یک فن بهینه سازی در خرپای مستوی

دکتر محمد رضایی‌پژند (دانشیار) و علی زارع بهاری (کارشناس ارشد سازه)
دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی «مشهد»

چکیده

از بهینه‌سازی شکل خرپاهای دو بعدی سخن به میان می‌آید. روابط جدیدی برای تحلیل بهینه این گونه سازه‌ها ارائه خواهد شد. روش مورد بحث، متغیرهای طراحی محدودی را به کار می‌گیرد و حجم سازه را کمینه می‌کند. سرعت بهینه‌سازی خرپاهای دو بعدی با روابط داده شده زیاد می‌باشد. چگونگی کار روش به وسیله یک مثال به نظر خوانندگان می‌رسد.

پیشگفتار

بیش از یک قرن از ارائه فنون بهینه‌سازی سازه‌ها می‌گذرد. کارهای اولیه بر اساس روشهای تحلیلی استوار بوده و کم‌کم با فراهم شدن زمینه، روشهای عددی جایگاه برتری یافتند. در واقع، پس از گسترش روز افزون رایانه‌ها در نیمه دوم قرن بیستم، بهینه‌سازان نیز از این ابزار استفاده شایان نمودند. به دلیل فراوانی متغیرهای طراحی و نیز محدودیت‌های مساله، بهینه‌سازی با فنون عددی بسیار کارساز ولی کُند می‌باشد.

بزرگترین مشکل بهینه‌سازی شکل خرپاها در تعداد زیاد متغیرهای طراحی و محدودیت‌ها می‌باشد. در این نوشته، نخست مساله بهینه‌سازی شکل خرپای دو بعدی و بردارهای گرادیان آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه با استفاده از روابط پیشنهادی مساله بهینه‌سازی جدید و تحلیل حساسیت آن ارائه خواهد شد. در پایان، نتایج به نظر خوانندگان می‌رسد.

مساله بهینه‌یابی

برنامه بهینه‌یابی زیر در نظر گرفته می‌شود [S1]. از این روابط استفاده شده و مشتقات خرپای دو بعدی محاسبه می‌گردد.

کمینه: $W = W(A, X_c)$ (۱)

محدودیت سختی: $S(A, D, X_c) - P_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots NS$ (۲)

محدودیت تنش: $\sigma_i(A, D, X_c) - \sigma_{ip} \le 0 \qquad i = NS + 1, \dots NS + NM$ (۳)

محدودیت تغییر مکان گرهی: $D - \Delta \le 0$ (۴)

محدودیت مختصات گرهی: $X_L \le X_c \le X_u$ (۵)

نامنفی بودن متغیرها: $A, X_c \ge 0$ (۶)

در روابط درج شده، X_c بردار مختصات گرهی، X_u و X_L به ترتیب کرانه بالا و پائین مختصات گرهی را نشان می‌دهد. عامل Δ تغییرمکان مجاز، NS تعداد معادلات حاکم - درجات آزادی - و NM تعداد اعضاء خرپا می‌باشد. بطور معمول تابع هدف را برابر وزن سازه در نظر گرفته و به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$W = \sum_{i=1}^{NM} \rho_i A_i L_i \qquad (۷)$$

$$L_i = |(X_s - X_f)_2 + (Y_s - Y_f)_2|_{1/2} \qquad (۸)$$

در این رابطه زیر نویسهای s و f نشان دهنده سر و ته عضو می‌باشند. باید دانست، ماتریس سختی اعضاء تابعی غیر خطی از متغیرهای طراحی می‌باشد. در ادامه هر یک از این توابع حساب شده و به جای محدودیت سختی جانشین می‌شوند. برای این

منظور نخست ماتریس سختی یک عضو خرپای به صورت رابطه (۹) نوشته می‌شود:

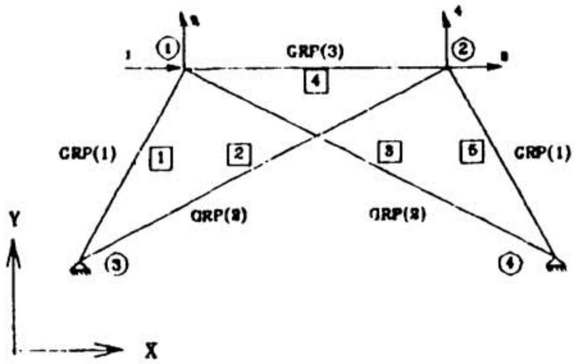
$$[K_i] = A_i \begin{pmatrix} b_i & c_i & -b_i & -c_i \\ c_i & d_i & -c_i & -d_i \\ -b_i & -c_i & b_i & c_i \\ -c_i & -d_i & c_i & d_i \end{pmatrix} \tag{۹}$$

$$\left\{ b_i \ , c_i \ , d_i \right\}^T = \frac{E}{L_i^3} \left\{ (X_s - X_f)^2 ,\ (X_s - X_f)(Y_s - Y_f) \ ,\ (Y_s - Y_f)^2 \right\}^T \tag{۱۰}$$

