The First Conference of Iranian Society of Civil Engineers
اولین کنفرانس علمی - تخصصی
انجمن مهندسان راه و ساختمان ایران
۲۸ - ۲۹ مهر ماه ۱۳۷۸ تهران - ایران

یک جزء صفحهٔ خمشی برای تحلیل صفحه‌های نازک و نیمه ضخیم

دکتر محمد رضایی پژند (استاد)
مشهد، دانشکدهٔ مهندسی - دانشگاه فردوسی

مهندس سید رضا سرافرازی (مربی)
بیرجند، دانشکدهٔ مهندسی - دانشگاه بیرجند

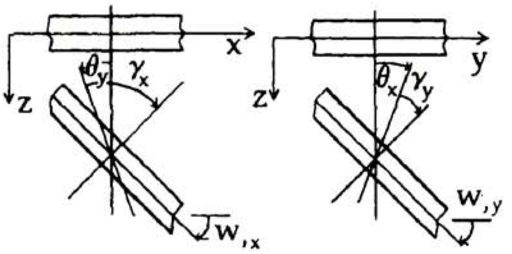
چکیده
در این مقاله یک خانواده از اجزای چهارپهلوی سازگار برای تحلیل صفحه‌های خمشی نازک و ضخیم ارائه می‌گردد. اجزای مزبور، بر اساس نگرهٔ "رایزنر-میندلین" و روش کرنش فرضی رابطه‌سازی شده‌اند. اثر میدان کرنش در رفتار اجزای این خانواده بررسی گشته است. درآیه‌های ماتریس سختی اجزای مزبور به صورت صریح قابل ارائه می‌باشد.

پیشگفتار
یکی از نگره‌های حاکم بر رفتار صفحه‌های خمشی، نگرهٔ "رایزنر- میندلین" [1] است. در این نگره، اثر برش در تغییرشکل صفحه موثر دانسته می‌شود. چنانچه ضخامت صفحه به سمت صفر میل کند؛ نگرهٔ مزبور بر آنچه کیرشهف فرض نموده منطبق خواهد گشت. با وجود این، اجزایی که بر اساس نگرهٔ "رایزنر -میندلین" رابطه‌سازی می‌شوند، در محدودهٔ صفحه‌های نازک دچار مشکلاتی می‌گردند. این مشکلات به صورت قفل برشی (Shear Locking) و ناکفایتی مرتبهٔ ماتریس سختی بروز می‌کند. قفل برشی به دلیل سختی بیش از حد جزء در محدودهٔ صفحه‌های نازک به وجود می‌آید و سبب به دست آمدن تغییرمکانهای صفر یا نزدیک صفر برای صفحه می‌گردد. روشهای مختلفی برای حل این مشکل پیشنهاد شده‌اند. از آن میان می‌توان روشهای تابع اولیه گیری کاهش یافته و انتخابی (Reduced & Selective Integration) [2] ، کرنش برشی فرضی [3-4] و بهبود دادن میدانهای خیز یا دوران [5] را نام برد. روشهای تابع اولیه گیری کاهش یافته و انتخابی سبب کاهش مرتبه ماتریس سختی می‌شوند [6]. از سوی دیگر، روشهای بهبود دهندهٔ میدانهای درونیاب جزء می‌توانند به ارائهٔ اجزایی کارا و قابل اطمینان منجر شوند.به سخن دیگر، با انتخاب مناسب میدانهای خیز، دوران و کرنش برشی می‌توان اجزای نیرومندی به دست آورد [7]. مقادیر گرهی میدان فرض شده ، به طور معمول، با استفاده از رابطه‌های کرنش برشی - تغییرمکان بر حسب تغییرشکلهای گرهی به دست می‌آیند. چنین رابطه‌هایی به قیدهای برشی موسومند [8]. در این مقاله، اثر میدان انتخابی برای کرنش در رفتار جزء چهارگرهی بررسی

می‌گردد. کوشش نویسندگان بر این است که تمام یا قسمتی از ماتریس سختی به صورت صریح به دست آید.

نگرهٔ "رایزنر - میندلین"

در نگرهٔ "رایزنر - میندلین"، تغییرشکلهای صفحه مطابق شکل (۱) می‌باشند. به منظور ارائهٔ رابطه‌های تنش-کرنش و کرنش - تغییرمکان، تعریفهای (۱) و (۲) برای بردار کرنش و تنش ارائه می‌شوند.



