The First Conference of Iranian Society of Civil Engineers
اولین کنفرانس علمی - تخصصی
انجمن مهندسان راه و ساختمان ایران
۲۸ - ۲۹ مهر ماه ۱۳۷۸ تهران - ایران

سطح تسلیم مواد و تحلیل غیرخطی سازه‌ها

محمد رضایی پژند
استاد دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

مجیدرضا ناظم - کارشناس ارشد سازه دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

عاملهای گوناگونی در تحلیل غیرخطی سازه‌ها نقش دارند. یکی از این نقشها بر عهدهٔ معیار تسلیم است. در این مقاله به سطح تسلیمهای ترسکا گونه پرداخته می‌شود. یک معیار جدید پیشنهاد خواهد شد و تحلیل کشسان - مومسان براساس آن انجام می‌گیرد. به آگاهی خوانندگان می‌رسد که نتیجه‌های عددی نشانگر تواناییهای شایسته این معیار تسلیم است.

واژه‌های کلیدی: سطح تسلیم، فن میسز، ترسکا، تحلیل غیرخطی، ترسکا گونه پنجم، روش اجزای محدود.

پیشگفتار

در چند دههٔ اخیر، تحلیل غیرخطی سازه‌ها به صورت گسترده‌ای تداوم داشته است. به سخن دیگر، پژوهشهای فراوانی در این زمینه صورت گرفته و یا در حال انجام می‌باشد. هرچند حجم کارهای به نتیجه رسیده بسیار چشم‌گیر است، با وجود این، به دلیل پیچیدگی رفتار غیرخطی سازه‌ها، هنوز کارهای فراوانی در پیش رو می‌باشد. رفتار غیرخطی سازه‌ها ممکن است از رابطهٔ غیرخطی کرنش و تنش مصالح سازه نتیجه شود. در چنین حالتی، رفتار سازه به صورت ساده نبوده و به آن رفتار «غیرخطی مواد» و یا رفتار «کشسان - مومسان» می‌گویند. یک ویژگی این رفتار، باقی ماندن تغییرشکل دائم در سازه است.

بیشتر سازه‌های نامعین زیربار، پس از گذشتن از مرز کشسانی هنوز هم دارای مقاومتند و توانایی تحمل بارهای بیشتری را دارند. تحلیل غیرخطی این سازه‌ها می‌تواند مقاومت، تغییرشکلها و تنشهای سازه را زیر

بارهای افزایشی و نیز بارهای چرخه ای به دست دهد. با انجام تحلیل غیرخطی، بیشترین باری که سازه می‌تواند تحمل کند - یا بارگسیختگی - پیدا خواهد شد. اهمیت تحلیل غیرخطی آنگاه آشکار می‌گردد که رفتار سازه در فضای تنش چند محوری در نظر باشد. یادآوری می‌کند، رابطهٔ رفتاری چنین حالتی هنوز به صورت دقیق تعریف نشده است. باید افزود، روشهای تحلیلی کلی برای سازه‌های با رفتار غیرخطی قابل انجام نیستند و شیوه‌های عددی، مانند روش اجزای محدود، برای این کارها مفید می‌باشند [1-8].

تحلیل کشسان - مومسان با روش اجزای محدود نیاز به معیار تسلیم دارد. در واقع، مرز مومسانی به وسیله تابعی از متغیرهای تنش چند محوری تعریف می‌گردد. این تابع به نام «سطح تسلیم» معروف می‌باشد و مقدارهای مورد نیاز آن از آزمایش کشش و یا فشار یک محوری به دست می‌آید. در پی این کار، تغییرمعیار تسلیم در اثر گسترش مومسانی به وسیله قانون سخت شوندگی معین خواهد شد. به سخن دیگر، رفتار پس از تسلیم مواد با قانون سخت شوندگی مشخص می‌شود. همچنین، یک قانون جریان، که رابطهٔ کلی تنش و کرنش را مشخص می‌کند، به کار می‌رود. باید افزود، در نگرهٔ مومسان نموی، نمو کرنش را به دو بخش کشسان و مومسان تجزیه می‌کنند. آشکار است، قانون هوک را برای رفتار کشسان به کار می‌گیرند.

