

مطالعه چندین جزء مثلثی ۶ گرهی برای صفحه خمشی

دکتر محمد رضایی پزند دانشیار گروه عمران - دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد
مهندس محمدرضا اختری دانشجوی کارشناسی ارشد گروه عمران دانشکده مهندسی دانشگاه مشهد

چکیده

سخن در باره تحلیل صفحه خمشی نازک با روش اجزای محدود می‌باشد. در این راستا، گوشه‌هایی از تحولات گسترده این شاخه از علوم به نظر خوانندگان می‌رسد. سپس از اجزای مثلثی شش گرهی سخن به میان می‌آید. ده نوع متفاوت از اجزای شش گرهی مثلثی شکل برای تحلیل صفحه خمشی در این مقاله مطالعه می‌شود. به وسیله برنامه رایانه‌ای، که توسط نویسندگان نوشته شده، مسأله‌های متنوعی با این اجزا تحلیل خواهد شد. سرانجام، پاسخهای جزءهای مورد مطالعه با نتایج پژوهشگران دیگر مقایسه می‌گردد.

۱- مقدمه

یک صفحه خمشی مشکل است. پاره‌ای از حالت‌های خاص آن را می‌توان با روشهای دقیق تحلیل نمود. با وجود این، روش اجزای محدود می‌تواند بسیاری از حالت‌های پیچیده صفحه‌های خمشی را نیز تحلیل نماید. این امر سبب گردیده که به صورت وسیعی از روش اجزای محدود برای تحلیل صفحه‌های خمشی استفاده گردد و تحقیقات گسترده‌ای نیز در این زمینه صورت گرفته و هم اکنون نیز ادامه دارد.

اجزای ارائه شده برای صفحه‌های خمشی بسیار زیاد هستند. این امر نشان دهنده وسعت دامنه کاربرد این رشته می‌باشد که به دلیل پیچیدگی و تنوع زیاد مسائل موجود در آن چنین

روش اجزای محدود یک روش تحلیل عددی است. این شیوه تحلیل، یکی از قویترین و ارزشمندترین روش‌هایی است که مهندسين و محققين علوم ریاضی و فیزیک برای به دست آوردن حل تقریبی معادلات دیفرانسیل از آن استفاده می‌کنند. فن مزبور در آغاز برای تحلیل سازه‌ها بکار گرفته شد و امروزه برای تحلیل عددی بسیاری از مسائل متنوع در مهندسی و علوم بطور چشمگیری توسعه یافته است.

توانایی روش اجزای محدود در تحلیل محیط‌های پیوسته می‌باشد. یکی از محیط‌های پیوسته صفحه خمشی است و کاربرد زیادی بویژه در سازه‌های صنعتی دارد. تحلیل دقیق

رشدی را داشته است. با این حال، تاکنون جزء محدودی که بتواند جوابگوی همه نیازها و پیچیدگی‌های مختلف انواع صفحه‌های خمشی باشد ارائه نشده است. بنابراین این، در زمان حاضر و در آینده نیز پژوهشگران شاهد پیشرفتهای دیگری در این زمینه خواهند بود.

در این مقاله، نخست تاریخچه مختصری از تحلیل مسأله صفحه خمشی با روش اجزای محدود به نظر خوانندگان می‌رسد. باید آگاه بود که تحولات انجام گرفته در زمینه اجزای صفحه خمشی بسیار گسترده بوده و نمی‌توان همه آنها را در یک نوشته جا داد. برای مرور نوآوریهای این بخش باید به منابع ویژه‌ای که در این باره انتشار یافته رجوع نمود [1,2]. به دنبال تاریخچه، اجزای مثلثی شش‌گره‌ای ارائه می‌شوند و مشخصات ده نوع جزء متفاوت تشریح خواهد شد. در ادامه کار، با برنامه رایانه‌ای که توسط نویسندگان نوشته شده، چندین مسأله صفحه خمشی متفاوت تحلیل می‌گردد. پاسخهای این مثالها به همراه جوابهای موجود در منابع به آگاهی خوانندگان می‌رسد. همچنین سرعت همگرایی پاسخهای جزءهای مطالعه شده به وسیله نمودارهایی نشان داده خواهد شد.

۲- تاریخچه

روش اجزای محدود حالت گسترش یافته‌ای از روشهای تحلیل قابهای معمولی به سازه‌های دو و سه بعدی پیوسته، مانند صفحه‌ها و پوسته‌ها می‌باشد. این روش توسط پیشگامان صنعت هواپیماسازی، که احتیاج مبرمی به تحلیل دقیق سازه‌های پیچیده داشتند، ابداع گردید. باید افزود، در نیمه دوم قرن بیستم، دسترسی به رایانه‌های خودکار در پیشرفت سریع روشهای ماتریسی نقش مؤثری

داشته است.

در سال ۱۹۴۳ میلادی، مک هنری مسأله‌های کشسان صفحه‌ای را با استفاده از تشابه شبکه‌ها مورد مطالعه قرار داد. نیو مارک صفحه‌ها را با استفاده از سازه‌های شبکه‌بندی شده بررسی نمود. پاریک و نوریس پوسته‌ها را با استفاده از تشابه آنها با خرپاهای فضایی مطالعه کردند. رابطه‌سازی روش تحلیل ماتریسی سازه‌ها و بویژه نوآوریهای آرجریس، اساس گسترش روش اجزای محدود توسط کلاف و همکارانش شد. مقاله ارائه شده توسط : تورنر، کلاف، مارتین و تاپ، در سال ۱۹۵۶، نقطه آغاز استفاده از روش اجزای محدود به شمار می‌آید. در این مقاله، یک سازه پیوسته از بال یک هواپیما، با استفاده از اجزای مثلثی دو بعدی مورد تحلیل قرار گرفت. پس از آن، این اندیشه نو که استفاده از اجزای دو و سه بعدی برای تحلیل محیط پیوسته امکان‌پذیر است، مورد توجه قرار گرفت [3].

پس از آغاز کار اجزای محدود این روش به سرعت پیشرفت نمود و فعالیت پژوهشگران زیادی در این زمینه متمرکز گردید. در این فعالیت‌ها، بیشتر تلاش پژوهشگران بر روی پیشرفت و ارائه جزءهای جدید صورت گرفته است. بنابراین، مرتب کردن و نام بردن از جزءهایی که در طی این مدت نتیجه شده‌اند، کاری بسیار مشکل خواهد بود. در واقع، برای تحلیل صفحه خمشی تعداد زیادی جزء در دسترس است. یادآوری می‌کند، استفاده از جزء صفحه خمشی خیلی زود در روش اجزای محدود آغاز شد و شروع آن به دهه ۱۹۶۰ میلادی برمی‌گردد. در این دهه تعدادی جزء به وسیله پژوهشگرانی همچون : کلاف آدینی، ملوش، و تاجر ارائه گردید. این جزءها بیش از دیگران پیشرفت نمود و در آنها از روش تغییر مکان استفاده شده است. درجه‌های آزادی

انتخاب شده در این جزءها برای هر گره، تغییر مکان و مشتقهای اول آن نسبت به دو محور عمود بر هم می‌باشند. [2,4].

در اواسط دهه ۱۹۶۰ تغییرات اساسی در روش اجرای محدود پدید آمد و مشخص شد که سازگاری یا تطابق اجزای داخلی یک خاصیت مهم است که بدون آن همگرایی برای جزء همیشه حاصل نمی‌گردد. سازگاری لازم برای مسأله‌های صفحه‌ای، بخصوص در پهلوهایی اجزای داخلی، نامعلوم می‌باشد. این امر از عدم وجود سازگاری شیب عمود بر لبه‌ها حاصل می‌شود. بنابراین، اجرای اولیه ارائه شده برای صفحه خمشی از نوع ناسازگار بوده‌اند [2,3,5].

موفقیت در رسیدن به حالت سازگار بزودی به دست آمد. باگنر و همکارانش دو جزء ۱۶ و ۳۶ درجه آزادی مستطیلی را ارائه کردند که از نوع سازگار بوده و خاصیت همگرایی نیز داشتند. در این جزءها از مشتق دوم تغییر مکان به عنوان درجه آزادی استفاده شده است. بعدها مشخص شد که برای یک جزء سازگار نمی‌توان از چند جمله‌ایهای ساده استفاده کرد. ارائه جزء مناسب مثلثی مشکلتر از اجزای مستطیلی است. کلاف و تاجر سه نوع جزء مثلثی ناسازگار ارائه نمودند. هر یک از این جزءها کاستیهایی داشتند، از جمله این که برای حرکت یکپارچه جسم صلب نتیجه مطلوبی نمی‌دادند. بازلی و همکارانش این مسأله را ساده نمودند و از یک هندسه همگن استفاده کردند. آنها رابطه‌ای برای تابع شکل به کار بردند که از مختصات سطحی استفاده می‌کند. جزء مثلثی این پژوهشگران، زیاد مورد استفاده قرار گرفته است و به نام BCIZ معروف می‌باشد و دو نوع سازگار و ناسازگار آن وجود دارد [4,6,7]. برقراری شرط سازگاری در اجزای مثلثی مشکل می‌باشد. اما بازلی روشی را معرفی

کرد که از ترکیب تابعهای شکل غیر چند جمله‌ای استفاده می‌شد. این تابعهای شکل را سازگار ویژه گره‌ها نامیده‌اند. با وجود این، مشخص شده است که مشتق دوم یا انحنا دقت خوبی در گره‌های جزء ایجاد نمی‌کند [2].