اینک به بررسی ماتریس سختی کل پرداخته می‌شود. باید دانست که هر درایه ماتریس سختی کل در هر درجه آزادی از یک گره برابر با مجموع سختی اعضاء متصل شده به آن گره در همان درجه آزادی می‌باشد. این ماتریس را می‌توان بر حسب متغیرهای سطح مقطع تفکیک نمود. روش کار به این صورت است که هر یک از ستونهای ماتریس سختی مربوط به درجات آزادی گره i را به N_i ستون تبدیل می‌کنند. M_i تعداد کل گروههای سطح مقطع متصل به گره i می‌باشد. اگر 2N تعداد درجات آزادی سازه باشد، در این صورت ماتریس سختی به یک ماتریس 2N سطری و $2\sum_{i=1}^{N} M_i$ ستونی تبدیل می‌شود. برای درک بهتر بحث کنونی خرپای شکل (۱) درنظر گرفته می‌شود. در این خرپا گرههای ۱ و ۲ آزاد و به هر کدام از آنها سه گروه سطح مقطع وصل می‌گردد. پس در حالت تفکیک بر حسب متغیرهای سطح مقطع تعداد ۱۲=(۳+۳)×۲ ستون برای ماتریس کل وجود دارد.
ماتریس سختی را در حالت مزبور به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$\begin{vmatrix} b^1_1A_1 & b^3_2A_2 & b^4_3A_3 & c^1_1A_1 & c^3_2A_2 & c^4_3A_3 & 0 & 0 & -b^4_3A_3 & 0 & 0 & c^4_3A_3 \\ c^1_1A_1 & c^3_2A_2 & c^4_3A_3 & d^1_1A_1 & d^3_2A_2 & d^4_3A_3 & 0 & 0 & -c^4_3A_3 & 0 & 0 & -d^4_3A_3 \\ 0 & 0 & -b^4_3A_3 & 0 & 0 & -c^4_3A_3 & b^5_1A_1 & b^2_2A_2 & b^4_3A_3 & c^5_1A_1 & c^2_2A_2 & c^4_3A_3 \\ 0 & 0 & -c^4_3A_3 & 0 & 0 & -d^4_3A_3 & c^5_1A_1 & c^2_2A_2 & c^4_3A_3 & d^5_1A_1 & d^2_2A_2 & d^4_3A_3 \end{vmatrix} \times$$

(۱۱)



شکل (۱) خرپای پنج عضوی

در روابط درج شده b^i_k ، c^i_k و d^i_k سهم عضو i ام از k امین گروه سطح مقطع می‌باشد. معادله اول رابطه (۱۱) را می‌توان به [illegible] زیر درج نمود:

$$(b^1_1 A_1 + b^3_2 A_2 + b^4_3 A_3)D_1 + (c^1_1 A_1 + c^3_2 A_2 + c^4_3 A_3)D_2 - b^4_3 A_3 D_3 - c^4_3 A_3 D_4 = P_1 \quad (۱۲)$$

با نوشتن سه معادله دیگر و سپس جایگزینی معادلات (۱۰) در آنها، چهار معادله -که به طور صریح با متغیرهای طراحی A ، D و مختصات گرهی ارتباط دارند- به دست می‌آید. در ادامه همین کار برای محدودیت‌های دیگر نیز انجام می‌شود. نخست محدودیت تنش بر حسب متغیرهای طراحی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\sigma_i = -U_i D_{xf} - V_i D_{yf} + U_i D_{xs} + V_i D_{ys} \quad (۱۳)$$

در این رابطه D_{xs} و D_{ys} تغییر مکان افقی و قائم گره s می‌باشد. عامل های U_i و V_i به صورت زیر خواهند بود:

$$\left\{ U_i \ , \ V_i \right\}^T = \left\{ \frac{E(X_s - X_f)}{L_i^2} \ , \ \frac{E(Y_s - Y_f)}{L_i^2} \right\} \quad (۱۴)$$

بردارهای گرادیان محدودیت‌ها

اکنون بردارهای گرادیان محدودیت‌ها نسبت به متغیرهای طراحی حساب می‌شوند. متغیرهای طراحی بـه صـورت زیـر می‌باشند:

$$v = \{A, D, X_c\}$$
$$A = \{A_1, ..., A_{NG}\}$$
$$X_c = \{X_{c1}, Y_{c1}, ..., X_{cj}, X_{cj}\}$$
$$D = \{D_1, D_2, ..., D_{2N})\} \quad (۱۵)$$

در رابطه درج شده عامل NG تعداد گروههای اعضاء است. مقادیر N و j تعداد گرههای آزاد و گرههای با مختصات متغیر را نشان می‌دهند. در ادامه به محاسبه مشتقات محدودیت سختی پرداخته می‌شود. مشتق ماتریس سختی کل سازه نسبت به یک متغیر طراحی را می‌توان با سوار کردن یکایک مشتقات ماتریس‌های سختی اجزاء سازه نسبت به آن متغیر به دست آورد. رابطه سختی و مشتقات آن به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$S(A, D, X_c) = [K(A, X_c)]\{D\} - \{P\} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial A_i} = \left[\frac{\partial K(A, X_c)}{\partial A_i}\right] \{D\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial X_{ci}} = \left[\frac{\partial K(A, X_c)}{\partial X_{ci}}\right] \{D\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial D_i} = [K(A, X_c)] \quad (۱۶)$$

مقدار $\partial K(A, X_c)/\partial X_{ci}$ با توجه به معادلات (۱۰) برای یک نمونه به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\frac{\partial b_i}{\partial X_f} = \frac{-\partial b_i}{\partial X_s} = \frac{E(X_s - X_f)}{L_i^3} \left[-2 + \frac{3(X_s - X_f)^2}{L_i^2}\right] \quad (۱۷)$$

محدودیت تنش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma(D, X_c) = [B(X_c)]\{D\} - \{\sigma_p\} \leq 0 \qquad (18)$$

در رابطه اخیر، B تابعی از مختصات گرهی می‌باشد. مشتقات رابطه تنش به صورت زیر قابل ارائه است:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial D_i} = [B(X_c)] \left\{ \frac{\partial D}{\partial D_i} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X_{ci}} = \left[\frac{\partial B(X_c)}{\partial X_{ci}} \right] \{D\} \qquad (19)$$

جزئیات مشتقات معادلات تنش بر حسب متغیرهای مختصات را با در نظر داشتن رابطه (۱۳ و ۱۴) برای یک می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_f} = \frac{-\partial U_i}{\partial X_s} = E \left[\frac{-L_i^2 + 2(X_s - X_f)^2}{L_i^4} \right] \qquad (20)$$

مساله بهینه‌سازی تقریبی

با استفاده از بردارهای گرادیان محاسبه شده می‌توان دنباله خطی هر یک از محدودیت‌های غیر خطی را نوشت و مساله بهینه‌سازی را به صورت خطی ارائه نمود. مساله نامبرده در زیر نوشته شده است:

کمینه: $W = W(V_0) + \nabla W(V_0)[V_1 - V_0]$

محدودیت سختی: $S_i(V_0) + \nabla S_i(V_0)[V_1 - V_0] = 0$

محدودیت تنش: $\sigma_i(V_0) + \nabla \sigma_i(V_0)[V_1 - V_0] \leq 0$

محدودیت تغییر مکان: $D - \Delta < 0$

محدودیت سطح مقطع: $(1 - m)A_0 < A_1 < (1 + m)A_0$

محدودیت مختصات گرهی: $(1 - m)X^0{}_c < X^1{}_c < (1 + m)X^0{}_c$ (۲۱)

در روابط درج شده، m درصدی انتخابی می‌باشد. مساله (۲۱) به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. پس از به دست آوردن پاسخ بهینه، دنباله تیلور گرد نقطه بهینه جدید نوشته می‌شود تا تقریب مناسب برای پاسخ بهینه به دست آید. تاکنون از مختصات گرهی خرپا به عنوان متغیر طراحی استفاده گردید. در بخش بعدی روش جدیدی بر اساس وابسته نمودن گره‌های خرپا توسط توابعی ارائه می‌شود.

تحلیل حساسیت با جزء هم عامل

اینک برای کم نمودن تعداد متغیرهای طراحی مختصات، روش جدیدی برای بهینه‌سازی شکل خرپاها ارائه می‌شود. در روش پیشنهادی مختصات گرهی خرپا، به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته نمی‌شود، بلکه مختصات تعدادی از نقاط یک تابع فرضی به عنوان متغیر طراحی اختیار می‌شوند. بین نقاط فرضی و مختصات گرهی خرپا روابطی برقرار است.

باید دانست که مختصات گره‌های کلیدی در این نوشته، گره‌هایی هستند که مختصات آنها به عنوان متغیر طراحی در مساله بهینه یابی ظاهر می‌شوند. در این میان مختصات گره‌های دیگر نیز توسط توابعی با مختصات گره‌های کلیدی رابطه دارند و دارای مختصات متغیر می‌باشند ولی آنها به عنوان متغیر طراحی به کار نمی‌روند.

به دلیل پرهیز از روابط طولانی و درک بهتر روش، مساله به صورت دو بعدی در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور یک

جزء طراحی مستوی با مختصات کلی X ، Y و مختصات محلی ξ و η در نظر گرفته می‌شود. چنانچه $N_i(\xi, \eta)$ نشان دهنده تابع شکل جزء طراحی باشد، مختصات نقاط داخلی جزء با استفاده از معادلات زیر به مختصات گره‌ها ارتباط داده می‌شود:

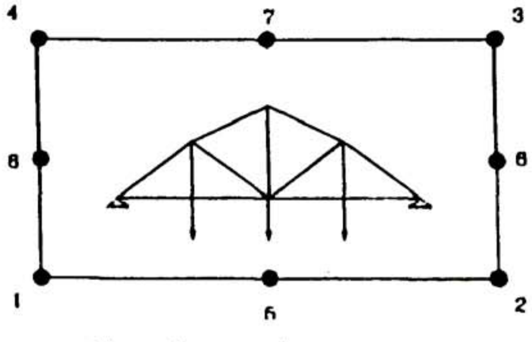
$$x = \sum_{i=1}^{nk} N_i(\xi,\eta)\ X_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{nk} N_i(\xi,\eta)\ Y_i \tag{۲۲}$$

در این روابط X_i و Y_i مختصات گره‌های جزء و X و Y مختصات نقاط داخلی جزء طراحی می‌باشد. nk تعداد گره‌های کلیدی است. باید دانست که هر یک از نقاط گرهی این جزء طراحی به عنوان گره کلیدی و هر یک از مختصات گره‌های کلیدی را می‌توان به عنوان متغیر طراحی مستقل برگزید.

محاسبه بردارهای گرادیان در روش جدید

به منظور درک بهتر از روش پیشنهادی، شکل (۲) درنظر گرفته می‌شود. برای بهینه یابی شکل خرپا در این حالت می‌توان مختصات گره‌های خرپا را به عنوان متغیر طراحی در نظر نگرفت، بلکه از مختصات گره‌های جزء طراحی -گره‌های یک تا هشت - استفاده نمود. چگونگی ارتباط مختصات گره‌های خرپا با مختصات گره‌های جزء طراحی بوسیله توابع شکل یک جزء هم عامل هشت گرهی انجام می‌گیرد.



شکل (۲) خرپای محاط شده توسط جزء طراحی

تاکنون مشتقات روابط تعادل، تنش‌های عضوی و وزن خرپا نسبت به متغیرهای مختصات گرهی خرپا ارائه شده‌اند. اینک با استفاده از معادلات درج شده و نیز رابطه تبدیل مختصات، مشتقات نسبت به متغیرهای مختصات گره‌های کلیدی محاسبه می‌گردد. یادآوری می‌شود که سطح مقطع و مختصات گرهی به عنوان متغیرهای طراحی مستقل و تغییر مکان‌های گرهی به عنوان متغیرهای وابسته می‌باشند. در این جا منظور از مختصات گرهی، مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی می‌باشد. در ادامه محدودیت سختی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S(A, D, C_t) = [K(A, C_t)]\{D\} - \{P\} = 0 \tag{۲۳}$$

$$C_t = \sum_{i=1}^{nk} N_k(\xi,\eta)\ C_e \tag{۲۴}$$

در این روابط C_t و C_e به ترتیب مختصات گرهی خرپا و مختصات گره‌های جزء طراحی است. مشتقات محدودیت سختی

نسبت به متغیرهای سطح مقطع و تغییر مکان گرهی به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial A_i} \right\} = \left[\frac{\partial K(A, C_i)}{\partial A_i} \right] \{D\} \tag{۲۵}$$

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial D_i} \right\} = \left[K(A, C_i) \right] \tag{۲۶}$$