شکل (۱) - تغییرمکانهای صفحهٔ خمشی میندلین

$$\{\varepsilon\}^T = \{\kappa^T \ \ \gamma^T\} \quad ; \quad \{\kappa\}^T = \{\kappa_x \ \ \kappa_y \ \ \kappa_{xy}\} \qquad \{\gamma\}^T = \{\gamma_x \ \ \gamma_y\}$$
$$\{\sigma\}^T = \{M_x \ \ M_y \ \ M_{xy} \ \ Q_x \ \ Q_y\} \quad ; \quad \{u\}^T = \{w \ \ \theta_x \ \ \theta_y\} \tag{۱}$$

$$\mathbf{D}_b = D_b \begin{bmatrix} ۱ & \nu & ۰ \\ \nu & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱-\nu}{۲} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}_s = D_s \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_b & ۰ \\ ۰ & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \tag{۲}$$
$$D_b = \frac{Et^۳}{۱۲(۱+\nu^۲)} \qquad D_s = \frac{Gt}{۱/۲} = \frac{Et}{۲/۴(۱+\nu)}$$

با استفاده از این رابطه‌ها، رابطهٔ تنش کرنش را می‌توان به صورت عمومی $\{\sigma\} = \mathbf{D}_m \{\varepsilon\}$ نوشت و رابطه نیرو - تغییرمکان را به صورت $\{\sigma\} = \mathbf{D}_m \{\varepsilon\} = \mathbf{D}_m \mathbf{L}_m \{u\} = \mathbf{D}_m \mathbf{B} \{D\}$ ارائه داد. در این رابطه $\{u\}$ بردار تغییر شکل، $\{D\}$ بردار تغییرمکانهای گرهی و $\mathbf{L}_m$ یک عملگر دیفرانسیلی شامل مشتقهای اول می‌باشد. مطابق روش مرسوم، ماتریس سختی جزء به دو قسمت سختی برشی و خمشی تقسیم می‌گردد. ماتریس سختی خمشی از تابع اولیه گیری تابعی از انحنا و ماتریس سختی برشی از تابع اولیه گیری تابعی از کرنش برشی به دست می‌آید.

محاسبه ماتریس سختی صریح

در این بخش چگونگی محاسبهٔ صریح ماتریس سختی یک جزء چهارپهلوی صفحهٔ خمشی ارائه می‌شود. برای این منظور، کلیهٔ میدانهای هندسه، تغییرمکان و کرنش این جزء به صورت لاگرانژی دوخطه درونیابی می‌گردند. مقادیر گرهی کرنشها به صورت $\{\gamma_i\} = \mathbf{B}_{si} \{D\}$ و $\{\kappa_i\} = \mathbf{B}_{bi} \{D\}$ به دست می‌آیند. ماتریسهای $\mathbf{B}_{bi}$ و $\mathbf{B}_{si}$، به ترتیب، مقادیر گرهی ماتریسهای کرنش خمشی و برشی در گره i هستند. با تعیین کرنش خمشی، کارمایهٔ کرنش خمشی و در نتیجه ماتریس سختی قابل محاسبه است:

$$\mathbf{S}_b = \sum_{i=۱}^{۴} \sum_{j=۱}^{۴} c_{ij} \, \mathbf{B}_{bi}^{*T} \, \frac{\mathbf{D}_b}{D_b} \, \mathbf{B}_{bj}^{*} \quad ; \quad c_{ij} = \frac{D_b}{|J_i| \, |J_j|} \int N_i N_j \, dA \quad ; \quad \mathbf{B}_b^{*} = |J| \, \mathbf{B}_b \tag{۳}$$

عامل $|J|$ دترمینان ژاکوبی است. با توجه به این که مختصات طبیعی گره‌ها به صورت ۱ و ۱- هستند محاسبات

رابطهٔ (۳) را می‌توان باسانی انجام داد و عبارات صریحی برای ماتریس سختی خمشی به دست آورد. به طور مشابهی، ماتریس سختی برشی قابل ارائه است. جزئی که از این روش به دست می‌آید، رفتاری مشابه با جزء چهارگرهی لاگرانژی با تابع اولیه‌گیری کامل داشته و در محدودهٔ صفحه‌های نازک قفل می‌نماید. یک روش ساده برای حذف قفل برشی ثابت فرض کردن کرنش برشی در درون جزء است. این کار می‌تواند با میانگین‌گیری کرنش برشی در سطح جزء انجام شود. جزء حاصل، که نام QP بر آن نهاده شده است، رفتاری مشابه جزء چهارگرهی با تابع‌اولیه‌گیری کاهش‌یافتهٔ انتخابی دارد. این جزء دو حالت(مود) حرکتی غیرواقعی با کارمایهٔ کرنشی صفر دارد.