کلاف برای ایجاد سازگاری مثلث را به سه زیر مثلث تقسیم نمود و از سازگار نمودن قیدها در مرز زیر مثلثها استفاده کرد. برای به دست آوردن جزء مثلثی سازگار، روشهای متفاوتی ارائه گردیده است. شاید آسانترین راه استفاده از یک چند جمله‌ای مرتبه بالاتر باشد که در نتیجه، یک جزء مرتبه بالا به دست می‌آید. یک جزء با ۲۱ درجه آزادی که گره‌هایی در میانه پهلوها دارد و از یک چند جمله‌ای درجه ۵ کامل استفاده می‌کند، توسط: آرچریس، بل، آیرون و ویسر ارائه شده است. تغییرات شیب قائم در طول مرزهای جزء از درجه دو است که برای برطرف کردن این نیاز باید سه گره در هر پهلو وجود داشته باشد و در نتیجه ۱۸ درجه آزادی برای جزء لازم می‌باشد. این جزء توسط: آرچریس، بل و کوپر معرفی شد [8,9,10].

یکی دیگر از روشهای ارائه شده، استفاده از تابعهای شکل جانشین و هموار نمودن مشتق می‌باشد که توسط: بازلی، آیرون و رزاقی ارائه شد. تابعهای شکل جانشین، بطور مسلم تعداد زیادی از جمله‌های تابعهای اصلی را دارا می‌باشند، اما درجه‌های بالا در یک چند جمله‌ای کامل انتخاب نمی‌گردد و مشتقهای تابع کار مایه به وسیله روش کمترین مربعات تقریب زده می‌شوند. با این حال، اجزای بدست آمده ناسازگار می‌باشند [2]. پژوهشگران دیگری از جمله مورلی، با استفاده از یک چند جمله‌ای درجه دو کامل، مثلث خمش ثابت را به دست آوردند مشابه این جزء در تحلیل مسأله کرنش و تنش مستوی وجود دارد که مثلث

با کرنش ثابت نام دارد. [11].

استفاده از اصل کار مایه متمم کمینه شیوه دیگری از تحلیل را نتیجه می‌دهد. در این نوع رابطه‌سازی، تابعهای درونیاب برای تنشها و یا لنگرها در داخل جزء انتخاب می‌شوند. این تابعها باید تعادل را در هر نقطه از سازه و در مرزها برقرار سازند. زینکوویچ اثبات کرده است که در این حالت نمی‌توان بطور مستقیم تنشها را به دست آورد. یکی از مشکلات عمده در این روش ناسازگاری در مرزها می‌باشد. ویویک، برای پرهیز از این امر، ماتریس نرمی را بطور مستقیم به دست آورد و سپس با وارون ساختن آن، ماتریس سختی را محاسبه نمود. به دنبال آن با استفاده از روش تغییر مکان به حل ادامه داد. اما استفاده از روش نرمی یا نیرویی به دلیل این که نمی‌تواند روش ساده و خودکاری برای حل ارائه نماید، بزودی رها گردید [2].

روش تعادلی به مورلی و الیاس نسبت داده می‌شود. آنها از تابعهایی برای جزء استفاده کردند که تنشها از مشتق دوم این تابعها به دست می‌آیند. بنابراین، مشتق تابعها نیز باید پیوسته باشند. این را پیوستگی C^1 می‌نامند. با وجود این، هنوز مشکلاتی در انتخاب تابعهای تنش وجود داشت. از جمله این مشکلات این است که برای تغییر مکانها مقدار یگانه‌ای به دست نمی‌آید، چون آنها از تابع اولیه گیری کرنشها پیدا می‌شوند [12].

روشهای دیگری که پس از آن مورد استفاده قرار گرفت از تابعهای لاگرانژی و یا عاملهای لاگرانژی استفاده می‌کند. در این فنها، پیوستگی در طول مرزهای اجزای داخلی کم می‌شود و در نتیجه نیاز به سازگاری کاهش می‌یابد. به سخن دیگر، در این حالت فقط خود تابع پیوسته است و مشتق آن نیاز به پیوستگی ندارد. این پیوستگی C^0 نام دارد. در ادامه

کار، روشهای ترکیبی به وجود آمدند. روشهای ترکیبی بر دو گونه‌اند، یکی روش پیوندی است و در آن از رابطه‌هایی استفاده می‌شود که می‌تواند یک دسته از مجهولها را در سطح جزء حذف نماید. روش دوم، روش در هم عمومی است که در معادلات کلی دو دسته از مجهولها ظاهر می‌شوند. این دو دسته از مجهولها، تنشها و تغییر مکانها هستند که هر دوی آنها در معادله‌ها به صورت مجهول وارد می‌گردند [2,4]. اولین روش پیوندی توسط پیمان ارائه شد. وی با استفاده از کارمایه متمم، یک چند جمله‌ای برای تنش در داخل جزء انتخاب نمود و در اطراف محیط جزء تغییر مکانها را برگزید و با استفاده از عاملهای لاگرانژی، تعادل نیروها در داخل جزء برقرار شد. این شیوه به نام روش پیوندی تنشها معروف است.

یک روش ترکیبی، در سال ۱۹۶۵، به وسیله هرمن ارائه گردید. وی از نگره صفحه ریزتر استفاده کرد. در این روش، ترکیبهای متفاوتی از تغییر مکانها، تنشها و نیروها را می‌توان ارائه ساخت. هرمن نیاز پیوستگی را برای تغییر مکان کم کرد، اما در عوض، برای تنشها پیوستگی را افزایش داد. در نتیجه، پیوستگی خود تابع (C^0) برای هر دو دسته از تابعها مورد نیاز است. در این حالت، میزان محاسبات برای سختی جزء کاهش می‌یابد چون از چند جمله‌ایهای مرتبه پایینتری استفاده می‌شود. با این حال، در روش مزبور هم تعادل و هم سازگاری بطور تقریبی برقرار می‌گردند. استفاده از عاملهای لاگرانژی توسط دو گروه دیگر در روشهای ترکیبی به کار برده شده است. گروه اول با نام روش تغییر مکان عمومی از اجزای ناسازگار استفاده می‌کند. گروه دوم، روش تعادلی عمومی نام گرفت که در سال ۱۹۶۹ به وسیله آندر هیجن ارائه شد.

در دهه ۱۹۷۰، ارائه جزء جدید کاهش یافت. با وجود این، پژوهشگران به دنبال راه‌حلهایی برای ساده نمودن محاسبات بودند که در نتیجه فوننی همچون تابع اولیه‌گیری کاهش یافته، رابطه‌سازی عددی، جانشین نمودن تابعهای شکل و هموار نمودن مشتق پدید آمد. یکی از مهمترین پیشرفتهائی که در این دهه پدیدار شد، استفاده از رابطه‌سازی تغییر مکان بر اساس نگره صفحه میندلین و تابع اولیه‌گیری کاهش یافته بود. انگیزه استفاده از نگره صفحه میندلین در این است که فقط اولین مشتق در تابع کارمایه ظاهر می‌شود و در نتیجه فقط پیوستگی C^0 برای تابعهای شکل مورد نیاز است. این روش برای صفحه‌های ضخیم نیز مناسب است [2,4].

زینکوویچ و همکارانش با استفاده از روش تابع اولیه‌گیری کاهش یافته و نگره صفحه میندلین موفقیت‌هایی را به دست آوردند که نتایج قبلی را اصلاح و بهبود بخشید. آنها از یک جزء پوسته‌ای موسوم به «جزء پوسته‌ای سرندپیتی هشت گرهی احمد» استفاده کردند که با مقید ساختن برخی گره‌ها و درجه‌های آزادی می‌تواند برای صفحه خمشی مورد استفاده قرار گیرد. جزء پوسته‌ای مزبور توسط احمد و همکارانش برای پوسته‌های نازک و ضخیم ارائه شده است [5].

روش دیگری که از تابع اولیه‌گیری کاهش یافته و نگره میندلین بهره می‌گیرد، در سطح جزء قیدهایی را موسوم به قیده‌های کیرشهف در نظر می‌گیرد. این قیده‌ها می‌توانند در نقاطی مانند نقاط گوس انتخاب شوند. اما این روش همیشه موفق نیست و گاهی اوقات پیوستگی تابع شکل (C^0) حفظ نمی‌گردد. روش دیگری که از قیده‌های کیرشهف استفاده می‌کند، استفاده از تابع اولیه‌گیری وزنی و عاملهای لاگرانژی

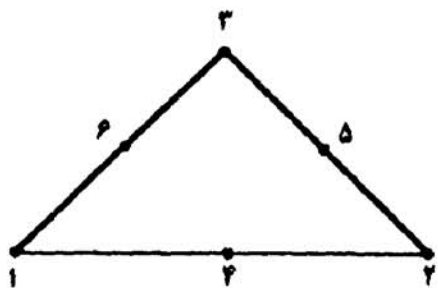
است که بر روی جزء درونیابی می‌شود. این روش، در سال ۱۹۸۱، توسط هرابوک ارائه گردید. هیچیک از دو روش مورد بحث، مانند روش تابع اولیه‌گیری کاهش یافته ساده و مؤثر نیستند. استفاده از تابع اولیه‌گیری کاهش یافته برای رابطه‌سازی در روش پیوندی تنشها نیز توسط اسپیلکرو مونیر ارائه شده است [2].

شرح و تفسیر کلیه روشهای ارائه شده برای انتخاب تابع شکل و یا نوع جزء بسیار مفصل و پیچیده است که از محدوده این نوشته بیرون می‌باشد. برای پی بردن به اهمیت گستردگی «موضوع صفحه خمشی» این نکته یادآوری می‌گردد که فقط در بین سالهای ۱۹۹۲ تا ۱۹۹۴ میلادی، ۲۵۰ مقاله پژوهشی تنها به زبان انگلیسی در این زمینه انتشار یافت. لیست کامل این مقاله‌ها به وسیله مکرلی ارائه گردیده است [1]. برای پی‌گیری و استفاده بیشتر می‌توان به منابعی که در این زمینه وجود دارد مراجعه نمود. در جدول (۱) یک دسته‌بندی مختصر از انواع روشهای موجود، همراه با نحوه انتخاب رابطه‌سازی آنها ارائه گردیده است [2].