در مشتقات ارائه شده C_i از رابطه (۲۴) جایگزین می‌شود. تفاوت این مشتقات در مقایسه با مشتقات مشابه پیشین، تنها در تعریف گرهی خرپا می‌باشد. به سخن دیگر در این روابط مختصات گرهی خرپا بوسیله توابعی با مختصات گرهی جزء ارتباط دارند. در ادامه مشتق محدودیت سختی نسبت به متغیر مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی محاسبه می‌گردد:

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial C_{ei}} \right\} = \left[\frac{\partial K(A, C_i)}{\partial C_{ei}} \right] \{D\} \tag{۲۷}$$

با استفاده از قانون مشتقات زنجیره‌ای رابطه (۲۷) را می‌توان به صورت زیر ارائه ساخت:

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial C_{ei}} \right\} = \left[\frac{\partial K(A, C_i)}{\partial C_i} \times \frac{\partial C_i}{\partial C_{ei}} \right] \{D\} \tag{۲۸}$$

در رابطه (۲۸) مشتقات ماتریس سختی [K] به جای محاسبه برحسب متغیر طراحی مختصات گرهی جزء، نسبت به مختصات گرهی خرپا محاسبه می‌شود. در این رابطه C_i مختصات گره‌های خرپا می‌باشد. به سخن دیگر مشتقات ماتریس سختی اعضاء نسبت به تمام گره‌های خرپا می‌باید محاسبه گردند. در این صورت رابطه (۲۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial C_{ei}} \right\} = \left[\sum_{j=1}^{nn} \frac{\partial K(A, C_i)}{\partial C_{ij}} \times \frac{\partial C_{ij}}{\partial C_{ei}} \right] \{D\} \tag{۲۹}$$

در این جا nn تعداد گره‌های خرپا می‌باشد. در ضمن مقدار $\partial K(A, C_i)/\partial C_{ij}$ در معادلات (۱۷) محاسبه شده است. در حالت استفاده از مختصات گرهی خرپا به عنوان متغیر طراحی نیاز به محاسبه این مشتق تنها نسبت به متغیر مختصات گرهی خرپا بود. به سخن دیگر اگر در خرپا یک مختصات گرهی به عنوان متغیر طراحی انتخاب می‌شد، این مشتق فقط نسبت به آن گره برای تمامی اعضاء محاسبه می‌گردید. اینک به دلیل وابسته شدن مختصات گره‌های کلیدی جزء ، این مشتق نسبت به تمامی گره‌های خرپا و برای همه اعضاء به ازای هر متغیر مختصات کلیدی محاسبه می‌گردد. از سوی دیگر مقدار $\partial C_{ij}/\partial C_{ei}$ با استفاده از رابطه (۲۴) به صورت زیر درج می‌گردد:

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_{ei}} = N_i(\zeta_j, \eta_j) \tag{۳۰}$$

اینک می‌توان مشتق رابطه سختی را نسبت به متغیر مختصات گره‌های کلیدی به صورت رابطه زیر نوشت:

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial C_{ei}} \right\} = \left[\sum_{j=1}^{nn} \frac{\partial K(A, C_i)}{\partial C_{ij}} \times N_i(\zeta_j, \eta_j) \right] \{D\} \tag{۳۱}$$

از سوی دیگر، مشتقات محدودیت تنش برحسب سطح مقطع و تغییر مکان گرهی خرپا به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_i} = 0 \qquad (۳۲)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial D} = B(C_t) \qquad (۳۳)$$

عامل C_t برحسب C_e در رابطه (۲۴) تعریف شده است. برای محاسبه حساسیت تنش برحسب متغیر مختصات گرهی جزء طراحی از قانون مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌شود. براین اساس برای عضو K ام رابطه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial C_{ei}} = \sum_{j=1}^{nn} \frac{\partial \sigma_k}{\partial C_{tj}} \times \frac{\partial C_{tj}}{\partial C_{ei}} \qquad k = 1, \ldots, nm \qquad (۳۴)$$

در این رابطه nm تعداد اعضاء خرپا می‌باشد. مقدار $\partial C_{tj}/\partial C_{ei}$ از رابطه (۳۰) برابر با تابع شکل گره i ام جزء طراحی است. یکایک درایه‌های مشتق $\partial \sigma_k/\partial C_{tj}$ در بخش‌های پیشین محاسبه شده است. رابطه حساسیت تنش را نیز می‌توان به صورت ساده شده زیر نوشت:

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial C_{ei}} = \sum_{j=1}^{nn} \frac{\partial \sigma_k}{\partial C_{tj}} \times N_i(\zeta_j, \eta_j) \qquad k = 1, \ldots, nm \qquad (۳۵)$$