خاطرنشان می‌گردد، در روش پیشنهادی به سبب صریح بودن ماتریسهای کرنش، لنگرها و برشهای گرهی بدون عملیات اضافی قابل محاسبه‌اند. این ویژگی در اجزایی که از تابع‌اولیه‌گیری عددی استفاده می‌کنند وجود ندارد. در چنین اجزایی، نیروها در نقاط گوس محاسبه شده و سپس، برای محاسبهٔ مقادیر گرهی، پاسخها برونیابی می‌شوند. افزون بر این، نیاز به هموارسازی پاسخها نیز می‌باشد.

جزء MQP

همان‌گونه که در بخش پیش درج شد؛ جزء QP دارای دو حالت حرکتی غیرواقعی است. این دو حالت به سبب ناکافی بودن ضرایب مجهول درونیاب کرنش برشی به وجود می‌آیند. با افزودن دو جملهٔ مناسب دیگر به درونیابهای کرنش برشی می‌توان حالتهای حرکتی غیرواقعی را حذف نمود. با استفاده از رابطه (۴) می‌توان به چنین نتیجه‌ای دست یافت [3]. عاملهای γ_ξ و γ_η، کرنشهای برشی در مختصات طبیعی جزء هستند. خاطرنشان می‌کند، گره‌های ۵ تا ۸ همانند جزء سرندی‌پتی در میان‌پهلوهای جزء قرار دارند.

$$\gamma_\xi = \sum_{i=8,6} N_{\eta i}\,\gamma_{\xi i} \;;\; \gamma_\eta = \sum_{i=5,7} N_{\xi i}\,\gamma_{\eta i} \quad , \quad N_{\xi i} = \tfrac{1}{2}(1+\xi_i\xi) \;;\; N_{\eta i} = \tfrac{1}{2}(1+\eta_i\eta) \qquad (4)$$

کرنشهای برشی گرهی $\gamma_{\xi i}$ و $\gamma_{\eta i}$ را می‌توان با استفاده از رابطه‌های کرنش - تغییرمکان بر حسب تغییرشکلهای گرهی نوشت. برای این منظور، نخست کرنشهای برشی در مختصات دکارتی بر حسب تغییرشکلهای صفحه به دست می‌آیند. سپس با فرض درونیابی دوخطه برای خیز و کمک گرفتن از ماتریس تبدیل ژاکوبی، مولفه‌های طبیعی کرنش برشی محاسبه می‌گردند. با جایگزینی مختصات گرهی در رابطهٔ به دست آمده، می‌توان کرنشهای برشی گرهی $\gamma_{\xi i}$ و $\gamma_{\eta i}$ را محاسبه نمود و به صورت ماتریسی $\{\gamma_{\xi\eta}\}=G\{D\}$ ارائه کرد. در نتیجه، میدانهای کرنش برشی در مختصات طبیعی و دکارتی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}\gamma_\xi\\ \gamma_\eta\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\eta 1} & N_{\eta 2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_{\xi 1} & N_{\xi 2}\end{bmatrix} G\,\{D\} = N\,G\,\{D\} \;;\quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\end{Bmatrix} = J^{-1}\,N\,G\,\{D\} \qquad (5)$$

بر این اساس، ماتریس سختی برشی به صورت $S_S = G^T S_S' G$ قابل محاسبه است. با تجزیهٔ وارون ماتریس ژاکوبی، ماتریس S_S به صورت رابطهٔ (۷) ارائه می‌گردد.

$$J^{-1} = \frac{1}{4\,|J|}\begin{bmatrix} -y_{14} & -y_{23} & y_{12} & -y_{34}\\ x_{41} & x_{32} & -x_{21} & x_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\xi & 0\\ 1+\xi & 0\\ 0 & 1-\eta\\ 0 & 1+\eta\end{bmatrix} = \frac{1}{4\,|J|}\,R\,H \qquad (6)$$

$$\mathbf{S}'_s = D_s \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\mathbf{H}\,\mathbf{N})^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\; (\mathbf{H}\,\mathbf{N}) \frac{1}{16\,|J|}\; d\eta d\xi \qquad (7)$$