۳- جزء مثلثی با ۶ گره

اینک به مطالعه جزءهای مثلثی ۶ گرهی پرداخته می‌شود. برای این منظور از دو گونه جزء استفاده خواهد شد. یکی از این جزءها بدون گره داخلی است و دیگری دارای سه گره در داخل جزء می‌باشد. در ادامه بحث، این دو جزء و انواع درجه آزادی که می‌توان برای هر گره برگزید، ارائه می‌شود.

ارائه دهنده	مجهولهای انتخابی	تابع انتخابی در مرزهای جزء	تابع انتخابی داخل جزء	اصل مورد استفاده	روش اجزای محدود	
ملوش کورانت	تغییر مکانهای گرهی	تغییر مکانهای سازگار	تغییر مکانهای پیوسته	کارمایه نهفته کمینه	روش تغییر مکان	
ویوبک مورلی والیاس	تغییر مکانها و تنشها	تبادل نیروها در مرزها	تنشهای تعادلی و پیوسته	کارمایه متمم کمینه	روش تعادلی	
پیان	تغییر مکانهای گرهی	تغییر مکانهای سازگار	تنشهای پیوسته و تعادلی	تغییر کارمایه متمم	روش پیوندی تنش	روش پیوندی
تانگ، آندو کیکوچی	تغییر مکانهای گرهی	تغییر مکانهای سازگار	تغییر مکانهای پیوسته	تغییر کارمایه نهفته	روش پیوندی تغییر مکان ۱	
کالاگر	تغییر مکانهای گرهی و نیروهای مرزی	تبادل نیروها در مرزها	تغییر مکانهای پیوسته	تغییر کارمایه نهفته	روش پیوندی تغییر مکان ۲	
هرمن بیان تانگ	ترکیبی از تغییر مکانها و نیروها	ترکیبی از نیروهای مرزی و تغییر مکانها	تنشهای پیوسته و تابعهای تغییر مکان	تغییرات نگره رابزنر و سیله هرمن	اصل رابزنر	روش درم
گرین، هاروی آندرهیجن کلسی	تغییر مکانهای گرهی و عاملهای لاگرانژی	عاملهای لاگرانژی (تنش)	تغییر مکانهای پیوسته	تغییرات کارمایه نهفته	روش تغییر مکان عمومی	
آندرهیجن	تغییر مکانهای گرهی و عاملهای لاگرانژی	عاملهای لاگرانژی (تغییر مکان)	تنشهای تعادلی و پیوسته	تغییرات کارمایه متمم	روش تعادلی عمومی	



شکل ۱ - جزء مثلثی ۶ گرهی بدون گره داخلی

۱-۳ - جزء مثلثی ۶ گرهی بدون گره داخلی

شکل (۱) نقاط گرهی این جزء را نشان می دهد. جزء مزبور با نشانه T6-1 مشخص خواهد شد. برای این جزء ۶ حالت پیشنهاد شده است که در هر حالت درجه های آزادی گره ها متفاوت هستند. این اجزا در ادامه مقاله معرفی می گردند.

درجه‌های آزادی برای گره‌های ۱، ۲ و ۳ عبارتند از: w_{xy} ، w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} ، w_x ، w و w_{yx} ، w_{xy} و w_{yy} برای گره‌های ۴، ۵ و ۶ تنها از درجه آزادی w_n استفاده می‌شود. یادآوری می‌نماید، این جزء با نام T21 در منابع مختلفی درج گردیده است. با این حال، چون رابطه‌سازی آن به این گونه نبوده و اکنون به وسیله نویسندگان صورت می‌گیرد، به عنوان یکی از جزءهای مطالعه شده در این جا آورده شده است.

۲ - جزء T6-1-2

درجه‌های آزادی w_{xy} ، w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} ، w_x ، w برای گره‌های ۱، ۲ و ۳ بکار می‌روند. همچنین در گره‌های ۴، ۵ و ۶ از درجه آزادی w استفاده گردیده است.

۳ - جزء T6-1-3

گره‌های ۱، ۲ و ۳ دارای درجه‌های آزادی w_{xx} ، w_{yy} ، w_x ، w و w_{xy} بوده و برای گره‌های ۴، ۵ و ۶ درجه آزادی w_{yx} بکار می‌رود.

۴ - جزء T6-1-4

گره‌های ۱، ۲ و ۳ دارای درجه‌های آزادی w_{yx} ، w_x ، w و w_{xy} می‌باشند. افزون بر اینها، در گره‌های ۴، ۵ و ۶ درجه‌های آزادی w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} و w_{xy} مورد استفاده قرار می‌گیرد.

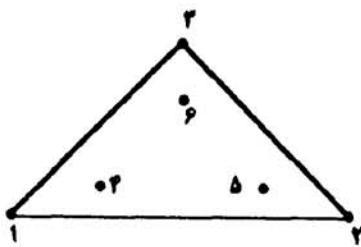
۵ - جزء T6-1-5

گره‌های ۱، ۲ و ۳ درجه آزادی w_{yx} ، w_x ، w را دارند. در گره‌های ۴، ۵ و ۶ از درجه‌های آزادی w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} ، w_x ، w و w_{xy} بهره‌جویی می‌شود.

گره‌های ۱، ۲ و ۳ دارای درجه آزادی w_{yx} ، w_x ، w بوده و در گره‌های ۴، ۵ و ۶ درجه‌های آزادی w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} ، w_x ، w و w_{xy} بکار می‌روند.

۳-۲ - جزء مثلثی ۶ گرهی با سه گره داخلی

شکل (۲) نقاط گرهی این جزء را نشان می‌دهد. جزء مزبور دارای سه گره داخلی است و نام آن با T6-2 آغاز می‌شود. برای این جزء ۴ حالت پیشنهاد شده است.



شکل ۲ - جزء مثلثی ۶ گرهی با گره داخلی

۱ - جزء T6-2-1

درجه‌های آزادی برای گره‌های ۱، ۲ و ۳ عبارتند از: w_{xx} ، w_{yy} ، w_x ، w و w_{xy} و برای گره‌های ۴، ۵ و ۶ از درجه‌های آزادی w_{yx} ، w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} ، w_x ، w استفاده می‌شود.

۲ - جزء T6-2-2

درجه‌های آزادی w_{xy} ، w_{yy} ، w_{xx} ، w_x ، w و w_{yx} برای گره‌های ۱، ۲ و ۳ به کار می‌روند. در گره‌های ۴، ۵ و ۶ از درجه‌های آزادی w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} و w_{xy} استفاده گردیده است.

۳ - جزء T6-2-3

گره‌های ۱، ۲ و ۳ دارای آزادی w_{yy} ، w_{xx} ، w_{yx} ، w_x ، w و w_{xy} بوده و برای گره‌های ۴، ۵ و ۶ درجه آزادی w بکار

در روی محور x : $w = 0$ و $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ می‌رود.

در روی محور y : $w = 0$ و $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

در لبه موازی محور x : $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

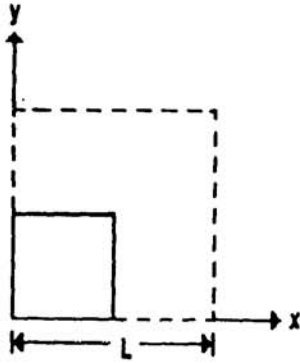
در لبه موازی محور y : $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ (۱)

۴- جزء 4-2-6 T6

گره‌های ۱، ۲ و ۳ دارای درجه‌های آزادی w_{xy} ، w_x ، w ، w_{yy} ، w_{xy} و w_{yy} ، w_{xx} و در گره‌های ۴، ۵ و ۶ درجه آزادی w_{xy} مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴- نمونه‌های عددی

اینک چند نمونه عددی ارائه می‌شود. نتایج عددی هر یک از آنها از مراجع استخراج شده‌اند تا با جزء‌های پیشنهادی مقایسه گردند. برای حل این مثالها با جزء‌های مورد مطالعه، نویسندگان مقاله یک برنامه رایانه‌ای نوشته‌اند. این برنامه قادر است با هر کدام از جزء‌های مزبور مسأله‌ها را حل نماید. به دلیل حجم زیاد برنامه مورد بحث، نمی‌توان آن را در این جا تشریح کرد.



شکل ۳- صفحه مربعی با تکیه‌گاههای ساده

انواع شبکه‌بندی که برای این صفحه مربع شکل استفاده می‌شود، شکل (۴) نشان داده شده است.

