمله‌های تابع میدان دشوار است و نمی‌توان آن را به آسانی یافت.

با فن بازرسی نیز می‌توان تابعهای شکل اجزای با گره‌های پیرامونی را یافت. بسیاری از اجزای سرندیپیتی، نخسـتین بـار بـا این شیوه رابطه‌سازی شده‌اند. هر چند از این راهکار به عنوان روشی کلی برای محاسبه تابعهای شکل اجزای با گره‌های دلخـواه نام برده‌اند، با این حال این فن تنها توانایی ایجاد تابعهای شکل اجزای مستطیلی را دارد. در حقیقت در این راهکار باید تابعهای شکل گره‌های میان‌پهلویی از پیش معلوم باشند. این کار در اجزای مثلّثی مرتبه بالا به آسانی انجام‌پذیر نیست. از سـوی دیگـر، تابعهای شکل به دلیل وجود پیچیدگی روش، به صورت مستقیم ارائه نمی‌شوند. این ویژگی سبب دشواری خودکارسازی شـیوه مزبور می‌گردد.



شکل (۱) نابودسازی یک پهلوی چهار پهلو.

باید دانست برای تابعهای شکل گره‌های میان پهلویی، چندجمله‌ایهای بی‌شماری با درجه مشابه می‌توان در نظر گرفـت. در واقع این تابعها باید شرطهای سازگاری را برقرار کنند و همچنین در گره مورد نظر مقدار یک و در سـایر گره‌هـا مقـدار صفـر را اختیار نمایند. افزون بر اینها در اجزای مثلّثی پیوند ویژه‌ای بین پهلوهای سه گانه وجـود دارد و نبـاید رفتـار تابعـهای شـکل را بدون منظور نمودن این اثر ویژه رابطه سازی نمود. خـاطر نشـان می‌کنـد، بـه دلیـل وجـود پـهلوهای عمـود برهـم در اجـزای

مستطیلی و پیچیده نبودن اثرهای آنها بر یکدیگر، تابعهای گره‌های میانی این اجزا باسانی قابل محاسبه هستند. در حالیکه پیچیدگی این اثر، سبب گسترش نیافتن تابعهای شکل اجزای مثلّثی شده است. در نتیجه تاکنون تنها اجزای محدود مثلّثی درجه پایین و یا لاگرانژی به وسیله پژوهشگران پیشنهاد شده‌اند.

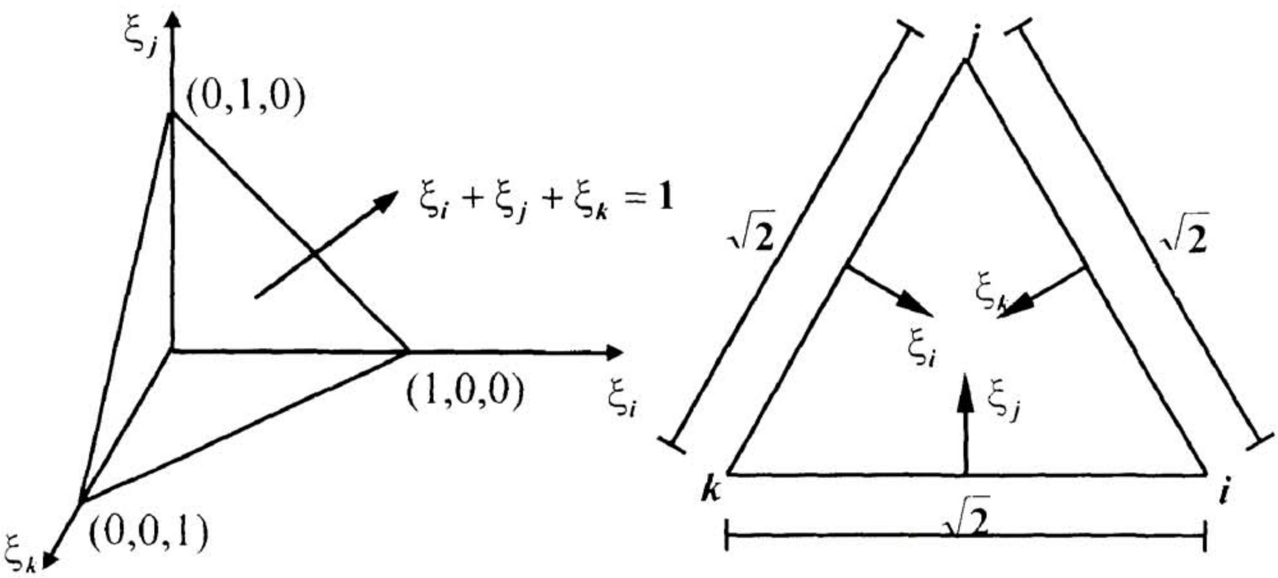
براساس رابطه‌های اجزای غیر منتظم، می‌توان پاره‌ای از اجزای مثلّثی را رابطه سازی نمود [10]. به سخن دیگر، یک جزء مثلّثی را می‌توان به عنوان یک جزء چهار پهلوی غیر منتظم در نظر گرفت. این راهکار نابودسازی نام دارد. در فرآیند نابودسازی، دو گره گوشه - همانند شکل (۱) - بر روی هم قرار می‌گیرند.

از روش کاهش مرتبه برای محاسبه تابعهای شکل اجزای مرتبه پایینتر بهره می‌جویند. به سخن دیگر، این روش درست برخلاف شیوه بازرسی عمل می‌کند و تابعهای شکل جزء مورد نظر، به صورت ترکیب خطی تابعهای جزء مرتبه بالاتر محاسبه می‌گردند. خاطر نشان می‌نماید، اگر چه به لحاظ نظری با این شیوه می‌توان تابعهای هر نوع جزئی را ایجاد نمود، ولی پاره‌ای از دشواریها عملکرد آن را محدود می‌سازد. نخست آنکه تابعهای شکل اجزای مرتبه بالاتر باید محاسبه گردند. از اجزای مرتبه بالا تنها تابعهای شکل اجزای لاگرانژی در دسترس می‌باشند. همچنین پیدا کردن ضریبهای تابعهای شکل اجزای مزبور در ترکیب خطی مورد نظر دشوار است. از عیبهای دیگر این راهکار، ناتوانی در خودکارسازی مناسب آن می‌باشد. به سخن دیگر، این فن به گونه‌ای اجرا می‌شود که نمی‌توان باسانی تابعهای شکل را با رایانه ایجاد نمود.

روش درک مستقیم رفتار

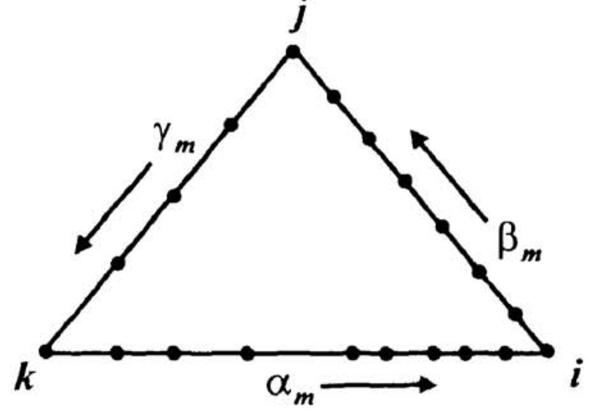
اینک نویسندگان روش خود را پیشنهاد می‌کنند. با این شیوه تابعهای شکل اجزای مثلّثی با گره‌های پیرامونی محاسبه می‌گردند. اساس کار بر درک مستقیم رفتار تابعهای شکل گره‌های میان پهلو و استفاده از روش بازرسی استوار است. رفتار این تابعهای شکل به دلیل نبودن گره‌های درونی، تنها مؤثر از خمهای واقع بر پهلوهای جزء می‌باشد. از این نکته برای برپایی تابعهای درونیاب گرهی مختلف استفاده می‌شود. با رابطه‌های پیشنهادی می‌توان تابع شکل گره‌های گوناگون مثلّث را بطور مستقیم به دست آورد. باید افزود این رابطه‌ها قابل خودکار سازی هستند و می‌توان از آنها در نرم افزارهای اجزای محدود بهره گرفت. در ادامه روند یافتن رابطه‌های مزبور درج خواهد شد.