چنانچه دترمینان ژاکوبی ثابت و برابر $|J| = a = \frac{A}{4}$ فرض می‌شود ماتریس S'_S به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{S}'_s = \frac{D_s}{4A} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\mathbf{H}\,\mathbf{N})^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\; (\mathbf{H}\,\mathbf{N})\; d\eta d\xi \qquad (8)$$

در اینجا، دو جزء بنامهای MQP و MQP1 ارائه می‌گردد. جزء MQP، رابطه (۷) را با تابع اولیه‌گیری عددی و استفاده از ۲×۲ نقطهٔ نمونهٔ گوس محاسبه می‌نماید. چنانچه از رابطهٔ (۸) برای محاسبهٔ S_s استفاده شود، جزء MQP1 به دست خواهد آمد. در حالتی که شکل جزء متوازی‌الاضلاع باشد، دترمینان ژاکوبی ثابت بوده و دو جزء مورد نظر پاسخهای یکسانی خواهند داد. آزمونهای عددی نشان می‌دهد که در حالت کلی تفاوت چندانی بین پاسخهای دو جزء مشاهده نمی‌شود. باید افزود، تفاوت موجود با ریز شدن شبکه کاهش می‌یابد.

شایان توجه است، با انجام آزمونهای وصله (Patch Tests) برای جزء MQP، مشاهده گردید که جزء مزبور، قادر به برقراری دقیق حالت انحنای ثابت در اجزای کلی نیست. این مشکل با درونیابی حاصلضرب دترمینان ژاکوبی در انحنا، $\{\kappa\}\ |J|$، به صورت دوخطه رفع گردید. در این حالت، فقط نیاز به تغییر ماتریس C است. درآیه‌های ماتریس C از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$c_{ij} = \frac{D_b}{|J_i|\;|J_j|} \int\int_{-1}^{1} \frac{N_i N_j}{|J|}\; d\xi\, d\eta \qquad (9)$$

با استفاده از ۲×۲ نقطهٔ نمونهٔ گوس، رابطهٔ (۹) محاسبه شده و ماتریس C به صورت صریح ارائه می‌گردد. با کاربرد ماتریس C جدید در جزء MQP1، همهٔ آزمونهای وصله به طور دقیق برقرار می‌گردد.

مورب شدن اجزا، به طور معمول، از دقت پاسخها می‌کاهد. ممکن است با ایجاد نامنظمی ناچیزی در شبکه، خطاها به صورت قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد. لیلی [9]، در سال ۱۹۹۳ میلادی، تلاش کرد با تغییر صلبیت برشی، D_s، این رفتار را بهبود بخشد. تغییر صلبیت برشی در تیرها، می‌تواند منجر به ارائهٔ ماتریس سختی دقیق تیر تیموشنکو می‌شود [10]. گرچه نویسندگان اطلاع دقیقی از گسترش این روش به تحلیل صفحه‌ها ندارند؛ ولی مشابه حالت تیر تیموشنکو صلبیت برشی صفحه خمشی میندلین را می‌توان به صورت زیر تغییر داد:

$$D_s^* = \left(\frac{1}{D_s} + \frac{12\lambda}{D_b}\right)^{-1} = D_s\left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\;\frac{1+\upsilon}{2/4}\right)^{-1} \qquad (10)$$

ضریب λ می‌تواند سطح جزء یا مجذور بعد بزرگتر جزء، L^2، باشد. لیلی مجذور طول بلندترین پهلوی جزء را به عنوان ضریب λ در نظر گرفت. بجای مقدار $\frac{(1+\upsilon)}{2/4}$ نیز ۰/۱ فرض می‌نماید. برای بررسی اثرهای چنین تغییراتی سه جزء دیگر بنامهای SQP1، SQP2 و SQP3 معرفی می‌گردد. در جزء نخست از رابطهٔ (۱۰) برای تصحیح صلبیت برشی استفاده شده است. روش لیلی در جزء SQP2 به کار رفته و جزء SQP3 نیز بجای ضریب λ از مساحت جزء استفاده می‌نماید. هر سه جزء درج شده از تغییر جزء MQP به دست آمده‌اند. خاطر نشان می‌کند، برای اجزای مربع شکل پاسخهای دو جزء SQP1 و SQP3 یکسان خواهند بود.