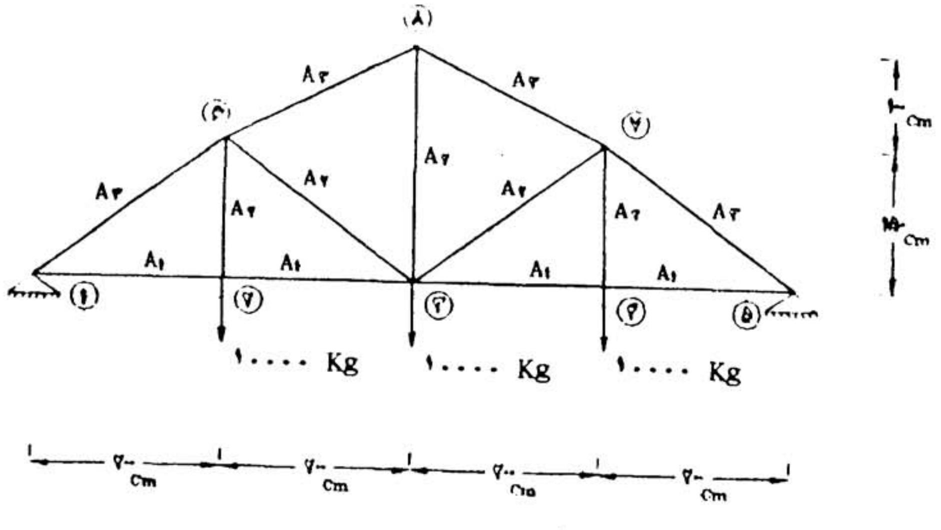
در مقایسه رابطه درج شده با رابطه مشابه در بخش پیشین -که از مختصات گرهی خرپا به عنوان متغیر طراحی استفاده شده بود- دو اختلاف مشاهده می‌شود. اولین تفاوت در قرارگرفتن یک ضریب تابع شکل جزء هم عامل در رابطه کنونی است. اختلاف دیگر در تعداد محاسبه مشتقات می‌باشد. یادآوری می‌شود که در رابطه (۱۹) مشتق تنها برحسب متغیر مختصات گرهی خرپا گرفته می‌شد در صورتی که در رابطه (۳۵) مشتقات تنش عضوی برحسب مختصات تمامی گره‌های خرپا محاسبه می‌گردد. به سخن دیگر در روابط پیشین فقط به تعداد متغیرهای مختصات خرپا از تمامی اعضاء مشتق گرفته می‌شد. حال آن‌که در رابطه کنونی می‌باید به تعداد تمام گره‌های خرپا از همه اعضاء مشتق گرفته شود و برای هر عضو مجموع آنها طبق رابطه (۳۵) در ضریب تابع شکل گره i ام جزء طراحی ضرب شود. معادلات و مشتقات (۲۴ تا ۳۵) به ازای هر نوع از اجزاء هم عامل که توابع شکلی آن در دست باشد برقرار است. به سخن دیگر فقط کافی است. خرپا را در داخل یک جزء طراحی قرار داد. این جزء می‌تواند مثلثی و یا مستطیلی با هر تعداد گره کلیدی باشد، تنها می‌باید توابع هندسی آن مشخص باشد.

پیشنهاد می‌کنند در سازه‌های پیوسته از اجزای طراحی با تعداد گره‌های کلیدی بیشتر از چهار عدد در هر پهلو استفاده نشود و به جای افزایش در تعداد گره‌ها، مرزهای سازه بوسیله چند جزء طراحی نشان داده شود. استفاده از چند جزء طراحی مرتبه پایین در سازه‌های پیوسته به دلیل پیچیده بودن روابط و مشتقات یک جزء مرتبه بالا است [W1]. یادآوری میشود که در روش ارائه شده فقط از روابط هندسی جزء هم عامل استفاده می‌گردد. چون توابع هندسی اجزاء هم عامل مرتبه بالا در دست می‌باشد پیشنهاد می‌شود همواره به جای استفاده از چند جزء طراحی از اجزاء مرتبه بالا استفاده شود. روابط حالت استفاده از چند جزء هم عامل در بهینه سازی شکل خرپاها قدری طولانی و پیچیده می‌گردد.

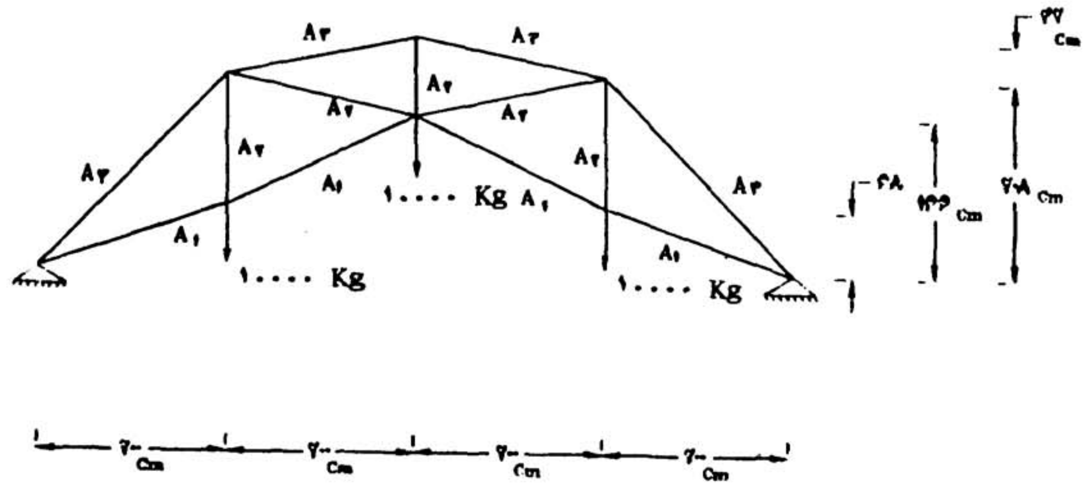
نمونه عددی

براساس روش جدید برنامه رایانه‌ای به نام SOTI2D تهیه گردید. از سوی دیگر برای مقایسه نتایج با روش استفاده مستقیم از مختصات گرهی خرپا برنامه دیگری به نام SOT2D نوشته شد. در این بخش برای نشان دادن کارآیی روش پیشنهادی و نیز آزمودن توانایی‌های آن به ارائه یک نمونه عددی پرداخته می‌شود. شکل و مقطع خرپای ۱۳ عضوی نشان داده شده در شکل (۳) با دو برنامه SOT2D و SOTI2D بهینه سازی می‌شود. در این مثال سه متغیر سطح مقطع A_1 ، A_2 و A_3 در نظر گرفته شده است. مقدار تنش‌های مجاز کششی و فشاری برابر ۱۴۰۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع و عامل کشسانی برابر ۲۰۰۰۰۰۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع می‌باشند. سطح مقطع تمامی اعضاء در آغاز تحلیل یکسان و برابر ۴۰ سانتیمتر مربع پنداشته شده است. حد بالا و پایین این متغیرها به ترتیب برابر با ۱۰۰ و ۱ سانتیمتر مربع در نظر گرفته شده است.