مقدار تغییر مکان در مرکز این صفحه و با استفاده از نگره

صفحه‌های نازک از رابطه زیر بدست می‌آید [13].

$$w_0 = 0.0116 \frac{PL^2}{D} \quad (2)$$

در این رابطه P نیروی متمرکز وارد بر مرکز سازه، L طول یک پهلوی صفحه است. D ، صلبیت خمشی صفحه، بر حسب، E ، عامل کشسانی، t ، ضخامت صفحه و ν نسبت پواسون، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

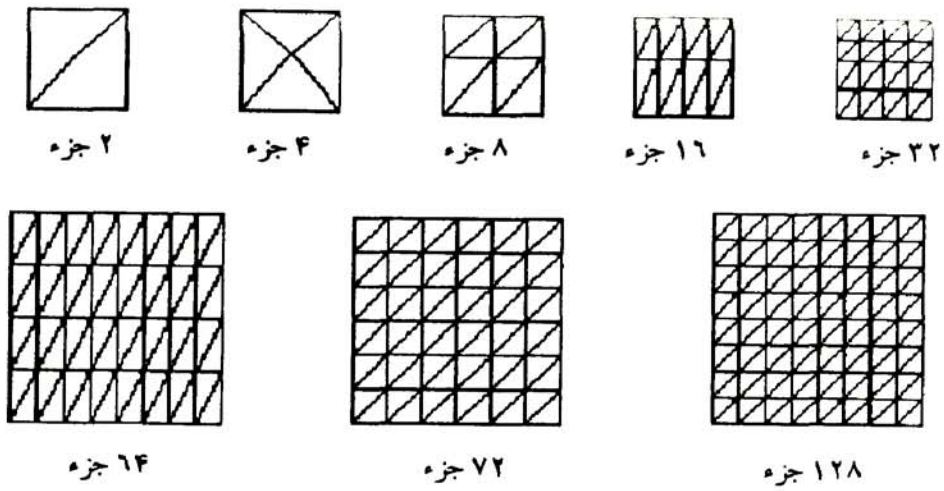
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

این مثال برای تمام حالت‌های پیشنهادی حل شده است. نتایج بدست آمده برای جزء‌های پیشنهادی در جدول (۲) درج گردیده است. در شکل (۵) همگرایی تغییر مکان مرکز صفحه برای جزء‌های مورد مطالعه به نمایش در می‌آید.

۴-۱- صفحه مربعی با تکیه‌گاههای ساده

۴-۱- در این مثال یک صفحه مربع شکل با تکیه‌گاههای ساده و یک بار منفرد در مرکز آن تحلیل می‌شود. طول هر پهلوی سازه برابر L و بار متمرکز آن P است. به دلیل وجود تقارن، فقط یک چهارم صفحه شبکه‌بندی شده و مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در شکل (۳) صفحه مربعی و یک چهارم آن نشان داده شده است.

با توجه به تقارن سازه، شرایط مرزی یک چهارم صفحه وارد تحلیل می‌شود. از این رو، در لبه موازی محور y دوران گرد محور y صفر است و در لبه موازی محور x دوران گرد محور x صفر خواهد بود. بر این اساس، شرایط مرزی برای این سازه به صورت زیر می‌باشد:

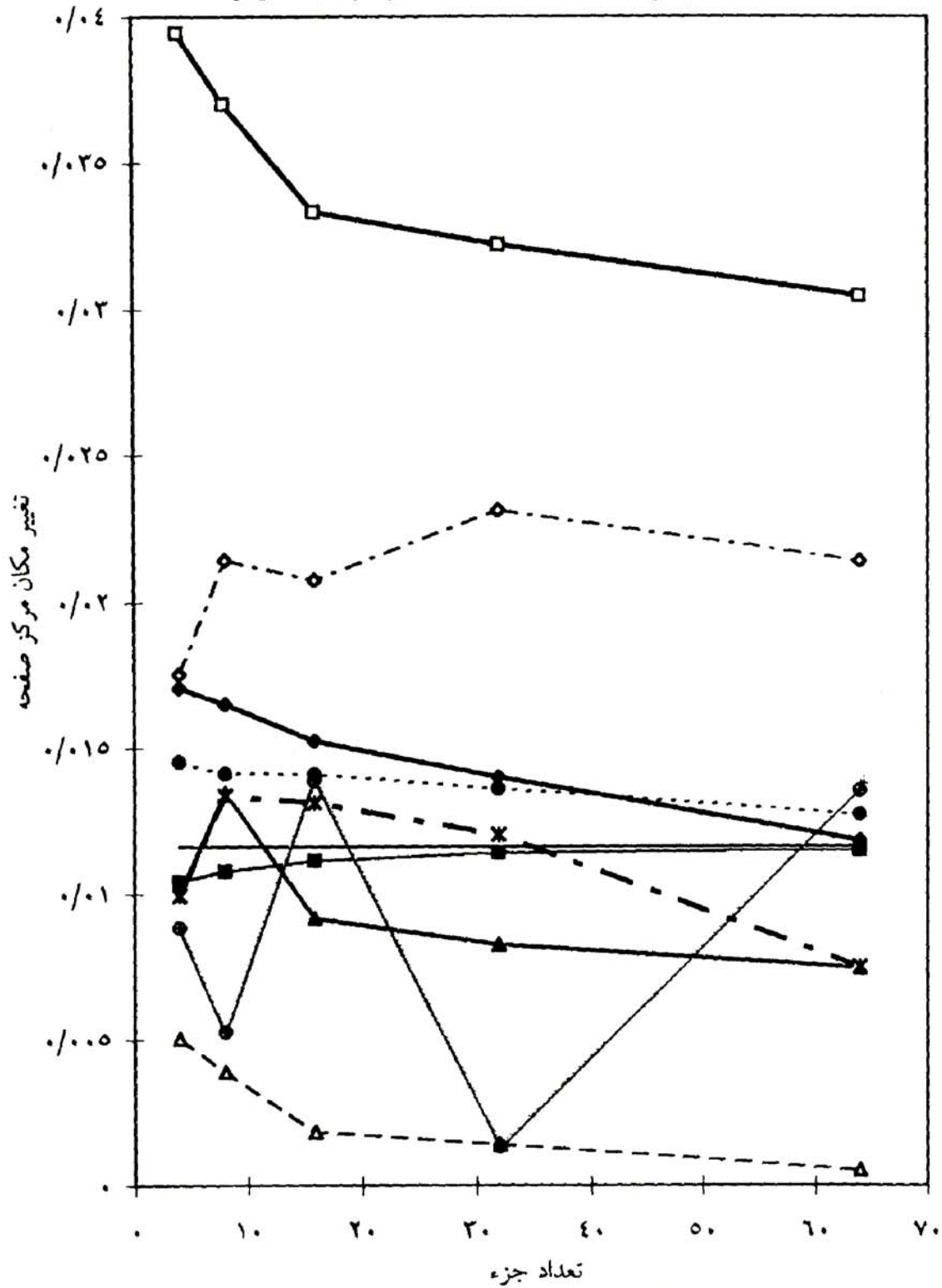


شکل ۴- شبکه بندی صفحه خمشی مربعی

جدول ۲- تغییر مکان مرکز صفحه مربعی برای جزءهای پیشنهادی

ردیف	جزء	تعداد جزء				
		۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴
۱	T6-1-1	۰/۰۱۰۴۲۱۳	۰/۰۱۰۷۶۳۷	۰/۰۱۱۱۲۲۶	۰/۰۱۱۳۹۳۴	۰/۰۱۱۴۸۲۰
۲	T6-1-2	۰/۰۰۵۰۳۶۶	۰/۰۰۳۸۹۸۵	۰/۰۰۱۸۲۵۶	۰/۰۰۱۴۰۲۰	۰/۰۰۰۵۱۲۷
۳	T6-1-3	۰/۰۱۴۵۰۶۰	۰/۱۴۱۰۴۴	۰/۰۱۴۰۹۷۲	۰/۰۱۳۵۸۹۹	۰/۰۱۲۷۱۱۲
۴	T6-1-4	۰/۰۰۸۸۴۶۱	۰/۰۰۵۲۷۲۱	۰/۰۱۳۸۸۸۷	۰/۰۰۱۳۳۸۱	۰/۰۱۳۵۲۲۵
۵	T6-1-5	۰/۰۰۸۸۴۶۱	۰/۰۰۵۲۷۲۱	۰/۰۱۳۸۸۸۷	۰/۰۰۱۳۳۸۱	۰/۰۱۳۵۲۲۵
۶	T6-1-6	۰/۰۰۹۹۵۸۶	۰/۰۱۳۴۳۵۱	۰/۰۰۹۱۵۶۷	۰/۰۰۸۲۶۸۸	۰/۰۰۷۴۶۷۵
۷	T6-2-1	۰/۰۳۹۴۳۹۷	۰/۰۳۷۰۰۲۱	۰/۰۳۳۳۱۷۴	۰/۳۲۲۰۲۵	۰/۰۳۰۴۳۶۵
۸	T6-2-2	۰/۰۱۷۵۴۳۵	۰/۰۲۱۴۴۰۷	۰/۰۲۰۷۵۹۸	۰/۰۲۳۱۲۸۶	۰/۰۲۱۳۹۳۰
۹	T6-2-3	۰/۰۱۷۰۵۲۵	۰/۰۱۶۵۰۵۵	۰/۰۱۵۲۲۴۳	۰/۰۱۳۹۸۷۹	۰/۰۱۱۸۱۸۰
۱۰	T6-2-4	۰/۰۰۹۹۲۷۶	۰/۰۱۳۳۶۸۹	۰/۰۱۳۱۰۵۰	۰/۰۱۲۰۱۶۱	۰/۰۰۷۵۱۰۸

صفحه مربعی باتکیه گاههای ساده زیر اثر بار متمرکز



شکل ۵- همگرایی تغییر مکان برای جزءهای مطالعه شده

در جدول (۳) تغییر مکان مرکز صفحه برای تعدادی از جزء‌های دیگر پژوهشگران درج گردیده است. پاسخ سه نوع از جزء‌های مطالعه شده نیز برای مقایسه در جدول آمده است. در ستون اول جدول، نام جزء و یا نام پیشنهادکننده آن نوشته شده، در ستونهای بعدی، تعداد جزء و در ستون آخر، مرجع مربوط به هر جزء وارد شده است. در ادامه مقاله، بطور خلاصه به این جزءها اشاره می‌شود.