ازمونهای عددی

تحلیل صفحهٔ مربعی

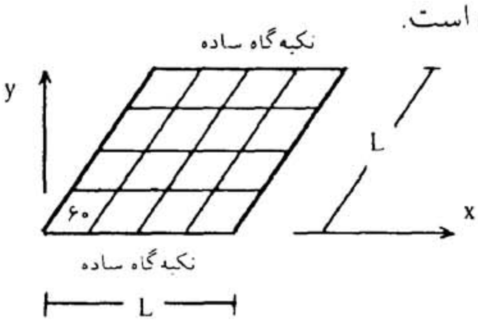
در این بخش، تحلیل یک صفحهٔ مربعی گیردار زیر اثر بارگستردهٔ یکنواخت مورد توجه قرار می‌گیرد. به سبب تقارن سازه، یک چهارم آن با N×N جزء الگوسازی شده است. جزء MITC4 در جدول (۱)، همان جزء بته و دورکین [3] است.

جدول (۱) - درصد خطای مقادیر بیشینهٔ خیز، لنگر و برش در صفحهٔ مربعی گیردار و بارگسترده (L/t=۱۰)

	N×N	۱×۱	۲×۲	۳×۳	۴×۴	۵×۵	۶×۶
خیز مرکز	QP	-۷۶/۱۹	-۲/۷۶۰	-۰/۹۰۰	-۰/۳۵۳	-۰/۱۱۳	۰/۰۱۳
	MQP	-۸۲/۱۴	-۴/۶۱۳	-۱/۶۶۷	-۰/۸۰۷	-۰/۴۰۷	-۰/۱۹۳
	SQP1	۴۸/۰۷	۲۱/۵۶	۱۰/۶۰	۶/۱۵۳	۴/۰۶۰	۲/۹۲۰
	SQP2	-۳۷/۵۰	۴/۵۷۳	۲/۲۶۷	۱/۶۰۰	۱/۱۳۳	۰/۸۸۰
	MITC4	-۸۲/۰۰	-۴/۶۶۷	-۱/۳۳۳	-۰/۶۶۷	-۰/۶۶۷	۰
لنگر بیشینه	QP	-۱۰۰	-۲/۰۳۵	۴/۲۴۲	۱/۲۵۵	۱/۱۶۹	۰/۹۵۲
	MQP	-۱۰۰	۲/۳۳۸	۲/۵۱۱	۱/۴۲۹	۱/۰۸۲	۰/۸۶۶
	SQP1	-۱۰۰	-۲/۹۴۴	۲/۱۶۵	۱/۵۵۸	۱/۰۷۸	۰/۹۹۶
	SQP2	-۱۰۰	-۰/۰۴۳	۲/۴۲۴	۱/۴۷۲	۱/۱۲۶	۰/۹۰۹
	MITC4	-۱۰۰	۲/۱۶۵	۲/۵۹۷	۱/۲۹۹	۰/۸۶۶	۰/۸۶۶
برش بیشینه	QP	-۷۵/۶۳	-۵۰/۸۰	-۳۸/۴۲	-۳۴/۲۳	-۳۱/۲۷	-۲۹/۳۲
	MQP	-۶۳/۴۵	-۳۶/۵۹	-۳۵/۰۷	-۳۱/۸۹	-۲۹/۷۹	-۲۸/۲۵
	SQP1	-۶۳/۴۵	-۴۲/۵۹	-۳۶/۹۶	-۳۳/۰۴	-۳۰/۵۳	-۲۸/۸۱
	SQP2	-۶۳/۴۵	-۳۹/۳۰	-۳۵/۷۷	-۳۲/۳۰	-۳۰/۰۶	-۲۸/۴۴
	MITC4	-۱۰۰	-۶۷/۸۴	-۵۱/۸۵	-۴۲/۶۹	-۳۶/۲۶	-۳۲/۵۵

صفحهٔ مورب رزاقی

شکل (۲) یک صفحهٔ مورب را نشان می‌دهد. دو لبهٔ مقابل هم در این سازه دارای تکیه‌گاه ساده و دو لبهٔ دیگر آزادند. بارگسترده‌ای به صفحه وارد می‌شود. رزاقی این مساله را با اجزای مثلثی تحلیل نمود [4]. در جدول (۲) درصد خطای خیز مرکزی و لنگر M_y در مرکز برای اجزای ارائه شده درج گردیده است. شایان توجه است که در درونیابهای جزء DKMQ مرجع [12] و جزء مثلثی مرجع [13] جملات درجه دو وجود دارند. این عامل سبب افزایش دقت اجزای مزبور گردیده است.