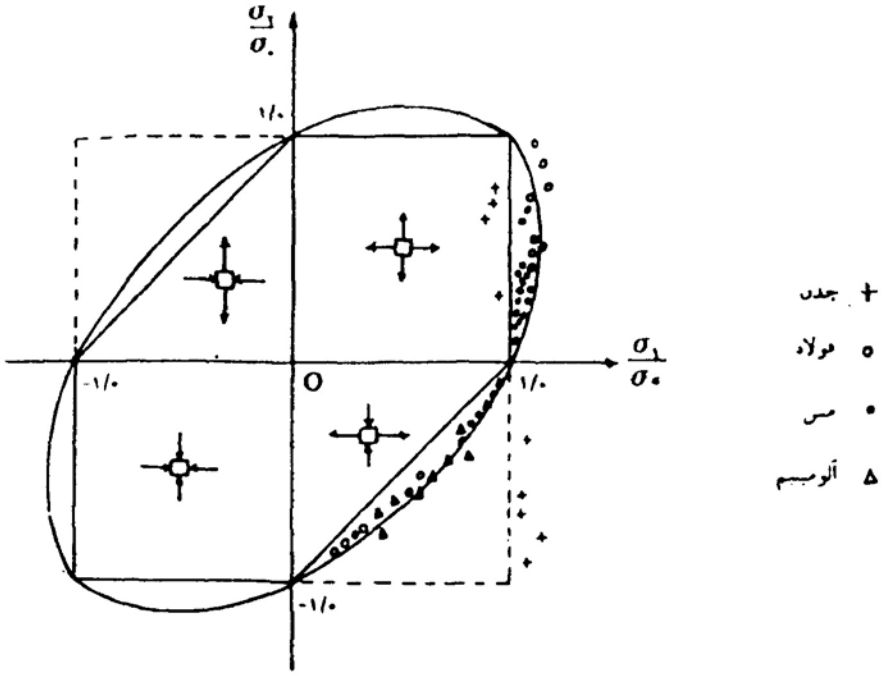
معیارهای فن میسز و ترسکا

تحلیلگران سازه تاکنون معیارهای زیادی را برای تسلیم مواد پیشنهاد نموده‌اند. در این میان، دو معیار از آنها بسیار معروفند. نخستین معیار، ترسکا می‌باشد که در سال ۱۸۶۴ پیشنهاد گردید. در این معیار هنگامی که تنش برشی بیشینه به مقدار بحرانی می‌رسد، جاری شدن مواد آغاز می‌شود. یادآوری می‌کند، معیار ترسکا در فضای تنشهای اصلی با یک منشور شش پهلوی منتظم نامحدود مشخص شده است. دومین معیار که در سال ۱۹۱۳ پیشنهاد شد، سطح تسلیم فن میسز نام دارد. معیار مزبور یکی از ساده‌ترین سطحهای تسلیم می‌باشد. زیرا، تابع ریاضی آن یگانه، هموار و شکل ساده‌ای دارد. در فضای تنشهای اصلی، معیار فن میسز یک استوانه را مشخص می‌کند. مقطع این استوانه با صفحه پی‌یک بیضی و محور استوانه موازی با محور فشار آب ایستا است.

معیار ترسکا نسبت به فن میسز دو ویژگی مشخص دارد. یکی اینکه تابع تسلیم آن چندگانه است. دیگری، ناپیوستگیهایی در یالها و گوشه‌های سطح تسلیم وجود دارند. تجربه‌های فراوانی با معیارهای فن میسز و ترسکا انجام شده است. شکل (۱) نتیجه‌های آزمایشهای انجام گرفته برای سازه‌های دو بعدی را مشخص می‌کند. آشکار می‌باشد، معیار فن میسز با نتیجه‌های تجربی دارای برازش بهتری است. خاطر نشان می‌سازد، معیار فن میسز در خلاف جهت اطمینان رفتار می‌کند. به سخن دیگر، برای نقطه‌های تسلیم شده‌ای که بین این دو سطح تسلیم قرار گرفته‌اند، معیار فن میسز آنها را در حالت کشسان و سطح تسلیم ترسکا این نقطه‌ها را در حالت مومسان می‌پندارد. از این‌رو، هرچند مشکلهای تحلیلی معیار ترسکا بیش از فن میسز است، با وجود این، معیار ترسکا با نتیجه‌های تجربی سازگاری بیشتری دارد.