جزء BCIZ یک جزء مثلثی است که دارای ۳ گره در گوشه‌های مثلث بوده و در هر گره ۳ درجه آزادی دارد. این جزء به وسیله: بازلی، چانگ، آیرون و زینکویچ ارائه گردیده است [4].

جزء CMT یک جزء مثلثی با ۶ گره می‌باشد، هر گره جزء مزبور یک درجه آزادی دارد. سه گره در گوشه‌های مثلث دارای درجه آزادی w و سه گره در میان پهلوها دارای درجه آزادی w_n هستند. این جزء بوسیله مورلی ارائه شده است [11].

جزء DKT یک جزء مثلثی دارای ۳ گره بوده و در هر گره آن ۳ درجه آزادی w ، θ_x و θ_y وجود دارد. با این جزء اثر تغییر شکلهای برش نیز در نظر گرفته می‌شود. این جزء به وسیله: باتوز، باته، و وینگ‌هوارائه شده و برای آن از نگره کیرششف گسسته برای صفحه خمشی استفاده کرده‌اند [14].

جزء RT9 یک جزء مثلثی با سه گره در گوشه‌های مثلث و سه درجه آزادی در هر گره می‌باشد. این جزء به وسیله چانگ و وانجی ارائه شده است. در رابطه سازی این جزء از یک شیوه بهبود یافته برای روش مستقیم سختی کمک گرفته شده است [15].

جزء NCQ یک جزء مستطیلی با ۴ گره در گوشه‌هاست و هر گره ۴ درجه آزادی دارد. جزء مزبور رالین و لیو ارائه نموده‌اند و از روش رابطه‌سازی آزاد برای آن استفاده کرده‌اند [16].

جدول ۳ - تغییر مکان مرکز صفحه مربعی با تکیه‌گاههای ساده و بار متمرکز

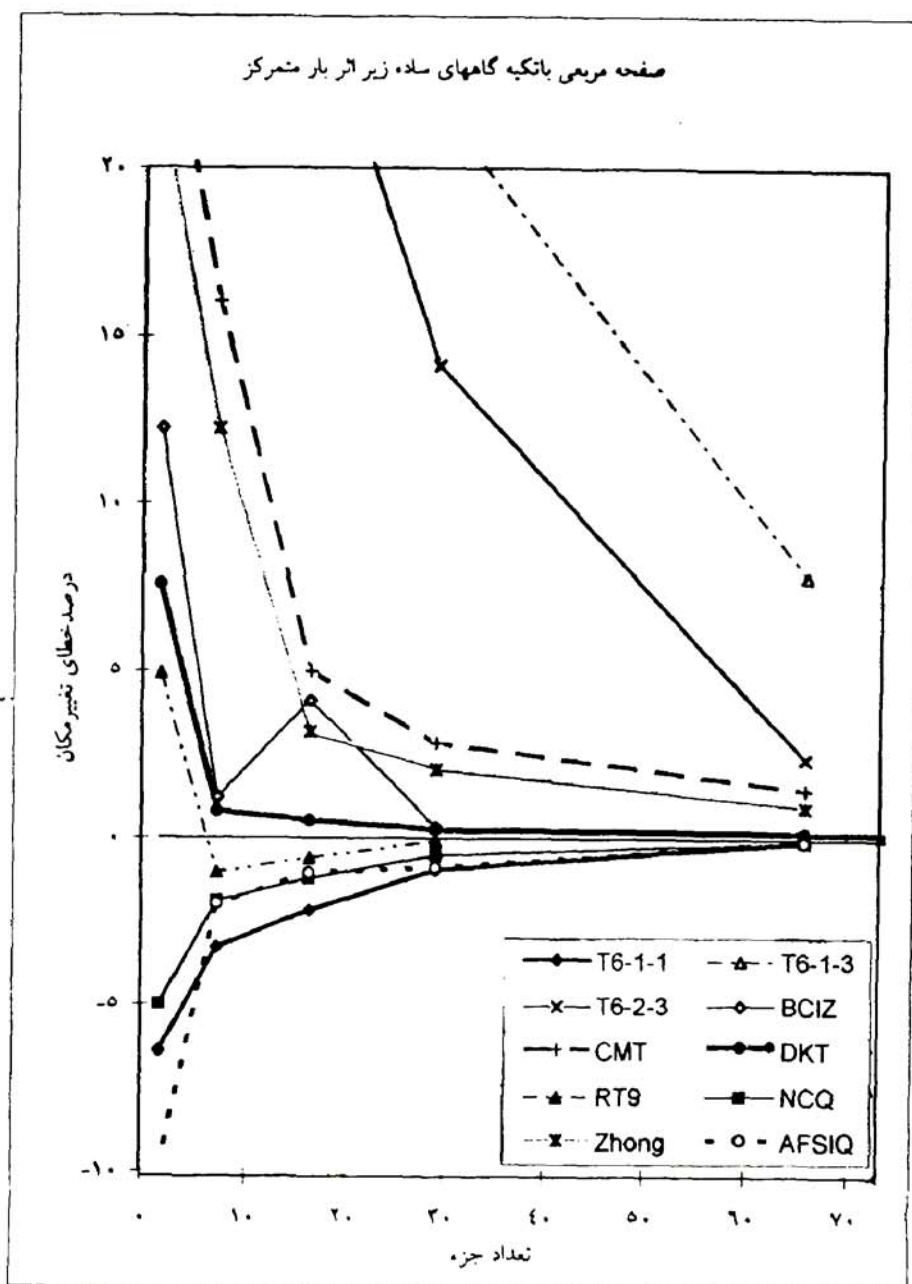
جزء	تعداد جزء					مرجع
	۲	۸	۱۸	۳۲	۷۲	
T6-1-1	۰/۰۱۰۸۶	۰/۰۱۱۲۲	۰/۰۱۱۳۵	۰/۰۱۱۴۹	۰/۰۱۱۵۹	
T6-1-3	۰/۰۱۷۶۵	۰/۰۱۵۵۰	۰/۰۱۴۶۱	۰/۰۱۴۱۱	۰/۰۱۲۵۱	
T6-2-3	۰/۰۱۷۰۳	۰/۰۱۵۰۱	۰/۰۱۴۵۱	۰/۰۱۳۲۴	۰/۰۱۱۸۸	
BCIZ	۰/۰۱۳۰۲	۰/۰۱۱۷۴	۰/۰۱۲۰۸	۰/۰۱۱۶۴		[4]
CMT		۰/۰۱۳۴۶	۰/۰۱۲۱۸	۰/۰۱۱۹۳	۰/۰۱۱۷۷	[11]
DKT	۰/۰۱۲۴۸	۰/۰۱۱۶۹	۰/۰۱۱۶۶	۰/۰۱۱۶۳	۰/۰۱۱۶۲	۰/۰۱۱۶۱ [14]
RT9	۰/۰۱۲۱۷	۰/۰۱۱۴۸	۰/۰۱۱۵۳	۰/۰۱۱۵۹		[15]
NCQ		۰/۰۱۱۳۸		۰/۰۱۱۵۴	۰/۰۱۱۵۹	[16]
Zhong	۰/۰۱۴۰۸	۰/۰۱۳۰۲	۰/۰۱۱۹۷	۰/۰۱۱۸۴	۰/۰۱۱۷۱	[17]
AFSIQ	۰/۰۱۰۴۴	۰/۰۱۱۳۷	۰/۰۱۱۴۸	۰/۰۱۱۵۰	۰/۰۱۱۵۹	[18]
Exact			۰/۰۱۱۶			[13]

می‌باشد و در هر گره ۳ درجه آزادی دارد. این جزء به وسیله زنجنگ و وانجی ارائه گردیده است [18].

برای جزءهایی که در جدول (۳) درج گردیده‌اند، همگرایی تغییر مکان مرکز صفحه در شکل (۶) رسم شده است. در این شکل درصد خطای تغییر مکان در مرکز صفحه محاسبه شده و در روی محور عمودی آورده شده است. در روی محور افقی تعداد جزءها نمایش داده شده‌اند.

جزء Zhong یک جزء مثلثی است. این جزء ۳ گره و سه درجه آزادی در هر گره دارد. افزون بر آن، دو درجه آزادی دورانی نیز در داخل جزء در نظر گرفته می‌شود که در فرآیند تحلیل آنها حذف می‌شوند. جزء مورد بحث به وسیله زهونگیان و با استفاده از روش تابع اولیه گیری کاهش یافته ارائه شده است [17].

جزء AFSIQ یک جزء مستطیلی با ۴ گره در گوشه‌ها



شکل ۶- همگرایی تغییر مکان مرکز صفحه مربعی با تکیه‌گاههای ساده

شرایط مرزی این صفحه به قرار زیر است:

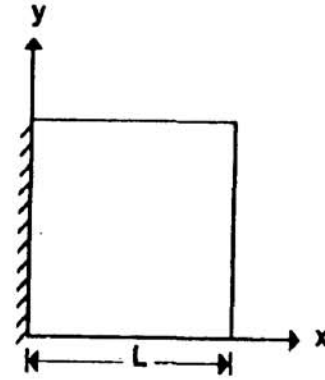
$$(۴) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad w = 0 \quad \text{: در روی}$$

محور y مقدار تغییر مکان سر آزاد سازه از رابطه زیر محاسبه می‌شود [19]:

$$w = 0.125 \frac{qL^4}{D} \quad (۵)$$

در جدول (۴) مقدار تغییر مکان در لبه آزاد صفحه برای سه جزء مطالعه شده و دو مرجع آورده شده است. همگرایی تغییر مکان در لبه آزاد صفحه برای جزءهایی که در جدول (۴) درج گردیدند، در شکل (۸) رسم شده است.