شکل (۲)- صفحهٔ مورب رزاقی (N=۴)

جدول(۲)- درصد خطای خیز و لنگر M_y مرکز صفحهٔ مورب رزاقی

جزء	QP	MQP	SQP1	SQP2	SQP3	DKMQ [12]	Q1 [11]	جزء مثلثی [13]
N×N	خیز مرکزی							
۲×۲	-۵۵/۷۱	-۴۹/۹۵	-۲۳/۵۴	-۴۰/۷۵	-۲۷/۰۶۹	۱۶/۲	۲۸/۸	-۱۱/۸
۴×۴	-۱۵/۰۴	-۱۵/۲۰	-۷/۱۸۰	-۱۲/۳۶	-۸/۲۳۶	۳/۱۰۰	۱۰/۷۰	-۴/۱۰۰
۶×۶	-۶/۹۳۷	-۷/۲۱۵	-۳/۰۴۹	-۵/۷۱۸	-۳/۵۸۳	۱/۵۰۰	---	---
۸×۸	-۴/۰۲۴	-۴/۲۲۱	-۱/۵۸۷	-۳/۲۵۸	-۱/۹۲۴	/۹۰۰	۳/۳۰۰	-۱/۵۰۰
N×N	لنگر M_y مرکزی							
۲×۲	-۵۰/۶۸	-۶۰/۴۶	-۵۶/۷۴	-۵۸/۷۰	-۵۷/۰۶	۳/۸۰۰	۳۷/۷۰	۲۷/۶۰
۴×۴	-۲۵/۰۷	-۱۹/۰۲	-۱۷/۴۳	-۱۸/۲۶	-۱۷/۵۸	-۰/۱۰۰	۱۳/۰۰	۰/۲۰۰
۶×۶	-۶/۷۵۸	-۹/۱۸۸	-۸/۰۰۹	-۸/۶۵۶	-۸/۱۳۴	-۰/۲۰۰	---	---
۸×۸	-۶/۹۸۷	-۵/۲۴۶	-۴/۳۹۰	-۴/۸۷۰	-۴/۴۱۱	-۰/۲۰۰	۳/۶۰۰	۰/۸۰۰

صفحهٔ مورب مورلی

یکی از مسایل تحلیلی مشکل را می‌توان تحلیل صفحهٔ مورب مورلی دانست. هندسهٔ سازهٔ مورد نظر مشابه صفحهٔ مورب رزاقی ، شکل (۲)، است. با این تفاوت که زاویهٔ ۶۰ درجه به ۳۰ درجه تبدیل می‌شود. مرزهای آزاد نیز روی تکیه‌گاه ساده قرار می‌گیرند. ضخامت صفحه و طول L ، به ترتیب، برابر ۰/۱ و ۱۰۰ است. به سبب زاویهٔ شدید گوشهٔ آن تغییرات خیز و لنگر سریع بوده و همگرایی به پاسخ دقیق به کندی انجام می‌شود. برای وارد کردن شرایط تکیه‌گاهی از دو نوع تکیه‌گاه سادهٔ سخت و نرم، به ترتیب، در لبه‌های موازی با محور x و دو لبهٔ دیگر استفاده شده است.

جدول(۳)- مقایسه مقادیر خیز و لنگر مرکز صفحهٔ مورلی

عامل بهنجارشده	N	MQP	SQP2	DKMQ [12]	MITC4 [3]	SCP-1 [14]	Q4BL [15]	جزء مثلثی [13]
خیز	۴	۰/۶۹۹	۰/۹۵۲	۱/۸۶۳	۰/۸۷۷	۱/۰۲۲	۱/۲۵۵	۱/۱۹۸
	۸	۰/۷۶۲	۰/۹۶۳	۱/۲۴۳	۰/۸۴۱	۱/۰۲۵	۱/۰۷۵	۱/۰۷۵
M_{min}	۴	۰۶۶۷	۰/۸۱۲	۱/۶۲۱	۰/۸۵۳	۱/۱۳۹	۱/۰۴۹	۰/۹۴۹
	۸	۰/۷۳	۱/۰۰۴	۱/۱۸۱	۰/۸۸۶	۱/۱۰۵	۱/۰۷۸	۱/۰۶۹
M_{max}	۴	۰/۷۷۳	۰/۸۷۵	۱/۲۲۵	۰/۸۷۴	۱/۰۶۷	۱/۰۵۳	۰/۹۴۹
	۸	۰/۸۳۷	۰/۹۹۳	۱/۰۸۶	۰/۹۰۷	۱/۰۴۶	۱/۰۴۲	۰/۹۷۲