در این شیوه از دستگاه مختصات طبیعی استفاده می‌شود. همانند شکل (۲)، جزء مورد نظر می‌تواند به یک مثلّث با پهلوهای برابر نگاشت گردد. طول هر پهلوی این مثلّث در مختصات سطحی برابر با $\sqrt{2}$ می‌باشد.



شکل (۲) جزء مثلّثی در دستگاه مختصات سطحی.

برای آسان کردن فرآیند رابطه‌سازی و دسترسی آسان به گره‌های هر پهلو، قرار داد شکل (۴) به کـار مـی‌رود. عـامل α_m ، شمار گره‌های پهلوی ik را نشان می‌دهد. به سخن دیگر، در این روش هر کدام از گره‌های مزبور، شـماره‌ای بیـن یـک تـا α_m دارند. نشانه $\leftarrow$ جهت شماره‌گذاری این گره‌ها را مشخص می‌کند. بطوریکه گره k، شماره یک و گره i، شـماره α_m را در اختیار دارند. تعریفهای مشابهی برای مقدارهای β_m و γ_m به کار می‌روند. بـاید دانسـت در ایـن روش تابعـهای شـکل گره‌هـای گوشه و میان پهلو بطور جداگانه رابطه‌سازی می‌شوند. در ادامه نخست چگونگی محاسبه تابع شکل گره‌هـای میـان پـهلو ارائـه می‌گردد.



شکل (٤) قرار داد شماره گذاری گره‌های هر پهلو.

تابع شکل گره میان پهلو

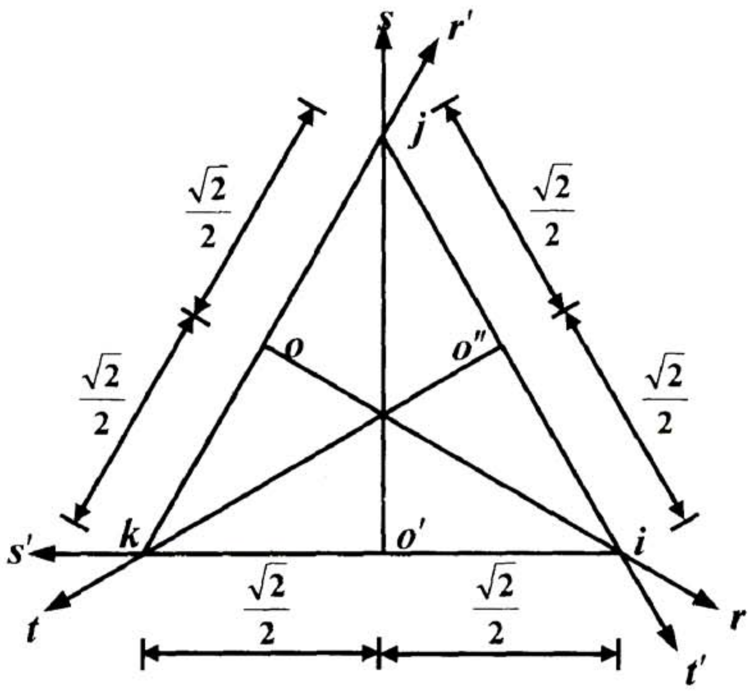
یادآوری می‌کند تابعهای شکل اجزای سرندیپیتی در اثر تغییر مکان گره‌های مرزی ایجاد می‌شوند. در واقع مقدار یک تـابع شکل در روی پهلوی دارای گره مربوطه، خمی است که در گره‌های آن پهلو بجز گره مورد نظر صفر می‌باشد. چنانچه شمار این گره‌ها برابر n باشد، این خم دارای درجه $n-1$ است. باید دانست خم مورد بحث باید بگونه یکتایی مشخص گـردد. همچنیـن به دلیل نبودن گره‌های درونی رفتار تابع شکل در داخل مثلّث به صورت درجه دو تغییر می‌نماید تا تابعهای شکل مزبـور در دو پهلوی دیگر مثلّث، مقدار صفر را اختیار کنند. شایان توجه است، اثرپذیری رفتار تابع شکل از خمهای روی سـه پـهلوی مثلّـث، سبب ایجاد تغییرات درجه دو در درون آن می‌گردد. برای آشنایی بیشتر رفتار تابع شکل گره میان پهلوی q، در شـکل (۵) بـه نمایش در می‌آید. تابع شکل گره q در پهلوی ik، با $N_{ik,q}$ نشان داده می‌شود. برای رابطه سازی تابع شکل بـاید رفتـار آن در دو محور عمود بر هم مشخص باشد. بنابراین از شکل (۳) دستگاه مختصات $so's'$ مورد استفاده قرار می‌گـیرد. بـر ایـن اسـاس تابع شکل گره مورد نظر به وسیله رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_{ik,q} = \frac{\xi_i \times \xi_k}{\xi_{i,q} \times \xi_{k,q}} L_q^{\alpha_m - 1}(s') \qquad (۲)$$

$$L_q^{\alpha_m - 1}(s') = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^{\alpha_m} \frac{(s' - s'_p)}{(s'_q - s'_p)} \qquad (۳)$$

عامل $L_q^{\alpha_m - 1}(s')$، همان تابع لاگرانژی یک بعدی می‌باشد. این تابع به همراه ضریب $\frac{\xi_i \times \xi_k}{\xi_{i,q} \times \xi_{k,q}}$، یک خم یکتا در پـهلوی ik ایجاد می‌کنند و در سایر پهلوها صفر می‌شوند. مقدار مختصه‌های سطحی ξ_i و ξ_k در گره q ، بـا $\xi_{i,q}$ و $\xi_{k,q}$ نشـان داده شده‌اند. آشکار می‌باشد تابع شکل موردنظر در گره q مقدار یک را اختیار می‌نماید. باید افزود رابطه‌های مزبور کلی است و برای هر تعداد گره میانی کاربرد دارد. با وجود این برای نمایش مناسب تابع شکل از گره‌های محدودی در شـکل (۵) اسـتفاده شـده است. اینک با جایگذاری رابطه موجود بین مختصات سطحی و متعامد در معادله (۲) می‌توان نوشت:

خاطر نشان می‌کند، برای رابطه سازی تابع شکل دو بعدی دانستن رفتار آن تابع در دو محور عمود بـر هـم کـافی اسـت. از این رو دستگاه‌های مختصات عمود بر هم در درون مثلّث به صورت زیر تعریف می‌شوند:



شکل (۳) دستگاه‌های مختصات عمود بر هم در درون مثلّث.