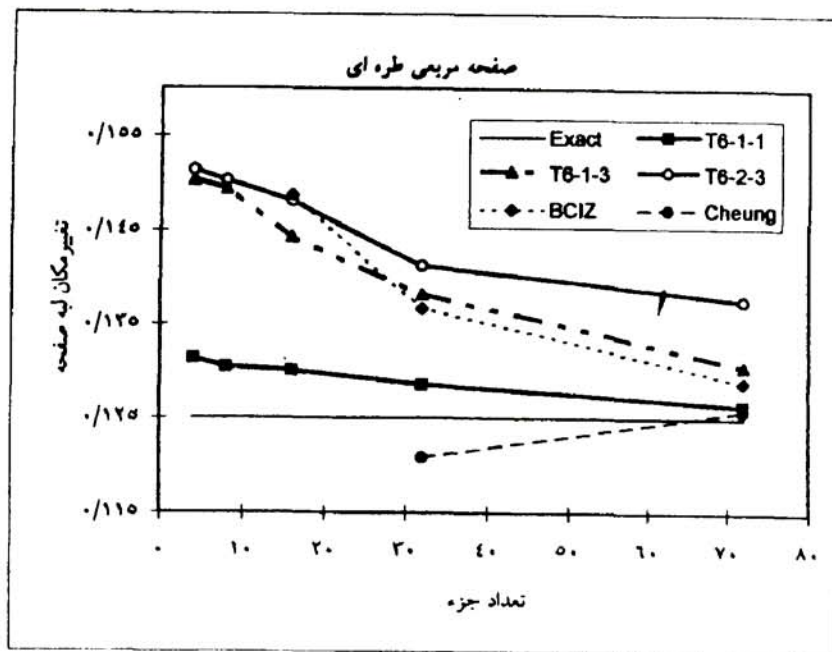
در این مثال یک صفحه مربعی طره‌ای تحلیل می‌شود. این سازه زیر اثر بار گسترده یکنواخت با شدت q بوده و طول هر پهلوی آن L می‌باشد. در شکل (۷) این سازه نشان داده شده است.



شکل ۷- صفحه مربعی طره‌ای

جدول ۴- تغییر مکان در لبه آزاد صفحه مربعی طره‌ای

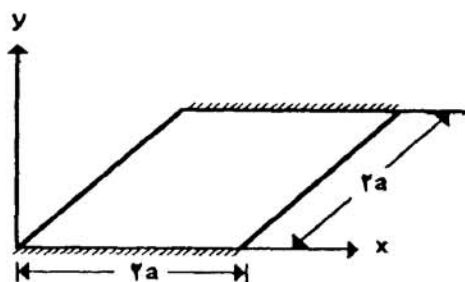
تعداد جزء						مرجع
جزء	۴	۸	۱۶	۳۲	۷۲	
T6-1-1	۰/۱۳۱۳۰۶۴	۰/۱۳۰۳۹۹۷	۰/۱۳۰۰۲۱۱	۰/۱۲۸۵۴۷۶	۰/۱۲۶۳۰۸۶	
T6-1-3	۰/۱۵۰۳۲۱۱	۰/۱۴۹۳۹۲۴	۰/۱۴۴۳۰۸۶	۰/۱۳۸۲۱۴۳	۰/۱۳۰۵۱۶۴	
T6-2-3	۰/۱۵۱۳۴۱۶	۰/۱۵۰۲۷۳۲	۰/۱۴۸۱۱۲۳	۰/۱۴۱۳۰۶۴	۰/۱۳۷۵۴۷۶	
BCIZ				۰/۱۲۶۷		[4]
Cheung				۰/۱۲۳۹	۰/۱۲۵۸	[20]
Exact	۰/۱۲۵					[19]



شکل ۸ - همگرایی تغییر مکان لبه برای صفحه مربعی طره‌ای

انواع شبکه‌بندی که برای صفحه مورب استفاده می‌شود در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

در این مثال یک صفحه مورب با زاویه ۳۰ درجه تحلیل می‌شود. سازه مزبور، مطابق شکل (۹)، در دو لبه، روی محور x و موازی محور x، دارای تکیه‌گاه گیردار و در دو لبه دیگر آزاد می‌باشد. بار وارد بر سازه یک بار متمرکز P در مرکز صفحه خواهد بود. شرایط مرزی برای دو لبه دارای تکیه‌گاه به صورت زیر است:



شکل ۹ - صفحه مورب با تکیه‌گاه گیردار

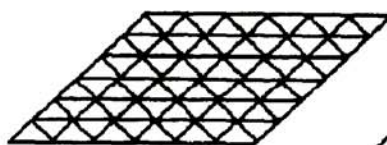
$$w = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (۶)$$



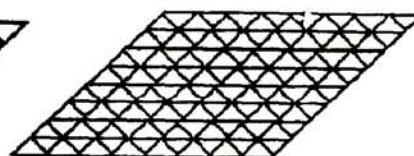
جزء ۸



جزء ۳۲



جزء ۷۲



جزء ۱۲۸

شکل ۱۰ - شبکه‌بندی برای صفحه مورب

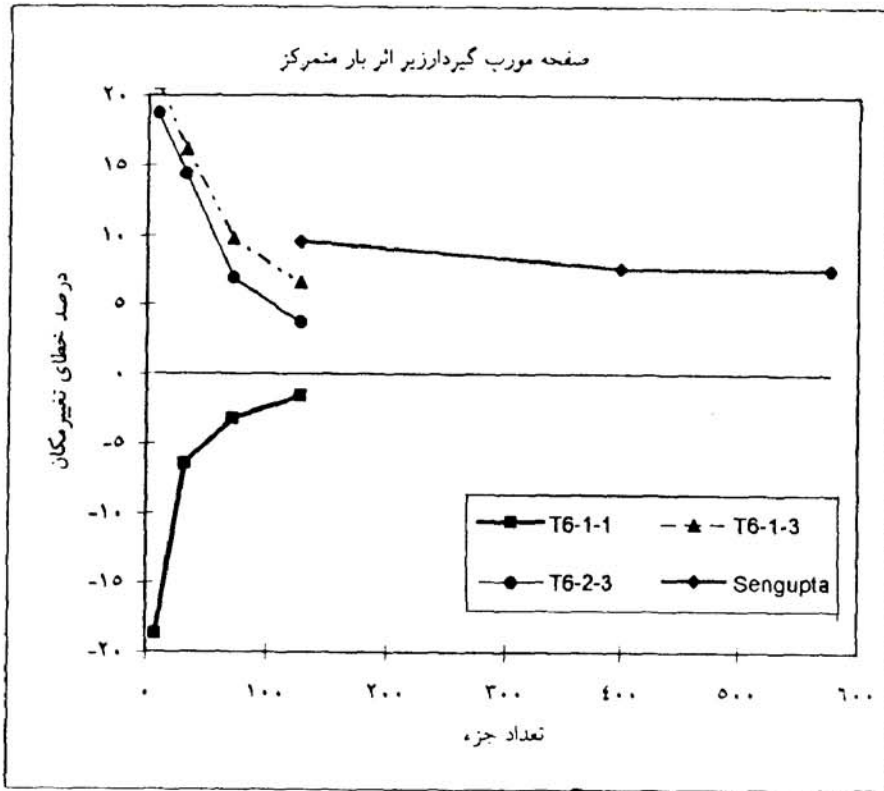
در جدول (۵) نتایج تغییر مکان مرکز صفحه ارائه گردیده است. برای این جزء‌ها همگرایی تغییر مکان و درصد خطای آن در شکل (۱۱) رسم شده است.

مقدار دقیق تغییر مکان در مرکز صفحه از رابطه زیر بدست می‌آید [21]:

$$w_c = 0.0759 \frac{Pa^2}{D} \quad (۷)$$

جدول ۵ - تغییر مکان مرکز صفحه مورب گیردار با بار متمرکز

جزء	تعداد جزء				۴۰۰	۵۷۶	مرجع
	۸	۳۲	۷۲	۱۲۸			
T6-1-1	۰/۰۶۱۷۰	۰/۰۷۱۰۳	۰/۰۷۳۴۷	۰/۰۷۴۶۹			
T6-1-3	۰/۰۹۱۷۵	۰/۰۸۸۱۵	۰/۰۸۳۲۷	۰/۰۸۰۸۶			
T6-2-3	۰/۰۹۰۱۲	۰/۰۸۶۸۴	۰/۰۸۱۱۳	۰/۰۷۸۷۴			
Sengupta				۰/۰۸۳۱۵	۰/۰۸۱۶۸	۰/۰۸۱۶۶	[21]
Exact			۰/۰۷۵۹				[21]

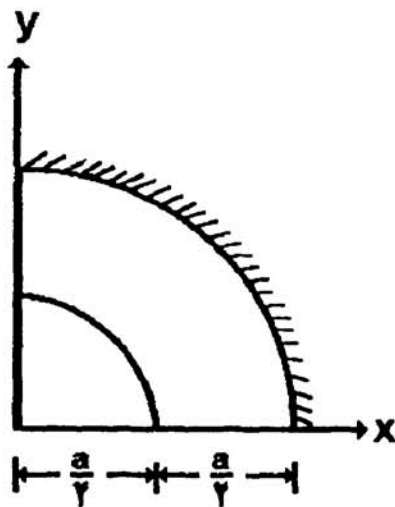


شکل ۱۱ - همگرایی تغییر مکان مرکز صفحه مورب گیردار با بار متمرکز

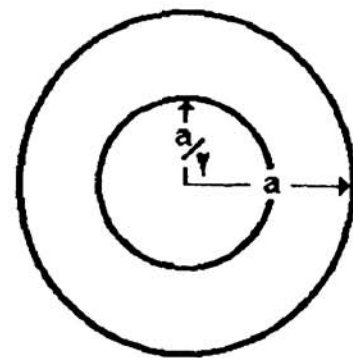
تکیه‌گاههای بیرونی سازه‌گیردار و لبه داخلی آن آزاد می‌باشد. یک بار گسترده یکنواخت با شدت q بر صفحه وارد می‌شود. به دلیل تقارن سازه، مطابق شکل (۱۳)، فقط از یک چهارم صفحه برای تحلیل استفاده می‌گردد.