مختصات قائم گره‌های ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ ، ۷ و ۸ به عنوان متغیر مختصات در برنامه SOT2D معرفی گردیده‌اند. با این فرضها تعداد محدودیت‌ها ۶۲ عدد و تعداد متغیرهای طراحی ۲۱ عدد می‌باشد. در حالت ۱ و به روش مستقیم شکل خرپا پس از ۲۸ چرخه‌به‌پاسخ کمینه‌رسیده است. دراین‌حالت حجم‌خرپااز ۱۱۱۸۹۰ سانتیمترمکعب‌به ۲۵۵۰۰ کاهش یافته است. هندسه بهینه شده خرپا در شکل (۴) نشان داده شده است. سطوح مقطع بهینه برابر با A_1 =۸/۵۲۳۳ ، A_2 =۸/۵۲۳۴ و A_3 =۱۶/۸۸۶۷ سانتیمتر مربع می‌باشد.

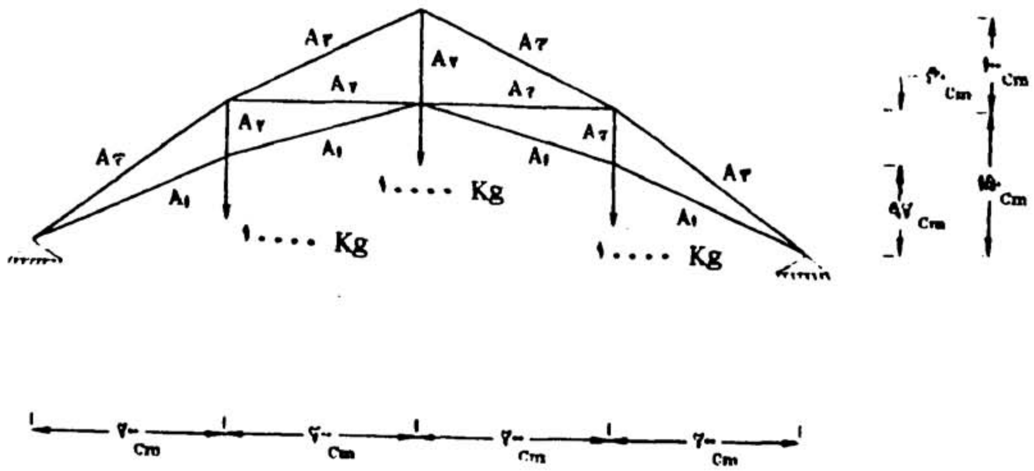


شکل (۳) خرپای ۱۳ عضوی



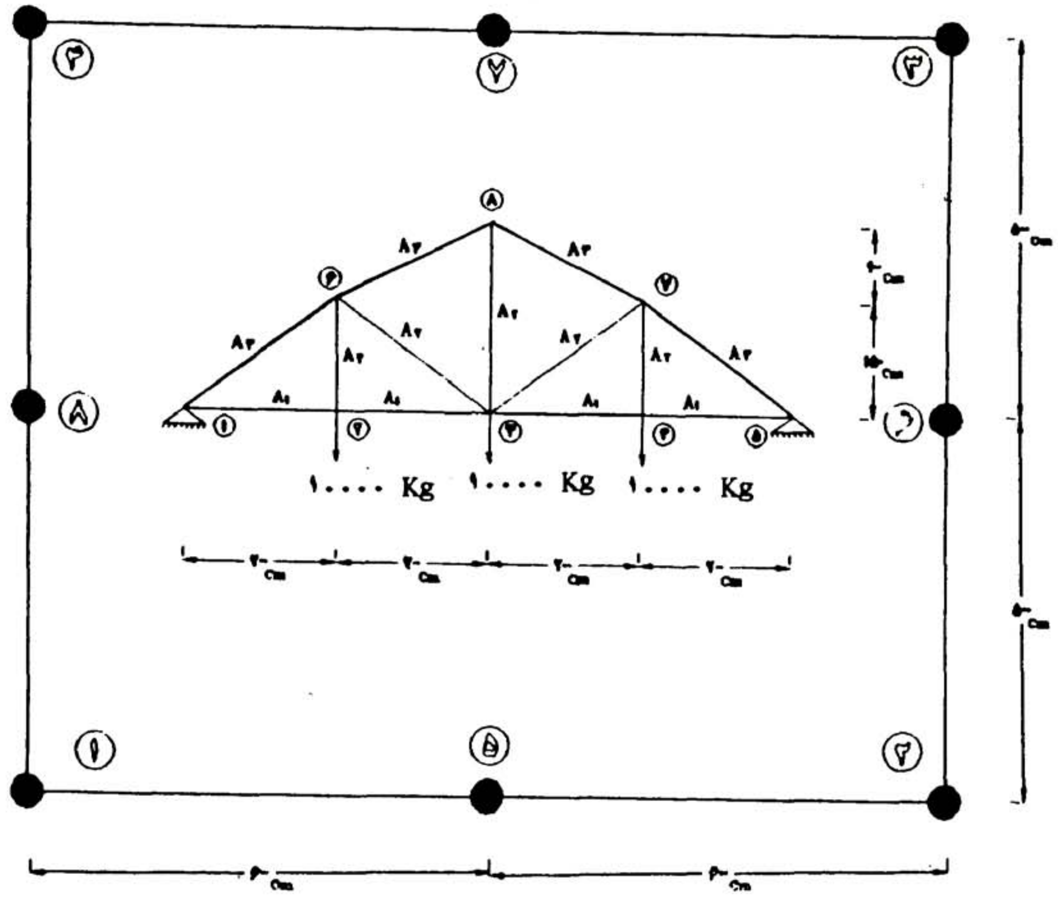
شکل (۴) خرپای ۱۳ عضوی بهینه شده در حالت اول