تحلیل غیرخطی با روش اجزای محدود

پژوهشهای گسترده‌ای در زمینهٔ تحلیل غیرخطی سازه‌ها با روش اجزای محدود صورت گرفته است. بخشی از این کارها، انجام تحلیل کشسان - مومسان می‌باشد. بایدافزود، تحلیل غیرخطی مورد بحث این مقاله، به سطح تسلیم مصالح سازه نظر ویژه‌ای دارد. آشکار است، معیار فن میسز به دلیل سادگی تابع آن، روش تحلیل آسانی دارد. از سوی دیگر، معیارهای ترسکا گونه که دارای کاربردهای فراوانی‌اند، نیاز به بررسی بیشتری دارند.



شکل (۱) - معیارهای ترسکا و فن میسز

در سال ۱۹۶۸، آنان با به کارگیری روش اجزای محدود و جزء مثلثی با کرنش ثابت از معیار ترسکا بهره جست [1]. تحلیل غیرخطی مزبور برای مسأله تنش مستوی و رفتار کشسان خطی و پومسان کامل به کار می‌رفت. به دنبال آن، در سال ۱۹۷۶، وایزگر بر تحلیل مزبور را برای سازه‌های با مواد سخت شونده همگن و زیربار افزایشی گسترش داد [4]. وی مسأله مستوی را تحلیل غیرخطی نمود. این پژوهشگر نشان داد که بهره‌جویی از سطح تسلیم ترسکا محافظه‌کارانه و ایمنتر است. همچنین، گوشه‌های سطح تسلیم ترسکا هیچگونه مشکل غیرقابل حلی ایجاد نمی‌کند. شایان توجه می‌باشد، با وجود ویژه بودن گوشه‌های سطح تسلیم، انتخاب نمو بردار کرنش مومسان دارای آزادی بیشتری است. زیرا، عمود بر پهلوهای سطح تسلیم در گوشه‌ها یگانه نیست. باید افزود، پژوهشگران گزارش نموده‌اند که تجربه‌های آزمایشگاهی نشانگر وجود گوشه در سطحهای تسلیم واقعی مواد است.

گسترش معیار تسلیم ترسکا برای مواد با تاو فشاری و کششی یکسان و نیز موادی که دارای تاو فشاری و کششی متفاوت هستند، در سال ۱۹۷۹ انجام گرفت [2]. چون در ادامه از شمار زیادی سطح تسلیم کم و بیش همانند، سخن به میان می‌آید، از این رو، معیار مزبور «ترسکا گونه یکم» نامیده می‌شود. شکل (۲) معیار ترسکا گونه یکم را نشان می‌دهد. باید آگاه بود، این سطح تسلیم برای بارهای افزایشی و مصالح دارای سخت‌شوندگی همگن و نیز برای بارهای چرخه‌ای و مصالح با سخت‌شوندگی پویا به کار رفته است [3 و 4].

در سال ۱۹۸۱، وایزگر بر معیار ترسکا گونه یکم را با تغییراتی برای مواد با تاو کششی کم به کار گرفت [5]. در این تحلیل از مثلث با کرنش ثابت و قانون سخت شوندگی همگن استفاده شد. این سطح تسلیم، که «ترسکا گونه دوم» نامیده می‌شود، برای تحلیل غیرخطی بتن نیز به کار رفته است. ترکمانی معیار مزبور را برای سازه با تاو کششی برابر و یا کمتر از تاو فشاری زیر بار چرخه‌ای به کار برد [7]. خاطر نشان می‌کند، معیار ترسکا گونه دوم نیاز به سه عامل دارد و همانند شکل (۳)، نسبت به یک محور، متقارن می‌باشد.