۴-۴ - صفحه دایره‌ای سوراخدار

در این مثال یک صفحه دایره‌ای که دارای یک سوراخ دایره‌ای شکل در مرکز آن می‌باشد، تحلیل می‌گردد. شعاع داخلی، مطابق شکل (۱۲)، نصف شعاع دایره است.



شکل ۱۳ - یک چهارم صفحه دایره‌ای سوراخدار

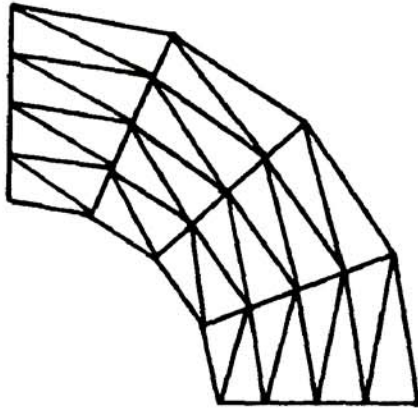


شکل ۱۲ - صفحه دایره‌ای سوراخدار

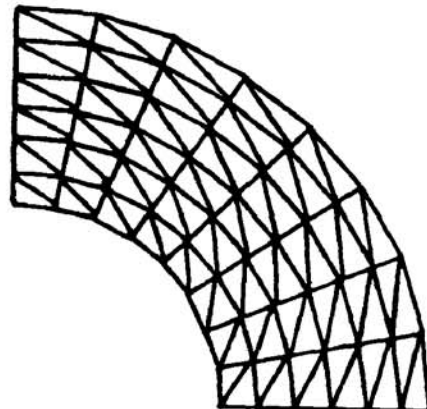
برای این سازه از دو نوع شبکه‌بندی، مطابق شکل (۱۴)، استفاده می‌گردد.

مقدار دقیق تغییر مکان بیشینه برای این سازه در لبه داخلی صفحه بوده و از رابطه زیر حساب می‌شود [19].

$$W_{max} = 0.0575 \frac{qa^4}{EI^3} \quad (8)$$



جزء ۳۲



جزء ۹۶

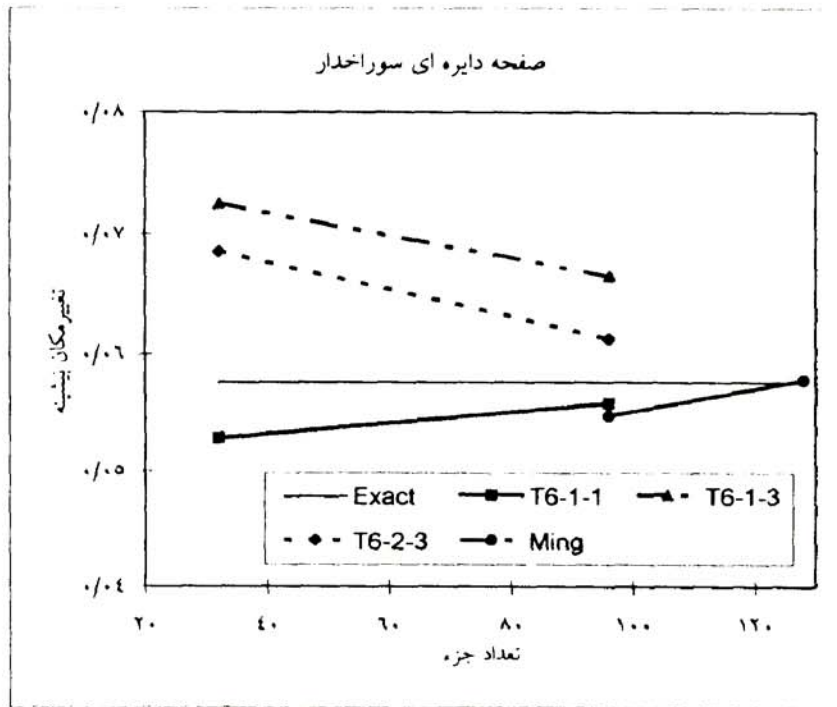
شکل ۱۴ - شبکه‌بندی برای صفحه دایره ای سوراخدار

جدول مزبور، نمودار همگرایی تغییر مکان بیشینه در شکل (۱۵) رسم شده است.

در جدول (۶) نتایج تغییر مکان بیشینه برای صفحه دایره‌ای سوراخدار درج گردیده است. بر اساس مقدارهای موجود در

جدول ۶- تغییر مکان بیشینه برای صفحه دایره‌ای سوراخدار

جزء	تعداد جزء			مرجع
	۳۲	۹۶	۱۲۸	
T6-1-1	۰/۰۵۲۸۵	۰/۰۵۵۸۴		
T6-1-3	۰/۰۷۲۵۵	۰/۰۶۶۴۸		
T6-2-3	۰/۰۶۸۵۳	۰/۰۶۱۲۴		
Ming		۰/۰۵۷۸		[22]
Exact		۰/۰۵۷۶		[19]



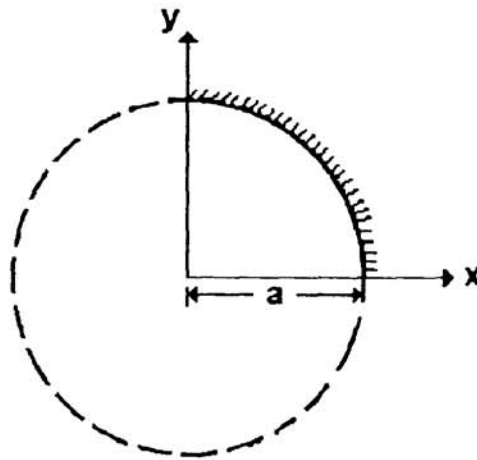
شکل ۱۵- همگرایی تغییر مکان برای صفحه دایره‌ای سوراخدار

برای تحلیل استفاده می‌شود. شعاع صفحه a و شدت بار وارد بر آن q می‌باشد. مقدار دقیق تغییر مکان در مرکز صفحه از رابطه زیر بدست می‌آید [13]:

$$W_c = 1/0.0228 \frac{qa^4}{D} \quad (9)$$

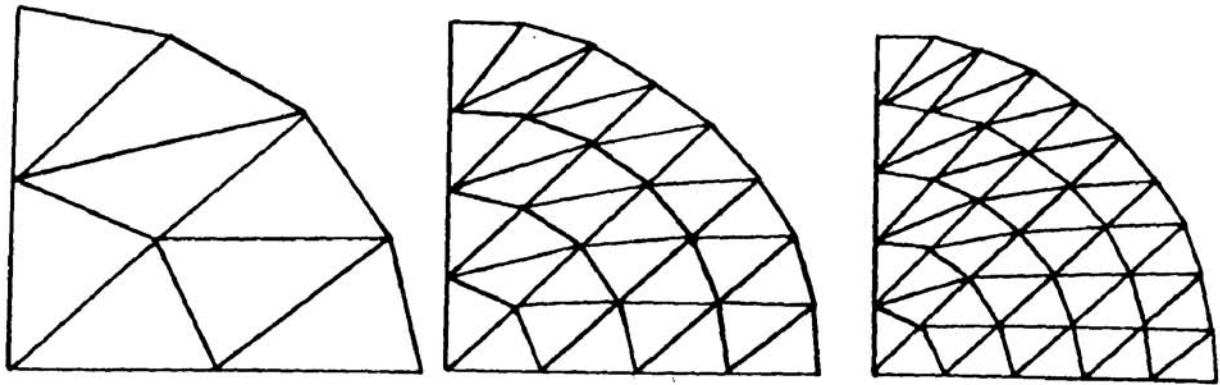
۴-۵- صفحه خمشی دایره‌ای

در این مثال یک صفحه دایره‌ای با تکیه‌گاههای گیردار و زیر اثر بار گسترده یکنواخت تحلیل می‌گردد. به دلیل وجود تقارن در سازه، مطابق شکل (۱۶) فقط از یک چهارم آن



شکل ۱۶ - صفحه خمشی دایره‌ای

انواع شبکه‌بندی که در این مثال مورد استفاده قرار می‌گیرد، در شکل (۱۷) نمایش داده شده است.