همان گونه که پیش از این اشاره گردید؛ تحلیل صفحهٔ مورلی یک آزمون مشکل می‌باشد. این مطلب را می‌توان از بررسی جدول (۳) دریافت. حتی جزء DKMQ که در تحلیل صفحهٔ رزاقی رفتار خوبی را نشان داده، در این مساله پاسخهایی با خطای بیشتر ارائه می‌دهد. در بین این اجزا، SCP-1 و Q4BL رفتار بسیار خوبی را ارائه می‌کنند. جزء SCP-1 از تغییرمکانهای لبه‌ای وابسته استفاده می‌نماید[14]. جزء Q4BL نیز دو درجه آزادی دورانی اضافی در مرکز دارد. افزون بر این، در درونیاب خیز آن جملات درجه دو نیز موجود می‌باشند[15]. در این آزمون، جزء SQP2 رفتار بسیار خوبی دارد.

در این آزمون دایرهٔ گیرداری زیر اثر بارگستردهٔ یکنواخت مورد توجه قرار می‌گیرد. به سبب تقارن سازه، یک چهارم آن ، به ترتیب، با ۳، ۱۲، ۲۷ و ۴۸ جزء الگوسازی شده است. همان گونه که از جدول (۴) مشاهده می‌گردد، اجزای MQP1 و SQP2 رفتار خوبی را در مقایسه با سایر اجزا نشان می‌دهند. برخی از این جزء‌ها، مانند جزء مثلثی DST-BK ، خیزهای خوبی را ارائه می‌کند. با وجود این، لنگرهای آن دارای دقت کمتری هستند. یادآوری می‌کند، جزء AST6، مثلثی درجه دو بوده و در سال ۱۹۹۷ میلادی، ارائه گشته‌است [16].

جدول(۴)- خیز و لنگر بهنجار شدهٔ مرکز صفحهٔ دایره‌ای(R/t=۵۰)

عامل	N	T6/3* [16]	AST6 [16]	DKMQ [12]	DST-BK [17]	MQP1	SQP2
خیز مرکز	۳	۰/۶۶۵	۰/۹۷۷	۱/۰۱۰	۱/۰۰۶	۰/۹۰۹	۱/۱۴۱
	۱۲	۰/۸۲۵	۰/۹۵۷	۱/۰۳۲	۱/۰۰۷	۰/۹۸۷	۱/۰۳۵
	۴۸	۰/۹۵۴	۰/۹۶۷	۱/۰۰۸	۱/۰۰۲	۰/۹۹۶	۱/۰۰۸
لنگر مرکز	۳	۰/۲۱۷	۱/۱۷۱	۱/۲۵۱	۱/۲۶۱	۰/۹۱۰	۰/۹۷۶
	۱۲	۰/۳۵۴۱	۱/۰۳۴	۱/۰۵۹	۱/۱۰۸	۱/۰۰۶	۱/۰۰۰
	۴۸	۰/۷۳۵	۰/۹۹۶	۱/۰۱۵	۱/۰۳۰	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰

نتیجه گیری

پس از انجام کارهای عددی فراوان نتایجی به دست آمده است که که در ادامه به آنها پرداخته می‌شود. کاربرد میدانهای دوخطی برای کرنش برشی در یک جزء چهارگرهی منجر به قفل برشی جزء در محدودهٔ صفحه‌های نازک خواهد شد. چنانچه درونیاب کرنش برشی به صورت ثابت در جزء فرض گردد، جزء QP به دست می‌آید. جزء مزبور، در موارد کاربردی قفل نخواهد کرد. با وجود این، همانند اجزای با تابع اولیه‌گیری کاهش یافته ، دو حالت حرکتی صفر غیرواقعی در این جزء وجود دارد. حالتهای حرکتی غیرواقعی را می‌توان با درونیابی کرنشهای برشی γ_ξ و γ_η، به ترتیب، به صورت تابعی خطی از η و ξ حذف نمود. جزء به دست آمده از این روش، MQP نام داشته و مشابه جزء بته و دورکین است. با این تفاوت که به دلیل درونیابی دوخطی انحنا در این جزء، آزمون وصله در اجزای مورب به طور دقیق برقرار نمی‌شود. برای برقراری حالت کرنش ثابت، درونیاب انحنا بر دترمینان ژاکوبی تقسیم شد. این کار در جزء MQP1 انجام شده است. در ضمن، با درونیابی کرنش می‌توان ماتریس سختی را به صورت صریح ارائه کرد. آزمونهای عددی نشان می‌دهد که صریح بودن ماتریس سختی سبب کاهش حدود ۴۰ درصدی زمان محاسبهٔ ماتریس سختی می‌گردد.