بارهای افزایشی و نیز بارهای چرخه ای به دست دهد. با انجام تحلیل غیرخطی، بیشترین باری که سازه می‌تواند تحمل کند - یا بار گسیختگی - پیدا خواهد شد. اهمیت تحلیل غیرخطی آنگاه آشکار می‌گردد که رفتار سازه در فضای تنش چند محوری در نظر باشد. یادآوری می‌کند، رابطهٔ رفتاری چنین حالتی هنوز به صورت دقیق تعریف نشده است. باید افزود، روشهای تحلیلی کلی برای سازه‌های با رفتار غیرخطی قابل انجام نیستند و شیوه‌های عددی، مانند روش اجزای محدود، برای این کارها مفید می‌باشند [1-8].

تحلیل کشسان - مومسان با روش اجزای محدود نیاز به معیار تسلیم دارد. در واقع، مرز مومسانی به وسیله تابعی از متغیرهای تنش چند محوری تعریف می‌گردد. این تابع به نام «سطح تسلیم» معروف می‌باشد و مقدارهای مورد نیاز آن از آزمایش کشش و یا فشار یک محوری به دست می‌آید. در پی این کار، تغییرمعیار تسلیم در اثر گسترش مومسانی به وسیله قانون سخت شوندگی معین خواهد شد. به سخن دیگر، رفتار پس از تسلیم مواد با قانون سخت شوندگی مشخص می‌شود. همچنین، یک قانون جریان، که رابطهٔ کلی تنش و کرنش را مشخص می‌کند، به کار می‌رود. باید افزود، در نگرهٔ مومسان نموی، نمو کرنش را به دو بخش کشسان و مومسان تجزیه می‌کنند. آشکار است، قانون هوک را برای رفتار کشسان به کار می‌گیرند.

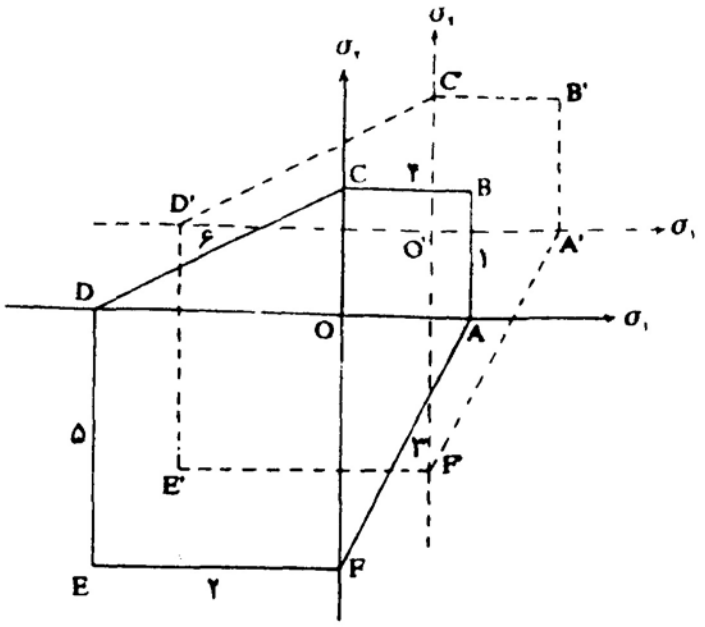
معیارهای فن میسز و ترسکا

تحلیلگران سازه تاکنون معیارهای زیادی را برای تسلیم مواد پیشنهاد نموده‌اند. در این میان، دو معیار از آنها بسیار معروفند. نخستین معیار، ترسکا می‌باشد که در سال ۱۸۶۴ پیشنهاد گردید. در این معیار هنگامی که تنش برشی بیشینه به مقدار بحرانی می‌رسد، جاری شدن مواد آغاز می‌شود. یادآوری می‌کند، معیار ترسکا در فضای تنشهای اصلی با یک منشور شش پهلوی منتظم نامحدود مشخص شده است. دومین معیار که در سال ۱۹۱۳ پیشنهاد شد، سطح تسلیم فن میسز نام دارد. معیار مزبور یکی از ساده‌ترین سطحهای تسلیم می‌باشد. زیرا، تابع ریاضی آن یگانه، هموار و شکل ساده‌ای دارد. در فضای تنشهای اصلی، معیار فن میسز یک استوانه را مشخص می‌کند. مقطع این استوانه با صفحه پی‌یک بیضی و محور استوانه موازی با محور فشار آب ایستا است.