کلیهٔ این دستگاه‌ها، متعامد دوبعدی می‌باشند. براین اساس مثلّث مزبور با مختصات گوشه‌های زیر تعریف می‌شود:

$$ror' \text{ دستگاه} : i\left[\frac{\sqrt{6}}{2},0\right],\ j\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ k\left[0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

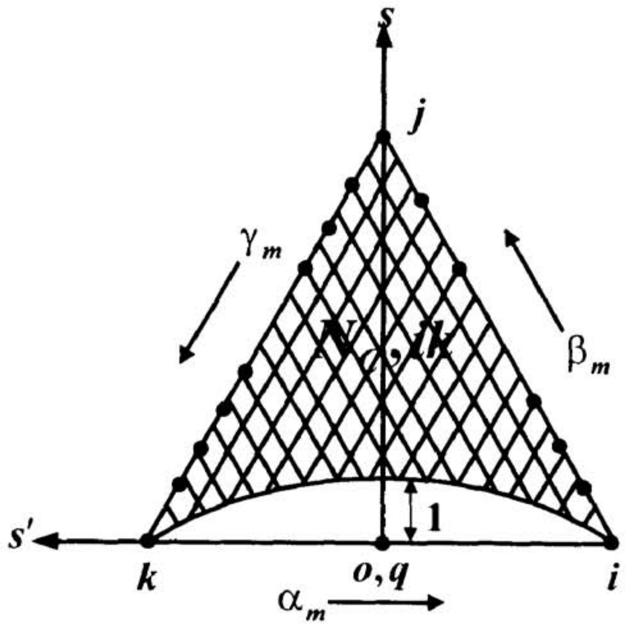
$$so's' \text{ دستگاه} : i\left[0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ j\left[\frac{\sqrt{6}}{2},0\right],\ k\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$to''t' \text{ دستگاه} : i\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ j\left[0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ k\left[\frac{\sqrt{6}}{2},0\right]$$

از سوی دیگر رابطه‌های موجود بین مختصات سطحی و عمودی چنین به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &ror' \text{ دستگاه} : r=\frac{\sqrt{6}}{2}\xi_i\ ,\ r'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\xi_j-\xi_k\right)\\ &so's' \text{ دستگاه} : s=\frac{\sqrt{6}}{2}\xi_j\ ,\ s'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\xi_k-\xi_i\right)\\ &to''t' \text{ دستگاه} : t=\frac{\sqrt{6}}{2}\xi_k\ ,\ t'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\xi_i-\xi_j\right)\end{aligned} \tag{۱}$$

$$N_{ik,q} = \frac{\xi_i \, \xi_k}{\xi_{i,q} \, \xi_{k,q}} L_q^{\alpha_m - 1}\left(\xi_k - \xi_i\right) \quad ; \quad 2 \le q \le \alpha_m - 1 \tag{۴}$$



شکل (۵) نمایش تابع شکل گره میان پهلوی q.

به همین ترتیب، تابع شکل گره‌های سایر پهلوها به دست می‌آیند:

$$N_{ij,q} = \frac{\xi_i \, \xi_j}{\xi_{i,q} \, \xi_{j,q}} L_q^{\beta_m - 1}\left(\xi_i - \xi_j\right) \quad ; \quad 2 \le q \le \beta_m - 1 \tag{۵}$$

$$N_{jk,q} = \frac{\xi_j \, \xi_k}{\xi_{j,q} \, \xi_{k,q}} L_q^{\gamma_m - 1}\left(\xi_j - \xi_k\right) \quad ; \quad 2 \le q \le \gamma_m - 1 \tag{۶}$$

تابع شکل گره گوشه

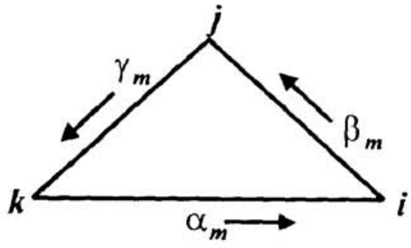
برای محاسبه تابعهای شکل گوشه‌ها می‌توان از روش بازرسی بهره جست. از خوبیها و کاستیهای این فن، در بخشهای پیشین سخن به میان آمد. همچنین آشکار گردید که ناتوانی این راهکار در ارائه تابعهای اجزای مثلّثی به دلیل در دسترس نبودن تابعهای گره‌های میانی می‌باشد. اکنون که تابعهای شکل مزبور تعیین و مشخص شدند، می‌توان تابعهای گره‌های گوشه را نیز به‌دست آورد.

برای آشکار شدن فن، بار دیگر جزء مثلّثی شکل (۴) مورد توجه قرار می‌گیرد. خاطر نشان می‌کند شمار گره‌های میان پهلوی این جزء برابر $\alpha_m + \beta_m + \gamma_m - 6$ است. براساس روش بازرسی تابع شکل گره گوشه i به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$N_i = \xi_i - \sum_{q=1}^{M} \xi_{i,q} N_q \tag{۷}$$

$$M = \alpha_m + \beta_m + \gamma_m - 6 \quad (۸)$$

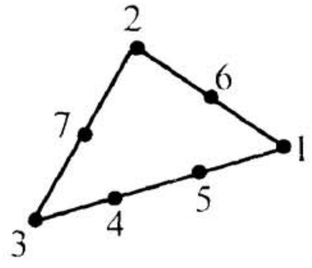
تابع شکل گره گوشه i، با N_i مشخص شده است. سایر عاملهای رابطه کنونی پیشتر معرفی شدند. تابعهای شکل گره‌های گوشه دیگر همانند گره گوشه i خواهند بود. براین اساس تابعهای شکل کلی برای جزء مثلّثی سرندیپیتی با گره‌های دلخواه به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شوند:



$$N_i = \xi_i - \sum_{q=1}^{M} \xi_{i,q} N_q$$
$$N_j = \xi_j - \sum_{q=1}^{M} \xi_{j,q} N_q$$
$$N_k = \xi_k - \sum_{q=1}^{M} \xi_{k,q} N_q$$
$$N_{ij,q} = \frac{\xi_i\,\xi_j}{\xi_{i,q}\,\xi_{j,q}} L_q^{\beta_m-1}(\xi_i - \xi_j) \quad ; \quad 2 \le q \le \beta_m - 1$$
$$N_{jk,q} = \frac{\xi_j\,\xi_k}{\xi_{j,q}\,\xi_{k,q}} L_q^{\gamma_m-1}(\xi_j - \xi_k) \quad ; \quad 2 \le q \le \gamma_m - 1$$
$$N_{ik,q} = \frac{\xi_i\,\xi_k}{\xi_{i,q}\,\xi_{k,q}} L_q^{\alpha_m-1}(\xi_k - \xi_i) \quad ; \quad 2 \le q \le \alpha_m - 1$$
$$L_q^{n-1}(x) = \prod_{\substack{p=1 \\ p\neq q}}^{n} \frac{(x - x_p)}{(x_q - x_p)} \quad (۹)$$

خاطر نشان می‌کند، تابعهای شکل در این رابطه‌ها به گونه‌ای محاسبه شده‌اند که در گره مورد نظر مقدار یک و در سایر گره‌ها، مقدار صفر را اختیار کنند. همچنین می‌توان نشان داد مجموع تابعهای شکل هر نوع جزء که از رابطه‌های کنونی به دست می‌آیند برابر یک می‌باشد. افزون بر اینها تابعهای مزبور شرطهای سازگاری را در مرزها بطور کامل برقرار می‌کنند. نکته دیگر درباره تابعهای پیشنهادی، توانایی خودکار سازی آنها می‌باشد. به سخن دیگر، تابعهای جزء مثلّثی با گره‌های دلخواه، می‌توانند بطور مستقیم و به وسیله رایانه، با بهره‌گیری از رابطه‌های (۹) ایجاد شوند. اینک برای آشنایی بیشتر تابعهای شکل دو نمونه جزء مثلّثی محاسبه و به نظر خوانندگان می‌رسند:

جزء هفت گرهی انتقالی:

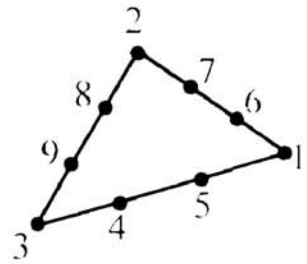


$$N_1 = \xi_1 - \sum_{i=4}^{7} \xi_{1,i} N_i$$
$$N_2 = \xi_2 - \sum_{i=4}^{7} \xi_{2,i} N_i$$
$$N_3 = \xi_3 - \sum_{i=4}^{7} \xi_{3,i} N_i$$
$$N_4 = \frac{27}{4}\xi_1\xi_3\left[\xi_3 - \xi_1 + \frac{1}{3}\right]$$
$$N_5 = \frac{27}{4}\xi_1\xi_3\left[\xi_1 - \xi_3 + \frac{1}{3}\right]$$
$$N_6 = 4\xi_1\xi_2$$

$$N_7 = 4\xi_2\xi_3$$
$$\sum_{i=1}^{7} N_i = 1 \tag{10}$$

۲- جزء نه گرهی سرندیپیتی:

$$N_1 = \xi_1 - \sum_{i=4}^{9}\xi_{1,i}N_i$$
$$N_2 = \xi_2 - \sum_{i=4}^{9}\xi_{2,i}N_i$$
$$N_3 = \xi_3 - \sum_{i=4}^{9}\xi_{3,i}N_i$$
$$N_4 = \frac{27}{4}\xi_1\xi_3\left[\xi_3 - \xi_1 + \frac{1}{3}\right]$$
$$N_5 = \frac{27}{4}\xi_1\xi_3\left[\xi_1 - \xi_3 + \frac{1}{3}\right]$$
$$N_6 = \frac{27}{4}\xi_1\xi_2\left[\xi_1 - \xi_2 + \frac{1}{3}\right]$$
$$N_7 = \frac{27}{4}\xi_1\xi_2\left[\xi_2 - \xi_1 + \frac{1}{3}\right]$$
$$N_8 = \frac{27}{4}\xi_2\xi_3\left[\xi_2 - \xi_3 + \frac{1}{3}\right]$$
$$N_9 = \frac{27}{4}\xi_2\xi_3\left[\xi_3 - \xi_2 + \frac{1}{3}\right]$$
$$\sum_{i=1}^{9} N_i = 1 \tag{11}$$



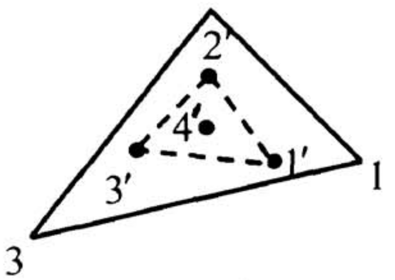
باید افزود، تابعهای شکل اجزای مثلّثی با گره‌های پیرامونی درجه پایین با بهره‌گیری از سایر شیوه‌ها نیز قابل دستیابی‌اند. با وجود این، فنهای مزبور نمی‌توانند برای اجزای با بیش از سه گره در هر پهلو مورد استفاده قرار گیرند. روش درک مستقیم رفتار، نه تنها تابعهای شکل اجزای درجه پایین را بطور کامل به دست می‌دهد، بلکه توانایی محاسبه تابعهای شکل اجزای درجه بالاتر را نیز دارد.

اجزای مثلّثی با گره‌های درونی

پیش از این اشاره شد اجزای با گره‌های درونی در مقایسه با اجزای سرندیپیتی با همان تعداد گره از عملکرد ضعیفتری برخوردارند. با وجود این افزودن هوشمندانه گره‌های درونی به همراه ترکیب مناسبی از گره‌های پیرامونی می‌تواند اجزای مطلوب و کاملی را ایجاد نماید. به عنوان نمونه می‌توان به اجزای مثلّثی لاگرانژی با چند جمله‌ای درونیاب کامل اشاره کرد. این نکته بر اهمیت مطالعه و بررسی اجزای با گره‌های مزبور می‌افزاید. در این بخش روش پیشین برای اجزای دارای ترکیبهای دلخواه از گره‌های درونی و پیرامونی گسترش می‌یابد. به سخن دیگر برای افزودن گره‌های درونی به اجزای سرندیپیتی، از فن بازرسی استفاده می‌گردد. خاطر نشان می‌کند پیش از این از ناتوانی شیوه غیر مستقیم در ارائه تابع میدان اجزای سرندیپیتی سخن به میان آمد. به همین ترتیب باید ناکارآیی این فن را برای محاسبه تابعهای شکل اجزای با گره‌های درونی به خاطر سپرد. باید آگاه بود به جز روش بازرسی سایر فنها نمی‌توانند تابعهای شکل اجزای مزبور را به دست دهند.

براساس روش بازرسی، محاسبه تابعهای شکل اجزای با گره‌های درونی نیازمند تابعهای شکل گره‌های موردنظر می‌باشد. یادآوری می‌کند از میان ترکیبهای متفاوت گره‌های درونی، تابعهای شکل اجزای لاگرانژی در دسترس می‌باشند. به نظر می‌رسد همین تعداد از ترکیبهای گره‌های درونی بتواند نیاز پژوهشگران را برای ارائه اجزای مورد نظر برآورد. با وجود این برای کلی نمودن بحث ترکیبهای دیگری نیز مورد توجه قرار می‌گیرند.

از حالتهای متداول ترکیب گره‌های درونی، قرار داشتن این گره‌ها در داخل و روی مرزهای مثلّث دیگری در درون جزء است. پهلوهای این مثلّث در حالت کلی با پهلوی جزء مثلّثی موازی نیستند. می‌توان مثلّث درونی را به عنوان یک جزء مثلّثی در نظر گرفت و تابعهای شکل گره‌های آن را در دستگاه مختصات سطحی محلی به دست آورد. دستگاه مختصات محلی نسبت به پهلوهای مثلّث درونی در نظر گرفته می‌شود. سپس تابعهای شکل در دستگاه مختصات سطحی اصلی به دست می‌آیند. باید دانست در هر حال تابعهای شکل گره‌های درونی در مرزهای جزء، مقدار صفر دارند. براین اساس رابطه‌های به دست آمده در جمله $\alpha_1\xi_1\xi_2\xi_3$ ضرب می‌شوند. ضریب α_1 با توجه به شرط یک شدن مقدار تابع شکل در گره مربوطه تعیین می‌گردد. به‌عنوان نمونه، جزء شکل (۶) مورد توجه قرار می‌گیرد.



شکل (٦) جزء مثلّثی با گره‌های درونی.