رابطه‌های به کار رفته برای تغییر صلبیت برشی، باعث کاهش مقدار مزبور می‌گردد. به سبب این که خانوادهٔ QP ، به طور معمول، سختتر از واقعیت هستند؛ تغییر صلبیت برشی رفتار جزء را بهبود خواهد داد. در اثر تغییر صلبیت برشی، بهترین نتایج در جزء SQP2 مشاهده می‌شود. باید افزود، بهبود صلبیت برشی می‌تواند رفتار قفل کنندگی جزء را نیز بهبود دهد.

مراجع

[1] - O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, The Finite Element Method, Vol. 2, McGraw-Hill, NewYork,(1991)

[2] - T.J.R. Hughes , M. Cohen and M. Haroun,"Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates", Nucl. Engng. Design 46, 203-222,(1978).

[3] - K.J. Bathe and E.N. Devorkin,"A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation", Int. J. Numer. Meth. Engng. 21, 367-383,(1985).

[4] - E. Hinton and H.C. Huang," A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields", Comput. Struct. 23, 409-431,(1986).

[5] - H.R.H Kabir," A Shear Locking Free Isoparametric Three-Node Triangular Finite Element for Moderately Thick to Thin Plates", Int. J. Numer. Meth. Engng. 35,503-519,(1992).

[6] - E.D.L. Pugh , E. Hinton and O.C. Zienkiewicz," A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements With Reduced Integration", Int. J. Numer. Meth. Engng. 12,1059-1079,(1978).

[7] - O.C. Zienkiewicz and Lefebvre," A Robust Triangular Plate Bending Element of the Reissner/Mindlin Type", Int. J. Numer. Meth. Engng. 26, 1169-1184,(1988).

[8] - E. Onate , R.L. Taylor , O.C. Zienkiewiz and O.C. Suarez," A General Methodology for Deriving Shear Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements ", Int. J. Numer. Meth. Engng. 33, 345-367,(1992).

[9] - M. Lyly , R. Stenberg and Vihinen," A Stable Bilinear Element for the Reissner-Mindlin Plate Model", Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 110,343-357,(1993).

[10] - R.H. MacNeal," A Simple Quadrilateral Shell Element", Comput. Struct. 8, 175-183,(1978).

[11] - O.L. Roufaeil," A New Four-Node Quadrilateral Plate Bending Element", Comput. Struct. 54,871-879,(1995).

[12] - I. Katili," A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Theory and Assumed Shear Strain Fields. Part II: An Extended DKQ Element for Thick Plate Bending Analysis", Int. J. Numer. Meth. Engng. 36. 1885-1908,(1993).

[13] - X. Zhongnian," A Thick-Thin Triangular Plate Element", Int. J. Numer. Meth. Engng. 33,963-973,(1992).

[14] - G. Shi and P. Tong," Assumed Stress C^0 Quadrilateral/Triangular Plate Elements by Interrelated Edge Displacements", Int. J. Numer. Meth. Engng. 39 ,1041-1051,(1996).

[15] - O.C. Zienkiewicz , Z. Xu, L.F. Zeng , A. Samuelsson and N.-E. Wiberg," Linked Interpolation for Reissner- Mindlin Plate Elements. Part I- A Simple Quadrilateral", Int. J. Numer. Meth. Engng. 36, 3043-3056,(1993).

[16] - K.Y. Sze , D. Zhu and D.R. Chen," Quadratic Triangular C^0 Plate Bending Element", Int. J. Numer. Meth. engng. 40,937-951,(1997).

[17] - J.L.Batoz and I. Katili, " On a Simple Triangular Reissner/Mindlin Plate Element Based on Incompatible Modes and Discrete Constraints", Int. J. Numer. Meth. Engng. 35, 1603-1632,(1992).