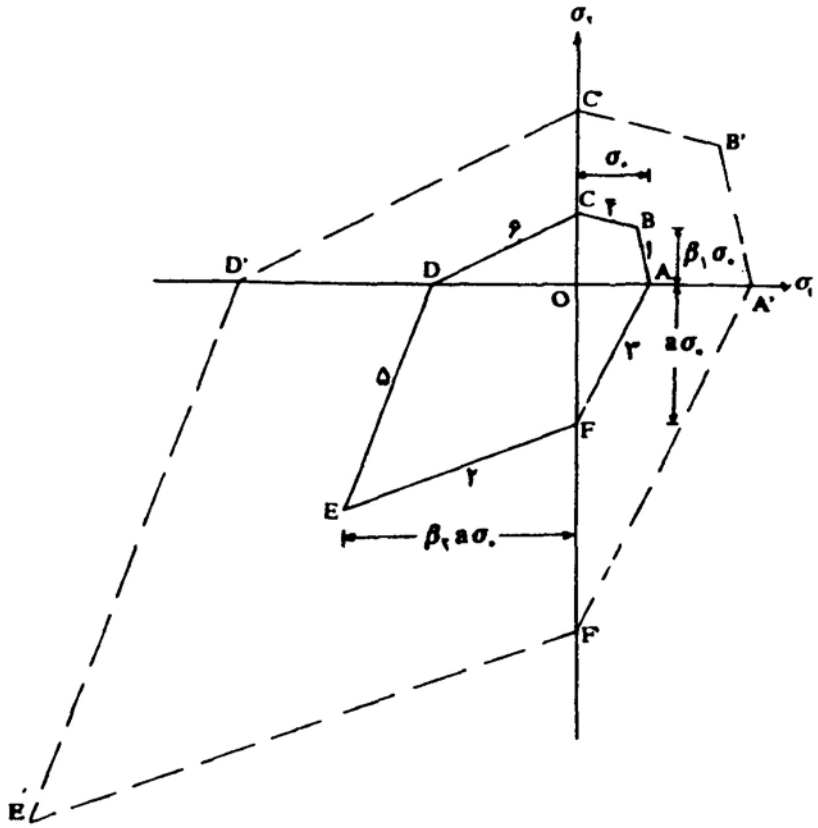
معیار ترسکا نسبت به فن میسز دو ویژگی مشخص دارد. یکی اینکه تابع تسلیم آن چندگانه است. دیگری، ناپیوستگیهایی در یالها و گوشه‌های سطح تسلیم وجود دارند. تجربه‌های فراوانی با معیارهای فن میسز و ترسکا انجام شده است. شکل (۱) نتیجه‌های آزمایشهای انجام گرفته برای سازه‌های دو بعدی را مشخص می‌کند. آشکار می‌باشد، معیار فن میسز با نتیجه‌های تجربی دارای برازش بهتری است. خاطر نشان می‌سازد، معیار فن میسز در خلاف جهت اطمینان رفتار می‌کند. به سخن دیگر، برای نقطه‌های تسلیم شده‌ای که بین این دو سطح تسلیم قرار گرفته‌اند، معیار فن میسز آنها را در حالت کشسان و سطح تسلیم ترسکا این نقطه‌ها را در حالت مومسان می‌پندارد. از این رو، هرچند مشکلهای تحلیلی معیار ترسکا بیش از فن میسز است، با وجود این، معیار ترسکا با نتیجه‌های تجربی سازگاری بیشتری دارد.

تحلیل غیرخطی با روش اجزای محدود

پژوهشهای گسترده‌ای در زمینهٔ تحلیل غیرخطی سازه‌ها با روش اجزای محدود صورت گرفته است. بخشی از این کارها، انجام تحلیل کشسان - مومسان می‌باشد. بایدافزود، تحلیل غیرخطی مورد بحث این مقاله، به سطح تسلیم مصالح سازه نظر ویژه‌ای دارد. آشکار است، معیار فن میسز به دلیل سادگی تابع آن، روش تحلیل آسانی دارد. از سوی دیگر، معیارهای ترسکا گونه که دارای کاربردهای فراوانی‌اند، نیاز به بررسی بیشتری دارند.