گره $4'$، در مرکز سطح مثلّث درونی قرار دارد. همچنین برای گره‌های گوشه این مثلّث مختصات معلوم زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$1'\left(\xi_{1,1'},\xi_{2,1'},\xi_{3,1'}\right),\ 2'\left(\xi_{1,2'},\xi_{2,2'},\xi_{3,2'}\right),\ 3'\left(\xi_{1,3'},\xi_{2,3'},\xi_{3,3'}\right)$$

مختصه سطحی i از گره j در دستگاه مختصات اصلی با $\xi_{i,j}$ مشخص شده است. با استفاده از شیوه کاهش مرتبه، تابعهای شکل گره‌های مثلّث درونی در دستگاه مختصات محلی به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} n'_{1'} &= \xi_{1'}\left(1-9\xi_{2'}\xi_{3'}\right)\\ n'_{2'} &= \xi_{2'}\left(1-9\xi_{1'}\xi_{3'}\right)\\ n'_{3'} &= \xi_{3'}\left(1-9\xi_{1'}\xi_{2'}\right)\\ n'_{4'} &= 27\xi_{1'}\xi_{2'}\xi_{3'} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

برای محاسبه این تابعهای شکل در مختصات سطحی اصلی به رابطه‌های انتقال نیاز است. در ادامه چگونگی رابطه‌سازی آنها به نظر خوانندگان می‌رسد. با توجه به جزء شکل (۶)، هر نقطه از مثلّث درونی در دستگاه‌های محلی و اصلی قابل تعریف است. براین اساس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x = x_{1'}\xi_{1'} + x_{2'}\xi_{2'} + x_{3'}\xi_{3'}\\ y = y_{1'}\xi_{1'} + y_{2'}\xi_{2'} + y_{3'}\xi_{3'} \end{cases} \tag{۱۳}$$

$$\begin{cases} x = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \\ y = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 \end{cases} \qquad (۱۴)$$

مختصه‌های دکارتی گره‌های $1'$ ، $2'$ و $3'$ ، با $x_{1'}$ ، ... و $y_{3'}$ ، مشخص شده‌اند. این مقادیر، برحسب مختصه‌های دکارتی گره‌های 1 ، 2 و 3 ، قابل محاسبه هستند:

$$\begin{cases} x_{1'} = x_1\xi_{1,1'} + x_2\xi_{2,1'} + x_3\xi_{3,1'} \\ x_{2'} = x_1\xi_{1,2'} + x_2\xi_{2,2'} + x_3\xi_{3,2'} \\ x_{3'} = x_1\xi_{1,3'} + x_2\xi_{2,3'} + x_3\xi_{3,3'} \end{cases} \qquad (۱۵)$$

رابطه‌های مشابهی نیز برای مختصه دکارتی y می‌توان نوشت. با جایگذاری رابطه‌های (۱۵) در (۱۳) و هم ارز قرار دادن با (۱۴)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_{1,1'}\xi_{1'} + \xi_{1,2'}\xi_{2'} + \xi_{1,3'}\xi_{3'} \\ \xi_2 = \xi_{2,1'}\xi_{1'} + \xi_{2,2'}\xi_{2'} + \xi_{2,3'}\xi_{3'} \\ \xi_3 = \xi_{3,1'}\xi_{1'} + \xi_{3,2'}\xi_{2'} + \xi_{3,3'}\xi_{3'} \end{cases} \qquad (۱۶)$$

می‌توان رابطه‌های (۱۶) را به شکل زیر تغییر داد:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_{1,1'}\xi_{1'} + \xi_{1,2'}\xi_{2'} + \xi_{1,3'}\xi_{3'} \\ \xi_2 = \xi_{2,1'}\xi_{1'} + \xi_{2,2'}\xi_{2'} + \xi_{2,3'}\xi_{3'} \\ 1 = \xi_{1'} + \xi_{2'} + \xi_{3'} \end{cases} \qquad (۱۷)$$

با حل دستگاه معادله (۱۷)، رابطه‌های زیر نتیجه می‌گردند:

$$\begin{cases} \xi_{1'} = \dfrac{1}{2A'}\left[a_{1'} + b_{1'}\xi_1 + c_{1'}\xi_2\right] \\ \xi_{2'} = \dfrac{1}{2A'}\left[a_{2'} + b_{2'}\xi_1 + c_{2'}\xi_2\right] \\ \xi_{3'} = \dfrac{1}{2A'}\left[a_{3'} + b_{3'}\xi_1 + c_{3'}\xi_2\right] \end{cases} \qquad (۱۸)$$

$$\begin{aligned} &A' = \xi_{1,1'}\xi_{2,2'} + \xi_{1,2'}\xi_{2,3'} + \xi_{1,3'}\xi_{2,1'} - \xi_{1,1'}\xi_{2,3'} - \xi_{1,2'}\xi_{2,1'} - \xi_{1,3'}\xi_{2,2'} \\ &a_{1'} = \xi_{1,2'}\xi_{2,3'} - \xi_{1,3'}\xi_{2,2'} \ , \ a_{2'} = \xi_{1,3'}\xi_{2,1'} - \xi_{1,1'}\xi_{2,3'} \ , \ a_{3'} = \xi_{1,1'}\xi_{2,2'} - \xi_{1,2'}\xi_{2,1'} \\ &b_{1'} = \xi_{2,2'} - \xi_{2,3'} \ , \ b_{2'} = \xi_{2,3'} - \xi_{2,1'} \ , \ b_{3'} = \xi_{2,1'} - \xi_{2,2'} \\ &c_{1'} = \xi_{1,3'} - \xi_{1,2'} \ , \ c_{2'} = \xi_{1,1'} - \xi_{1,3'} \ , \ c_{3'} = \xi_{1,2'} - \xi_{1,1'} \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری معادله‌های (۱۹) در (۱۸)، رابطه‌های انتقال به دست می‌آیند. در رابطه‌های (۱۸)، صورت کسر معادله خط روبرو به گره گوشه‌ای است که مختصه سطحی آن مورد نظر می‌باشد. همچنین مخرج کسر مقدار معادله مزبور را در آن گره نشان می‌دهد. بنابراین با تعیین مختصات اصلی گره‌های گوشه مثلّث درونی رابطه‌های انتقال باسانی ایجاد می‌گردند. این رابطه‌ها می‌توانند به صورت دیگری نوشته شوند:

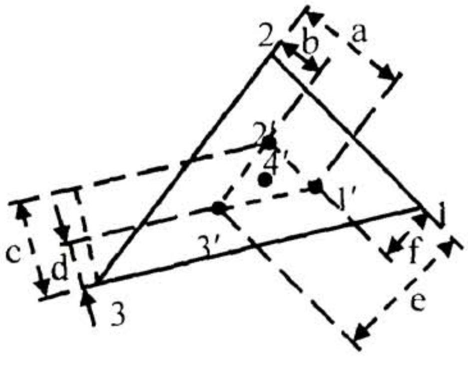
$$\begin{cases} \xi_{1'} = \dfrac{f_{2'3'}(\xi_2, \xi_3)}{f_{2'3'}(\xi_{2,1'}, \xi_{3,1'})} \\ \xi_{2'} = \dfrac{f_{1'3'}(\xi_1, \xi_3)}{f_{1'3'}(\xi_{1,2'}, \xi_{3,2'})} \\ \xi_{3'} = \dfrac{f_{1'2'}(\xi_1, \xi_2)}{f_{1'2'}(\xi_{1,3'}, \xi_{2,3'})} \end{cases} \qquad (۲۰)$$

معادله خط گذرنده از گره‌های i' و j'، با $f_{i'j'}$ مشخص می‌گردد که می‌توان همانند رابطه خط در دستگاه دکارتی آن را حساب کرد. در رابطه‌های کنونی، به دلیل وابستگی مختصه‌های سطحی و برای ایجاد همانندی یک مختصه با ترتیب چرخش دایره وار حذف شده است. اکنون با جایگذاری رابطه‌های (۲۰) در (۱۲)، تابعهای شکل جزء چهار گرهی در مختصات سطحی اصلی به دست می‌آیند. سپس برای محاسبه تابعهای شکل گرهی درونی، ضریب $\alpha_1\xi_1\xi_2\xi_3$ وارد می‌گردد. عامل α_1 به‌گونه‌ای محاسبه می‌شود که مقدار یک را برای تابع شکل در گره مربوطه به دست دهد.

باید آگاه بود در حالتهایی که پهلوهای مثلّث درونی و اصلی با هم موازی باشند رابطه‌های انتقال به شکل قابل توجهی ساده می‌گردند. به عنوان نمونه، با توجه به شکل (۷) مختصه‌های زیر برای گره‌های گوشه درونی در نظر گرفته می‌شوند.