در حالت دوم خرپای شکل (۳) با در نظر گرفتن متغیرهای مختصات جدیدی یکبار دیگر با برنامه SOT2D و به روش مستقیم کمینه یابی شده است. در این حالت مختصات قائم گره‌های ۲ ، ۳ و ۴ به عنوان متغیر طراحی انتخاب گردیده‌اند. تعداد محدودیت‌ها ۵۶ عدد و تعداد متغیرهای طراحی ۱۸ عدد می‌باشد. شکل بهینه شده خرپا پس از ۲۳ تکرار به دست آمده و حجم خرپا برابر ۲۰۹۷۰ سانتیمتر مکعب میباشد. این بار سطوح مقطع بهینه برابر با A_1= ۱/۰۰۰ ، A_2= ۶/۹۲۵۹ و A_3=۱۷/۰۹۷۳ سانتیمتر مربع می‌باشند. باید دانست که این پاسخ ۱۸ درصد نسبت به حالت پیشین کاهش داشته است. زمان‌بری روش در این حالت به حدود یک سوم حالت قبل رسیده است. هندسه بهینه شده خرپا با سه متغیر مختصات در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل (۵) خرپای ۱۳ عضوی بهینه شده در حالت دوم

از سوی دیگر خرپای ۱۳ عضوی با استفاده از جزء طراحی نیز کمینه‌یابی گردیده است. خرپا به صورت شکل (۶) در جزء طراحی قرار گرفته است.

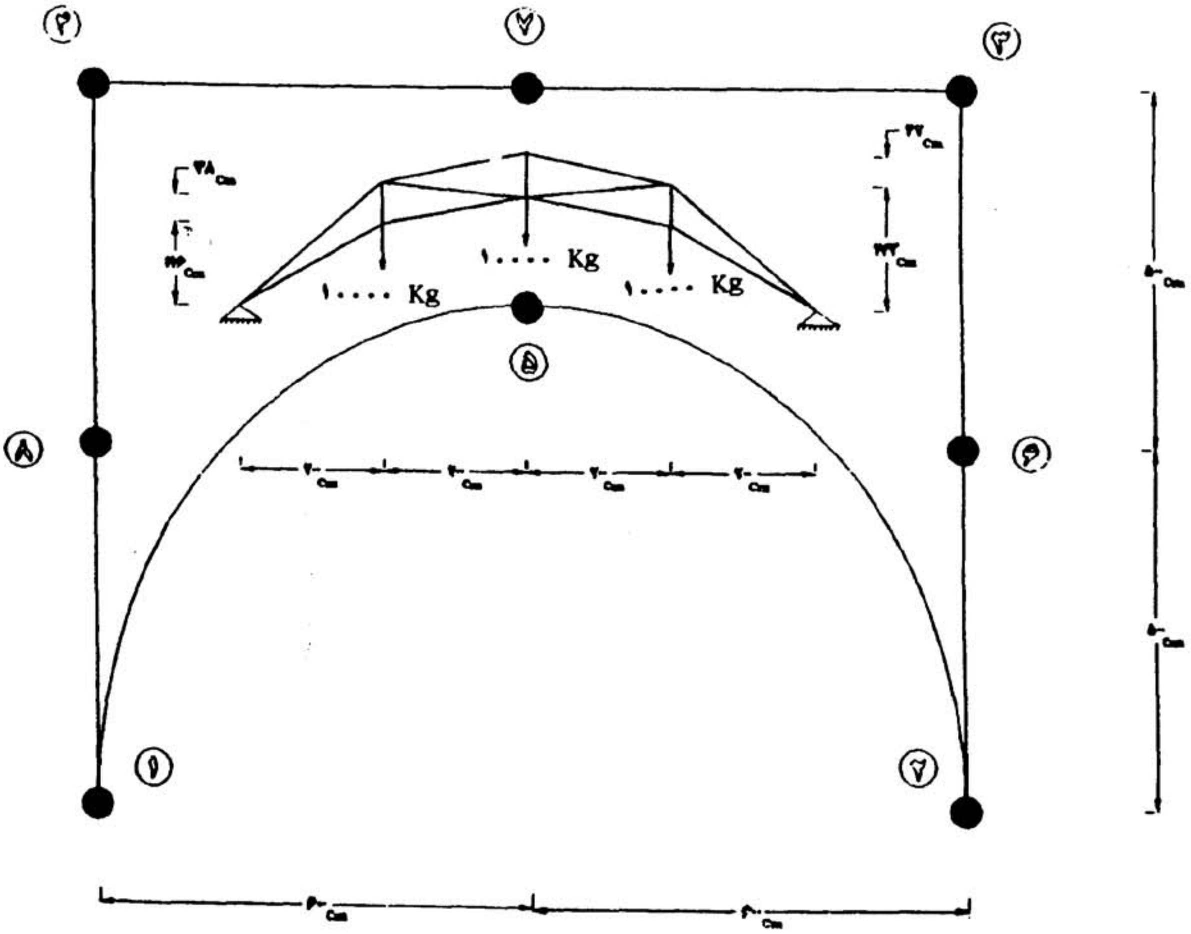


شکل (۶) خرپای ۱۳ عضوی داخل یک جزء طراحی

در حالت سوم مختصات قائم گره کلیدی ۵ به عنوان متغیر طراحی مختصات در نظر می‌باشد. با این فرض تعداد

محدودیت‌ها ۵۲ عدد و تعداد متغیرهای طراحی ۱۶ عدد می‌گردد. در مقایسه با دو حالت پیشین، کاهشی در تعداد متغیرهای طراحی و محدودیت‌ها بوجود می‌آید. پاسخ نهایی حالت سوم پس از ۲۵ تکرار به دست آمده است. با روش جزء طراحی حجم خرپا تا ۱۸۲۹۰ سانتیمترمکعب کاهش پیدا کرده است. این بار سطوح مقطع بهینه برابر A_1 =۱۸/۱۱۲ ، A_2 =۱/۰۰۰۰ و A_3 =۱/۹۴۶۷۳ سانتیمتر مربع می‌باشند.