۸ جزء

۲۲ جزء

۵۰ جزء

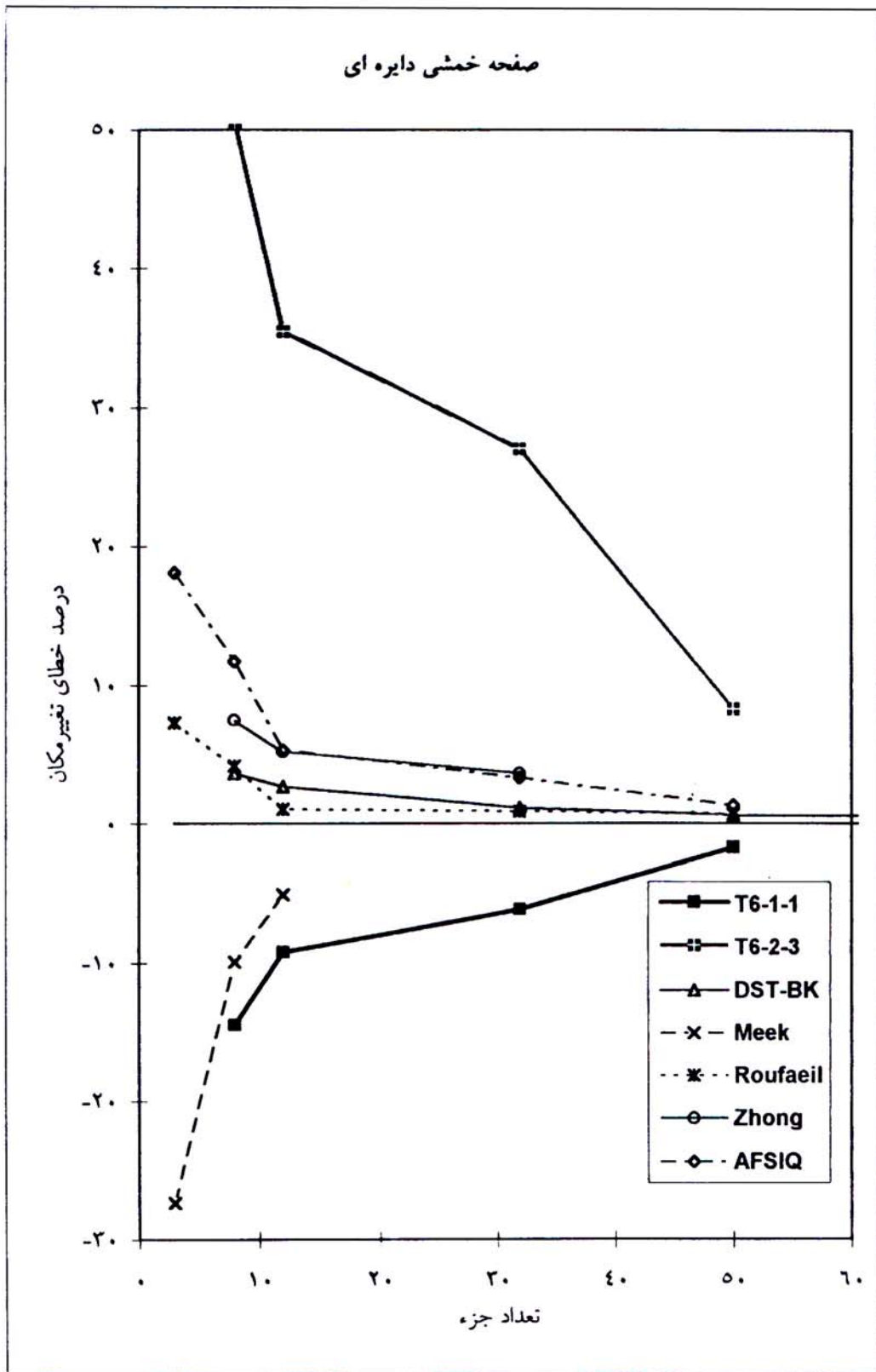
شکل ۱۷- شبکه‌بندی برای صفحه خمشی دایره‌ای

تغییر مکان محاسبه شده و نمودارهای همگرایی تغییر مکان در شکل (۱۸) رسم شده است.

نتایج تغییر مکان برای مرکز صفحه در جدول (۷) درج گردیده است. بر اساس نتایج بدست آمده در صد خطای

جدول ۷- تغییر مکان مرکز صفحه خمشی دایره‌ای

جزء	تعداد جزء						مرجع
	۳	۸	۱۲	۳۲	۵۰	۹۶	
T6-1-1		۰/۸۵۷۰۸		۰/۹۴۰۷۳	۰/۹۸۵۳۰		
T6-2-3		۱/۵۰۸۴۶		۱/۲۷۳۵۲	۱/۰۴۵۲۳		
DST-BK		۱/۰۰۸۳۹	۱/۰۰۹۰۰	۱/۰۰۹۶۰	۱/۰۰۶۸۹	۱/۰۰۴۱۸	[23]
Meek	۰/۷۲۸۰۶	۰/۹۰۲۷۵	۰/۹۵۱۴۶				[11]
Roufaeil	۱/۰۷۵۵۵	۱/۰۴۴۱۸	۱/۰۱۲۷۰	۱/۰۱۱۱۰	۱/۰۰۹۱۰		[24]
Zhong		۱/۰۷۷۶۵	۱/۰۵۲۶۰	۱/۰۳۸۴۶			[17]
AFSIO	۱/۱۸۳۹۴	۱/۱۱۹۸۵	۱/۰۵۵۷۰	۱/۰۳۵۶۶	۱/۰۱۵۶۱		[18]
Exact				۱/۰۰۲۲۸			[13]



شکل ۱۸- همگرایی تغییر مکان مرکز صفحه خمشی دایره‌ای

بوده و شکل آنها مثلثی است. با وجود این، محل گره و نیز درجه‌های آزادی وابسته به آن در نتایج تحلیل بسیار مؤثر می‌باشند. باید افزود، نمونه‌های عددی بسیاری حل شده، که به دلیل محدودیت حجم مقاله، نمی‌توان کلیه آنها را ارائه کرد. با این حال، همه پاسخهای بدست آمده این نتایج را تأیید می‌کنند.

بر اساس پاسخهای بدست آمده مشخص شد که اجزای مثلثی شش‌گرمی مطالعه شده همه دارای توانایی یکسانی نیستند. از میان ده جزء مطالعه شده، بهترین جزء T6-1-1 و پس از آن به ترتیب، T6-2-3 و T6-1-3 قرار دارند. خاطر نشان می‌سازد که تعداد درجه‌های آزادی همه این اجزاء برابر با ۲۱

مراجع

- [1] Mackerle, J. "Static and dynamic analysis of plate using finite element and boundary element techniques-a bibliography (1992-1994)", *Finite Element in Analysis and Design*, Vol.20, pp. 139-154, 1995.
- [2] Hrabok, M.M. and Hruday, T.M. "A review and catalogue of plate bending finite elements", *Computers & Structures*, Vol.19, pp. 479-495, 1984.
- [3] Dhatt, G. and Touzot, G. "The finite element method displayed", John Willy & Sons, 1984.
- [4] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. "The finite element method", 4th Edition, Volume 2, McGraw-Hill, 1991.
- [5] Weaver, W. and Johnston, P.R. "Finite elements for structural analysis", Prentice Hall, Engelwod Cliffs, New Jersey, 1984.
- [6] Dawe, D.J. "Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures", Oxford University Press, New York, 1984.
- [7] Dunne, P.C. "Complete polynomial displacement fields for the finite element method", *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol.72, pp. 245-246, and pp. 709-711, 1968.
- [8] Argyris, J. H., Frid, I., and Scharpf, D.W. "The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method", *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical*, Vol.72, pp. 701-709, 1986.
- [9] Bell, K. "A refined triangular plate bending finite element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.1, pp. 101-122, 1969.
- [10] Irons, B.M. "A conforming quartic triangular element for plate bending", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.1, pp. 29-45, 1969.

- [11] Morley, L.S.D. "The constant moment plate bending element", *J. Strain Anal.*, Vol.6, pp. 20-24, 1971.
- [12] Morley, L.S.D. "The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems", *The Aeronautical Quarterly*, Vol.19, pp. 149-169, 1968.
- [13]. Ugural, A.C., *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1981.
- [14]. Batoz, J.L., Bathe, K.J. and Lee Wing Ho "A study of three-node triangular plate bending elements", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.15, pp. 1771-1812, 1980.
- [15]. Cheung, Y.K. and Wanji, C. " Refind nine-parameter triangular thin plate bending element by using refind direct stiffness method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 283-298, 1995.
- [16] Liu, I.W. and Lin, C.C. "A new conforming quadrilateral plate bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp.2921-2937, 1993.
- [17] Zhongnian, X. "A thick-thin triangular plate element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.33, pp.963-973, 1992.
- [18] Zhenfeng, Zhao and Wanji, C. "New finite element model for analysis of Kirchhoff plate", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.38, pp. 1201-1214, 1995.
- [19] Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Kriger, S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [20] Cheung, Y.K. and Chan, H.C. "A family of rectangular bending element", *Computer & Structures*, Vol.10, pp. 613-619, 1979.
- [21]. Sengupta, D. "Performance study of a simple finite element in the analysis of skew rhombic plates", *Computers & Structures*, Vol.54, pp. 1173-1182, 1995.
- [22]. Ming, P.G. and Fa, L.S. "A new element used in the non-orthogonal boundary plate bending theory-an arbitrarily quadrilateral element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 1031-1042, 1987.
- [23]. Batoz, J.L. and Katili, I. "On a simple triangular reissner-mindline plate element based on incompatible modes and discrete constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.35, pp. 1603-1632, 1992.
- [24]. Roufaeil, O.L. "A new four-node quadrilateral plate bending element", *Computers & Structures*, Vol.54, pp. 871-879, 1995 .

Study of Several Six-Node Triangular Elements in Plate Bending Analysis

M. Rezaiee-Pajand and M.R. Akhtary

Department of Civil Engineering,

Ferdowsi University

Mashhad, Iran.

Abstract

This study investigates the bending behavior of thin plates using finite element method. First, the presented elements are briefly reviewed and then, the elements with six nodes are discussed. Ten different types of six-node triangular elements for plate bending analysis are considered in this study. A computer program, which is written by the authors, is utilized to solve a variety of the problems using these elements. Finally, the results are compared with the ones obtained by other investigators.