بنابراین رابطه‌های انتقال صورت زیر را پیدا می‌کنند:

$$\begin{cases} \xi_{1'} = \dfrac{\xi_1 - b}{a - b} \\ \xi_{2'} = \dfrac{\xi_2 - d}{c - d} \\ \xi_{3'} = \dfrac{\xi_3 - f}{e - f} \end{cases} \qquad (۲۱)$$



شکل (۷) جزء مثلّثی دارای پهلوهای موازی با مثلّث درونی.

$$1'(a, d, f),\ 2'(b, c, f),\ 3'(b, d, e)$$

براساس آنچه گذشت تابعهای شکل گره‌های درونی مزبور چنین به دست می‌آیند:

$$N_1 = \alpha_1\xi_1\xi_2\xi_3\left[\frac{\xi_1 - b}{a - b}\right]\left[1 - 9\left[\frac{\xi_2 - d}{c - d}\right]\left[\frac{\xi_3 - f}{e - f}\right]\right] = \alpha_1 n_1$$

$$N_2 = \alpha_2\xi_1\xi_2\xi_3\left[\frac{\xi_2 - d}{c - d}\right]\left[1 - 9\left[\frac{\xi_1 - b}{a - b}\right]\left[\frac{\xi_3 - f}{e - f}\right]\right] = \alpha_2 n_2$$

$$N_3 = \alpha_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \left[\frac{\xi_3 - f}{e - f}\right]\left[1 - 9\left[\frac{\xi_1 - b}{a - b}\right]\left[\frac{\xi_2 - d}{c - d}\right]\right] = \alpha_3 n_3$$

$$N_4 = \alpha_4 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \left[\frac{\xi_1 - b}{a - b}\right]\left[\frac{\xi_2 - d}{c - d}\right]\left[\frac{\xi_3 - f}{e - f}\right] = \alpha_4 n_4 \qquad (۲۲)$$

عاملهای مجهول به صورت زیر می‌باشند :

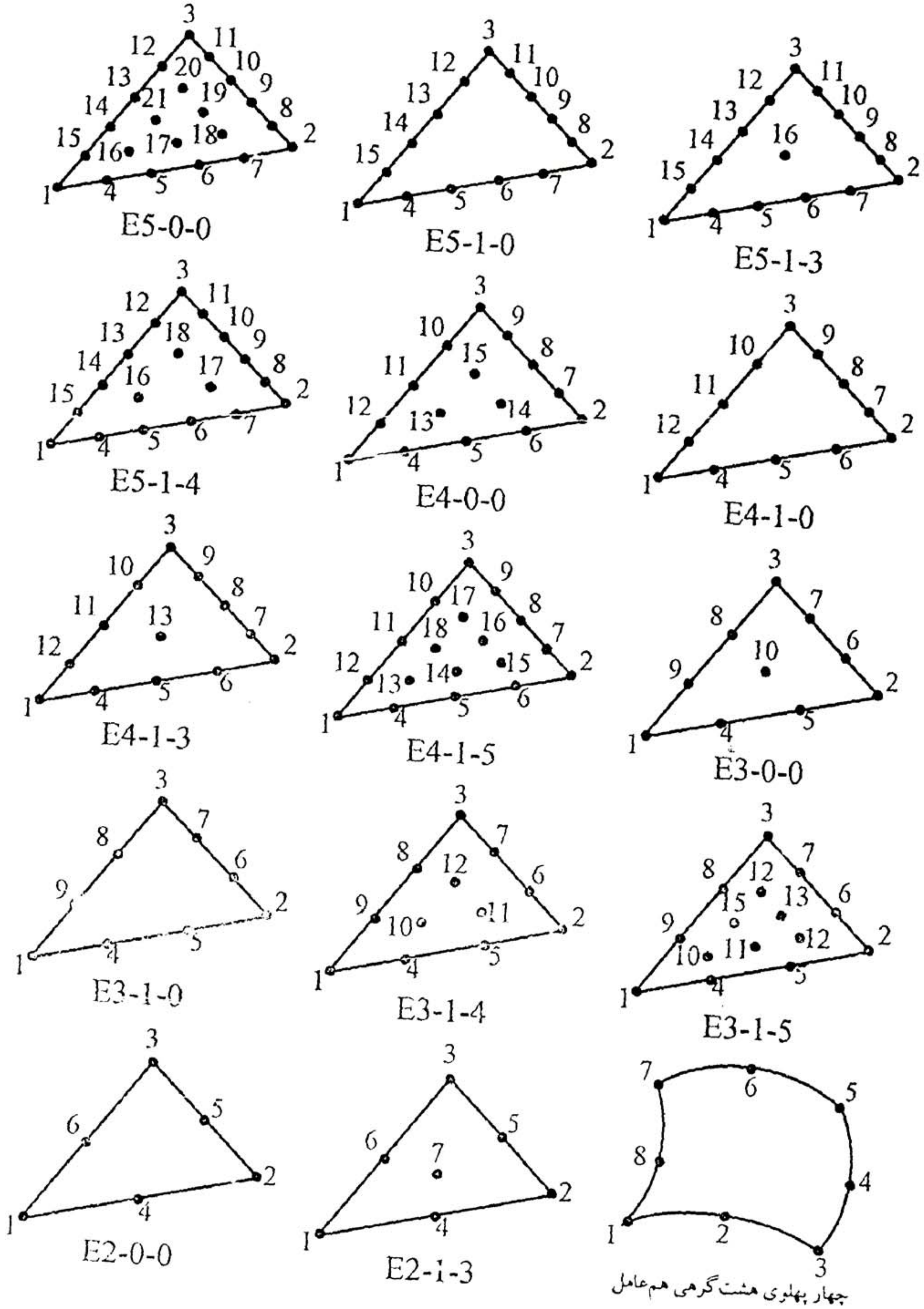
$$\alpha_1 = \frac{1}{n_{1,1}}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{n_{2,2}}$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{n_{3,3}}$$
$$\alpha_4 = \frac{1}{n_{4,4}} \qquad (۲۳)$$

در اینجا، $n_{i,i}$ مقدار تابع n_i در گره i است.تابع n_i یک چندجمله‌ای است که با توجه به رابطه (۲۲) تعریف می‌شود.خاطرنشان می‌کند این شیوه در حالت وجود مثلثهای تو در تو می‌تواند گسترش یابد. در این صورت تابعهای شکل در مختصات محلی با فن موجود به مختصات محلی از مثلّث بزرگتر انتقال داده می‌شوند. به همین ترتیب کار ادامه پیدا می‌کند تا اینکه سرانجام تابعهای شکل جزء اصلی به دست آیند. باید افزود تابعهای شکل برای ترکیبهای گرهی درونی با آرایش مستطیلی نیز قابل محاسبه‌اند. همانند روش پیشین در این حالت هم از فن انتقال مختصات بهره گرفته می‌شود. با این تفاوت که برای محاسبه این تابعها باید از دستگاه مختصات طبیعی مرکزی نیز بهره جست.