با توجه به ارقام به دست آمده ملاحظه می‌گردد در حالت سوم، حجم بهینه حدود ۲۸ درصدکمتر از حالت اول - شکل (۴) - و ۱۳ درصدکمتر از حالت دوم - شکل (۵) - به دست آمده است. زمان‌بری روش جدید پس از ۲۵ چرخه برابر حدود یک پنجم حالت اول می‌باشد. خرپای بهینه شده با این روش در شکل (۷) مشاهده می‌شود. نمودار شکل (۸) فرآیند کاهش حجم خرپا را در سه حالت نشان می‌دهد. با توجه به نمودار مزبور در حالت استفاده از جزء هم عامل اگر چه روند کاهش حجم در تکرارهای نخستین کمتر از دو حالت دیگر است، با وجود این، در پایان پاسخ بهینه کمتری را به دست می‌دهد.

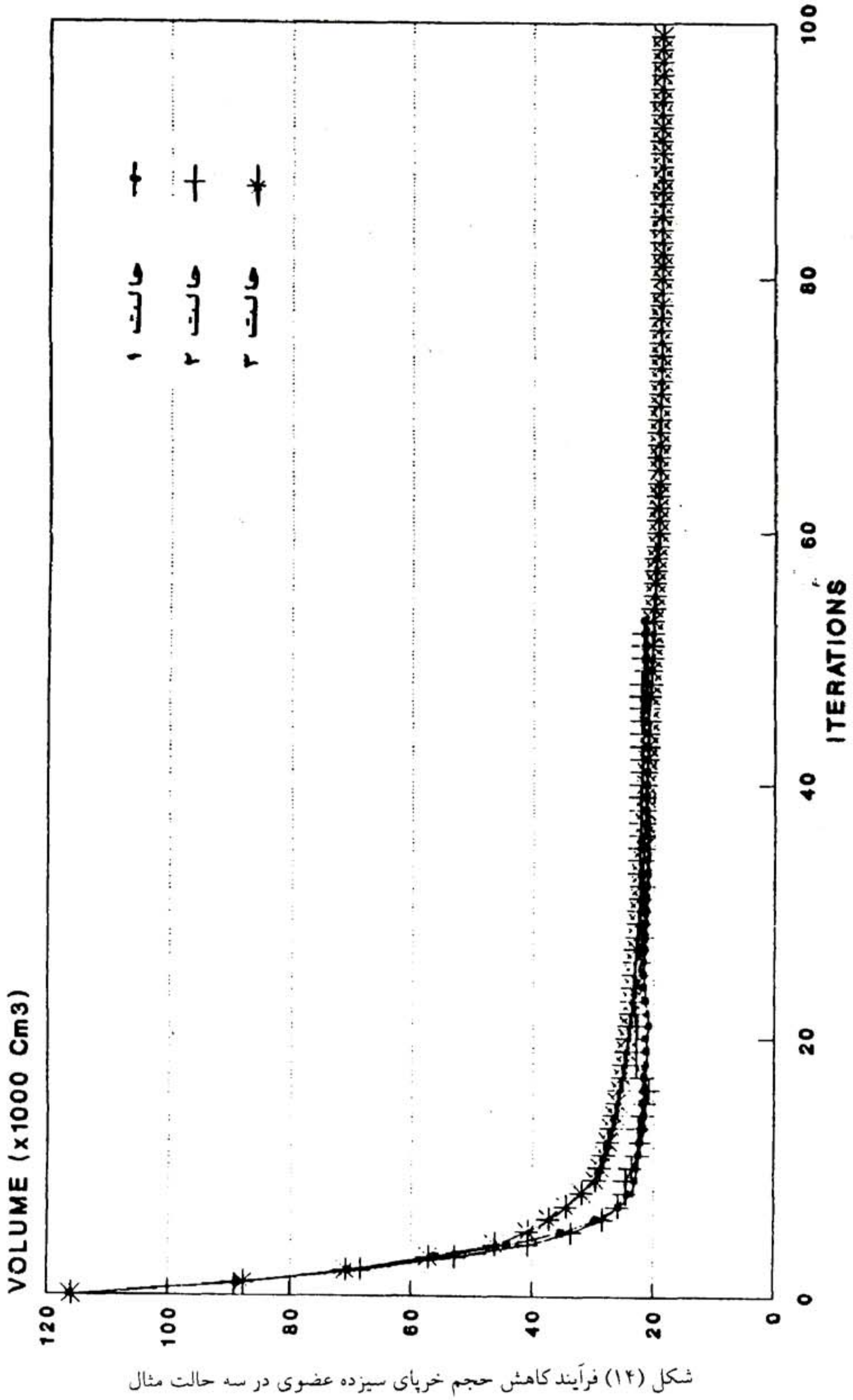


شکل (۷) خرپای ۱۳ عضوی بهینه شده در حالت سوم

نتایج

بهینه سازی شکل خرپاهای دوبعدی در این مقاله مورد بحث قرار گرفت. یک روش جدید برای تحلیل بهینه این گونه سازه‌ها پیشنهاد شد. براساس روابط ارائه شده، می‌توان شکل بهینه خرپاهای مستوی را به دست آورد. در این روش، متغیرهای طراحی

محدودی به کار می‌رود و حجم کمینه سازه به خوبی در دسترس قرار می‌گیرد. برنامه‌های رایانه مورد نیاز به وسیله نویسندگان نوشته شده و با آنها مثالهای عددی فراوانی تحلیل گردیدند. به دلیل حجم محدود مقاله، تنها یک مثال - با حالتهای مختلف - به نظر خوانندگان رسید. تمامی نتایج عددی نشانگر درستی روش و توانایی رسیدن آن به پاسخ بهینه می‌باشد. افزون بر اینها، فن پیشنهادی دارای سرعت خوبی است.



شکل (۱۴) فرآیند کاهش حجم خرپای سیزده عضوی در سه حالت مثال

منابع

[S1]- Saka, M. P., "Shape Optimization of Trusses", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST5, PP. 1155-1174, May, (1980).

[W1]- Wang, S. Y., Sun, Y. and Gallagher, R. H., "Sensitivity Analysis in Shape Optimization of continuum Structures", Computers & Structures, Vol. 20, No. 5, PP. 855-867, (1985).