نمونه‌های عددی

هدف این بخش ارزیابی کارآیی اجزای پیشنهادی می‌باشد. در این راستا دو نمونه عددی ارائه می‌شوند. نتیجه‌های پژوهشگران دیگر با اجزای پیشنهادی مقایسه می‌گردند. در حالتی که پاسخ دیگران در دست نیست، جواب مسأله با جزء چهار پهلوی هشت گرهی هم عامل وارسی خواهد شد. این نمونه‌ها از نوع مسأله تنش مستوی هستند. اجزای پیشنهادی دارای ترکیبهای گوناگونی از گره‌های درونی و پیرامونی می‌باشند. در جدول نتیجه‌های هر نمونه نوع جزء با نماد $Em-n-o$ نشان داده خواهد شد. عامل m می‌رساند که گره‌های پیرامونی جزء، با جزء سرندیپیتی درجه m همانند می‌باشند. شماره رمز n، مشخص کننده لاگرانژی یا ناهرمیتی بودن جزء است. برای اجزای لاگرانژی مقدار صفر و برای اجزای ناهرمیتی، مقدار یک انتخاب می‌گردد. گره‌های درونی در اجزای مورد استفاده همانند اجزای لاگرانژی برگزیده می‌شوند. عامل o درجه این اجزا را نشان می‌دهد. برای آشنایی بیشتر اجزای مزبور به همراه نامشان در شکل (۸) نمایش داده شده‌اند.

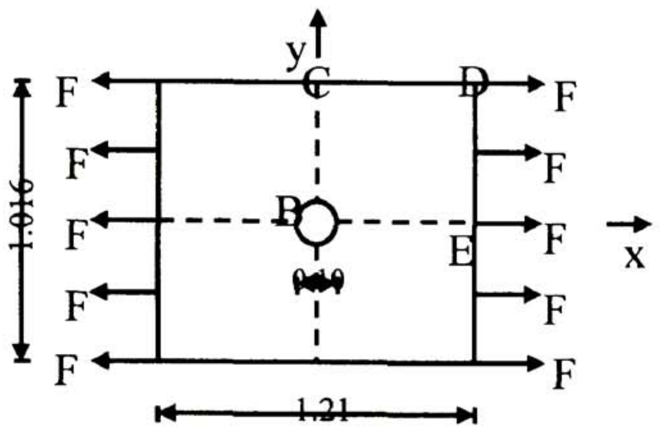
تاکنون آشکار گردید برای تحلیل یک نمونه از چندین جزء گوناگون با دقتهای متفاوت بهره‌جویی شده است. برای مقایسه بهتر کارآیی اجزا، شمار گره شبکه‌های هر نمونه یکسان می‌باشند. یادآوری می‌کند در روش عددی اجزای محدود جوابها ممکن است بطور نوسانی به پاسخ واقعی نزدیک شوند. این ویژگی به همراه انتخاب زیاد گره‌ها در درون محیط مورد تحلیل می‌تواند سبب از دست رفتن پاره‌ای از نکته‌ها گردد. بر این اساس کوشش شده است شمار مناسبی گره انتخاب و اجزای گوناگون مورد بررسی قرار گیرند. به همین دلیل در برخی از مسائل، پاسخهای به دست آمده با مقدار دقیق فاصله دارند. با وجود این باید دانست امکان دستیابی به پاسخهای دقیقتر با این اجزا وجود دارد. در ادامه نمونه‌های عددی و جدول پاسخهای آنها ارائه می‌شوند.



شکل (۸) اجزای مورد استفاده در تحلیل نمونه‌ها.

صفحه سوراخدار

شکل (۹) نشان دهنده یک صفحه مستطیلی با یک سوراخ دایره‌ای در وسط می‌باشد. در دو پهلوی روبه‌روی این صفحه، بارهای متمرکز در امتداد x وارد می‌شوند. ضخامت سازه برابر $0.0254\,m$ است. در این مسأله، ضریب کشسانی $E = 6.8948 \times 10^7\ KN/m^2$ ، نسبت پوسان $\nu = 0.3$ و نیروی $F = 0.222504\ KN$ می‌باشند.

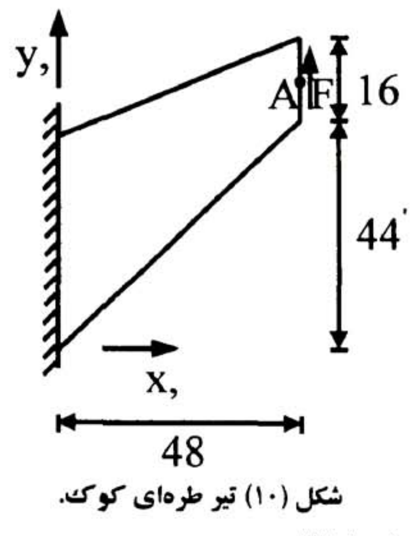


شکل (۹) صفحه سوراخدار.

این صفحه در حالت تنش مستوی قرار دارد. به دلیل تقارن سازه، $\frac{1}{4}$ آن برای تحلیل در نظر گرفته می‌شود. این صفحه به وسیله شبکه‌بندیهای گوناگون و با اجزای مختلف، تحلیل و تغییر مکان نقطه‌های نشان داده شده به دست آمده‌اند. خاطرنشان می‌نماید، به دلیل وجود تمرکز تنش در اطراف سوراخ، اندازه اجزا در این قسمت کمتر انتخاب می‌گردند. پاسخ تحلیلها به همراه نتیجه به دست آمده از جزء چهار پهلوی هشت گرهی هم عامل در جدول (۱) درج شده‌اند.

تیر طره‌ای کوک

اینک تیر طره‌ای کج شکل (۱۰) تحلیل می‌شود. این سازه به وسیله کوک برای تعیین دقت اجزای چهار پهلو ارائه گردیده است [11]. این مسأله تنش مستوی و دارای مقطع متغیر است. نیروی عمودی $F = 1\,KN$ بر سر آزاد تیر اثر می‌کند. تحلیل عددی دقیقتری به وسیله برگان و فیلیپا با استفاده از یک شبکه‌بندی (۳۲ × ۳۲)، برای آن انجام شده است [12]. پاسخ مزبور به همراه نتیجه‌های اجزای پیشنهادی در جدول (۲) درج شده‌اند. در این تحلیلها تنها تغییر مکان عمودی نقطه A ارزیابی می‌گردد. ضخامت سازه $t = 1\,cm$، ضریب کشسانی $E = 1\,KN/cm^2$ و نسبت پوسان $\nu = 1/3$ اختیار می‌شوند



شکل (۱۰) تیر طره‌ای کوک.

جدول (۱) نتیجه‌های تحلیل صفحه سوراخدار.

نوع جزء	شمار اجزا	شمار گره‌ها	u_A $(\times 10^4)$	v_B $(\times 10^4)$	v_C $(\times 10^4)$	u_D $(\times 10^4)$	v_D $(\times 10^4)$	u_E $(\times 10^4)$	خطا (٪)
E 5-0-0	3	51	0.5317	-0.1790	-0.7213	5.3815	-2.0523	4.3394	3.11
E 5-1-0	5	51	0.7726	-0.3821	-0.9994	5.4257	-1.7431	6.1988	27.48
E 5-1-3	5	56	1.6667	-0.5367	-0.9402	4.9178	-1.8299	6.9189	59.49
E 5-1-4	4	54	0.6161	-0.2251	-0.4296	4.6521	-2.3761	4.2275	-3.88
E 4-0-0	5	51	0.5801	-0.2313	-0.7781	5.2572	-2.0354	4.4719	2.96
E 4-1-0	7	50	0.7908	-0.0194	-0.7064	4.2344	-1.3030	3.9527	-7.65
E 4-1-3	6	49	0.7845	-0.3021	-0.9029	5.6568	-2.2927	4.5269	-22.31
E 4-1-5	4	57	0.5340	-0.0202	-0.7998	6.5221	-3.0877	3.6655	19.63
E 3-0-0	9	55	0.6143	-0.1657	-0.7335	4.7961	-1.6537	4.2689	-8.28
E 3-1-0	11	53	0.5002	-0.0935	-0.6975	4.1564	-1.2739	3.8360	-24.62
E 3-1-4	7	57	0.9300	-0.2687	-1.2617	6.3534	-3.1607	5.4102	42.87
E 3-1-5	5	56	1.3436	-1.1110	-2.2549	7.9883	-2.9118	5.5401	139.02
E 2-0-0	20	53	0.5391	-0.1271	-0.7470	4.1152	-1.2492	3.882	-20.42
E 2-1-3	14	57	0.931	-0.2544	-1.1549	4.7765	-0.8961	4.1211	6.22
چهار پهلوی هشت گرهی	20	79	0.7429	-0.2279	-0.7646	4.8360	-1.6520	4.2800	0.00

جدول (۲) نتیجه‌های تحلیل تیر طره‌ای کوک.

نوع جزء	شمار اجزا	شمار گره‌ها	V_A	خطا(٪)
E 5-0-0	2	36	24.0879	0.74
E 5-1-0	4	37	26.6660	11.53
E 5-1-3	3	36	26.4991	10.83
E 5-1-4	3	42	30.9042	29.25
E 4-0-0	3	35	24.0850	0.73
E 4-1-0	5	36	22.5451	-5.71
E 4-1-3	4	37	25.9260	8.43
E 4-1-5	3	44	32.6350	36.49
E 3-0-0	6	37	24.1615	1.05
E 3-1-0	7	36	23.1587	-3.14
E 3-1-4	4	36	36.4784	52.56
E 3-1-5	3	37	35.6502	49.10
E 2-0-0	12	35	23.3489	-2.35
E 2-1-3	8	33	27.7416	16.02
[12]	32×32		23.91	0.00

نتیجه‌گیری

در این مقاله روشهایی پیشنهاد شدند که توانایی ارائه تابعهای شکل اجزای مثلّثی را دارند. روش درک مستقیم رفتار برای محاسبه تابعهای اجزای مثلّثی با گره‌های پیرامونی ارائه گردید. باید دانست در این شیوه، محل قرارگیری گره‌های جزء مورد نظر دلخواه می‌باشند و هیچگونه محدودیتی ندارند. همچنین رابطه‌ها بـه شکل صریح به‌دست آمدند و قابل خودکارسازی هستند. سپس روش بازرسی برای محاسبه تابعهای اجزای مثلّثی با گره‌های درونی گسترش یافت. در این زمینه رابطه‌هایی برای فرآیند انتقال در مختصات سطحی ارائه گردیدند. تحلیلهای گوناگونی با اجزای پیشنهادی به انجام رسیده است. در این مقاله تنها پاسخهای دو مسأله متفاوت که به وسیله چهارده نوع جزء مثلّثی تحلیل شده‌اند به نظر خوانندگان رسیدند. براساس این تجربه‌های عددی نتیجه‌های زیر به دست می‌آیند:

۱ اجزای لاگرانژی از قدرت بیشتری نسبت به اجزای با گره‌های پیرامونی برخوردارند.

۲ در میان دیگر اجزای ناهرمیتی، گونه‌های با گره‌های پیرامونی پاسخهای بهتری ارائه می‌کنند.

۳ در میان اجزای با گره‌های درونی، جدا از گونه‌های لاگرانژی، اجزای دارای گره درونی کمتر می‌توانند جوابهای دقیقتری را به دست دهند.

۴ بطور کلی، در اجزای غیر لاگرانژی، گونه‌های درجه چهار نسبت به دیگر اجزا، از دقت بیشتری برخوردارانـد. با وجود این، دراجزای لاگرانژی، دقت تحلیل با افزایش درجه جزء زیاد می‌گردد.

۵ با توجه به محل قرارگیری گره‌های اجزای لاگرانژی، امکان ایجاد شبکه یکنواخت در محیط مورد تحلیل باسانی فراهم می‌باشد. در صورتی که ایجاد شبکه به وسیله اجزای با گره‌های پیرامونی نیاز به دقت بیشتری دارد.

۶ کامل بودن چندجمله‌ای میدان در مقایسه با افزایش سازگاری اثر بیشتری در بهبود دقت تحلیل دارد.

آشکار گردید که در میان اجزای ناهرمیتی، اجزای لاگرانـژی بـا وجـود دارا بـودن گره‌هـای درونـی فـراوان، از کـارآیی بـهتری برخورداراند. این ویژگی به چند دلیل می‌تواند وابسته باشد. نخست آنکه تابعهای میدان مورد استفاده در اجزای لاگرانژی از نوع کامل هستند. در حالیکه میدان تغییر مکان سایر اجزا، با وارد کردن قیدهایی بر ضریبهای مجهول چندجمله‌ایهای کامل ایجاد شده‌اند. کاربرد این نوع میدانها سبب ایجاد ناهمگونی در درآیه‌های ماتریس سختی می‌شود. این ویژگی به همراه خطای رایانه موجب کاهش دقت اجزای مزبور می‌گردد. بر این اساس هنگام افزایش درجه اجزا و یا شمار گره‌ها، دقت تحلیل کاهش می‌یابد. همچنین در پاره‌ای از موارد تنها تغییر دادن شماره گره‌ها سبب ایجاد پاسخهای متفاوت می‌شود. نکته دیگر، به چگونگی قرارگیری گره‌های اجزای لاگرانژی بستگی دارد. در واقع با کاربرد این گونه اجزا، قرارگیری مناسب گره‌ها در سرتاسر محیط مورد تحلیل باسانی انجام می‌شود. در صورتی که در اجزای با گره‌های پیرامونی، به دقت زیادتری برای ایجاد یک شبکه مناسب اجزای محدود نیاز است. این ویژگی هنگام کار با شمار کم اجزا، بیشتر خود را نشان می‌دهد.

مراجع

[1] C. Caramanlian, K. A. Selby and G. T. Will, Plane Stress Formulation in Finite Element Method,University of Toronto, Department of Civil Engineering, June (1976).

[2] A. Y. T. Leung, "Standard Shape Function Method for Finite Element Formulation", Microcomput.Civil Engng, Vol. 1, pp. 79-89 (1986).

[3] C. S. Krishnamoorthy, Finite Element Analysis Theory and Programming, Tata McGraw-Hill, NewDelhi (1987).

[4] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, Finite Elements Methods, McGraw-Hill Book, Fourth Edition(1989).

[5] A. A. Ball, "The Interpolation Function of a General Serendipity Rectangular Element", Int. J.Num. Meth. Engng, Vol. 5, pp. 773-778 (1980).

[6] E. Citipitioglu, "Universal Serendipity Elements", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 19, pp. 803-810(1983).

[7] A. El-Zafrany and R. A. Cookson, "Derivation of Lagrangian and Hermitian Shape Functions for Quadrilateral Elements", Int. J. Num .Meth. Engng. Vol. 23, pp. 1939-1958 (1986).

[8] M. Zlamal, "A Remark on the Serendipity Family", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 7, No. 1, pp.98-100 (1973).

[9] B. M. Iron, "Engineering Applications of Numerical Intergration in Stiffness Methods", AIAA J., Vol. 4, pp. 2035-2037 (1966).

[10] K. J. Bathe, Finite Elements Procedures in Engineering Analysis, Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632 (1982).

[11] R. D. Cook, "Modified Formulations for Nine-D.O.F. Plane Triangles that Include Vertex Rotations", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 31, pp. 825-835 (1991).

[12] P. G. Bergan and C. A. Felippa, "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom", Comput. Meth. Appl. Mech. Engng, Project C5(1985).