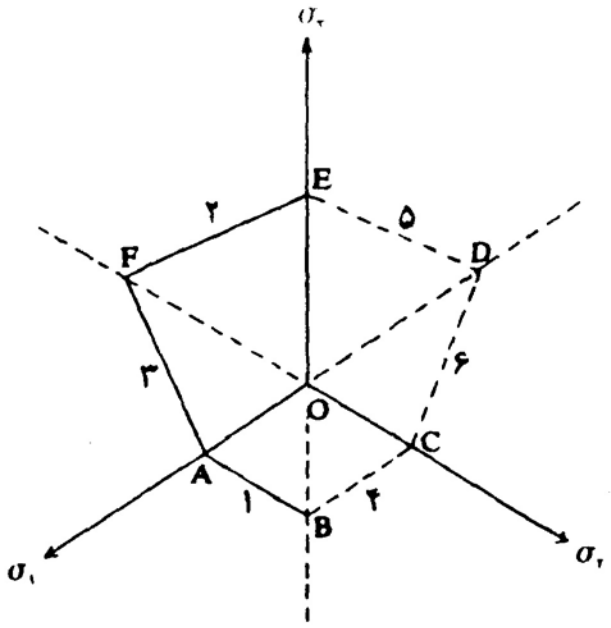


شکل (۲) - معیار ترسکاگونه یکم



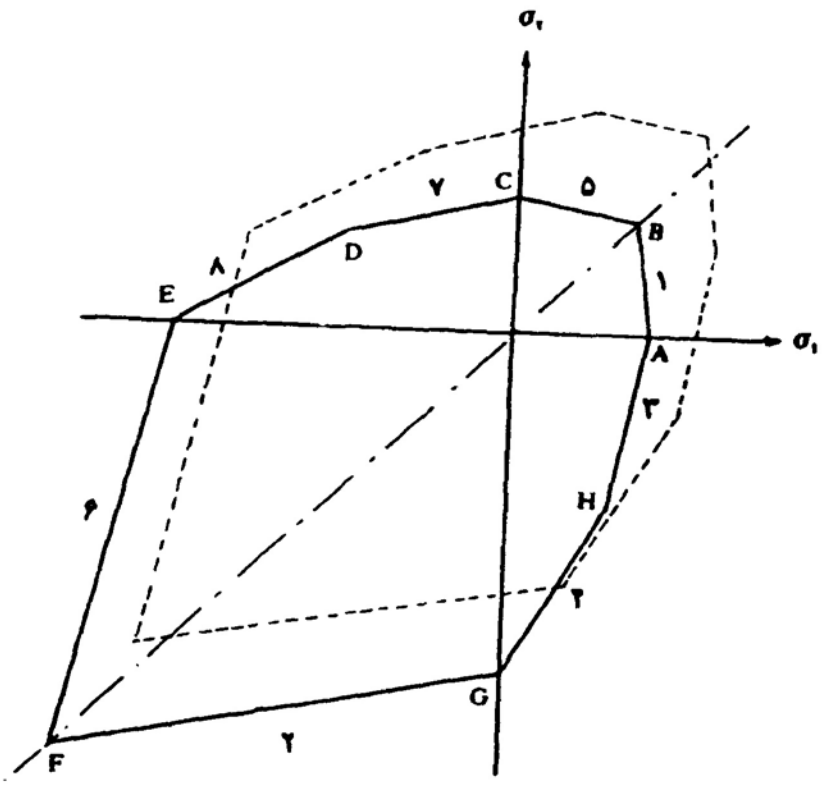
شکل (۳) - معیار ترسکاگونه دوم

در سال ۱۹۸۴، السافی سطح تسلیم ترسکاگونه یکم راگسترش داد و آن را به صورت شکل (۴) در آورد [5]. این معیار تسلیم، که «ترسکاگونه سوم» نامیده می‌شود، برای تحلیل غیرخطی مسأله‌های تنش و کرنش مستوی به کار رفته است. السافی این کار را به صورتی انجام داد که تقاطع این معیار در فضای سه بعدی تنشهای اصلی با صفحه تنشهای دوبعدی همان سطح تسلیم ترسکاگونه یکم را به وجود آورد.



شکل (۴) - معیار ترسکا گونه سوم

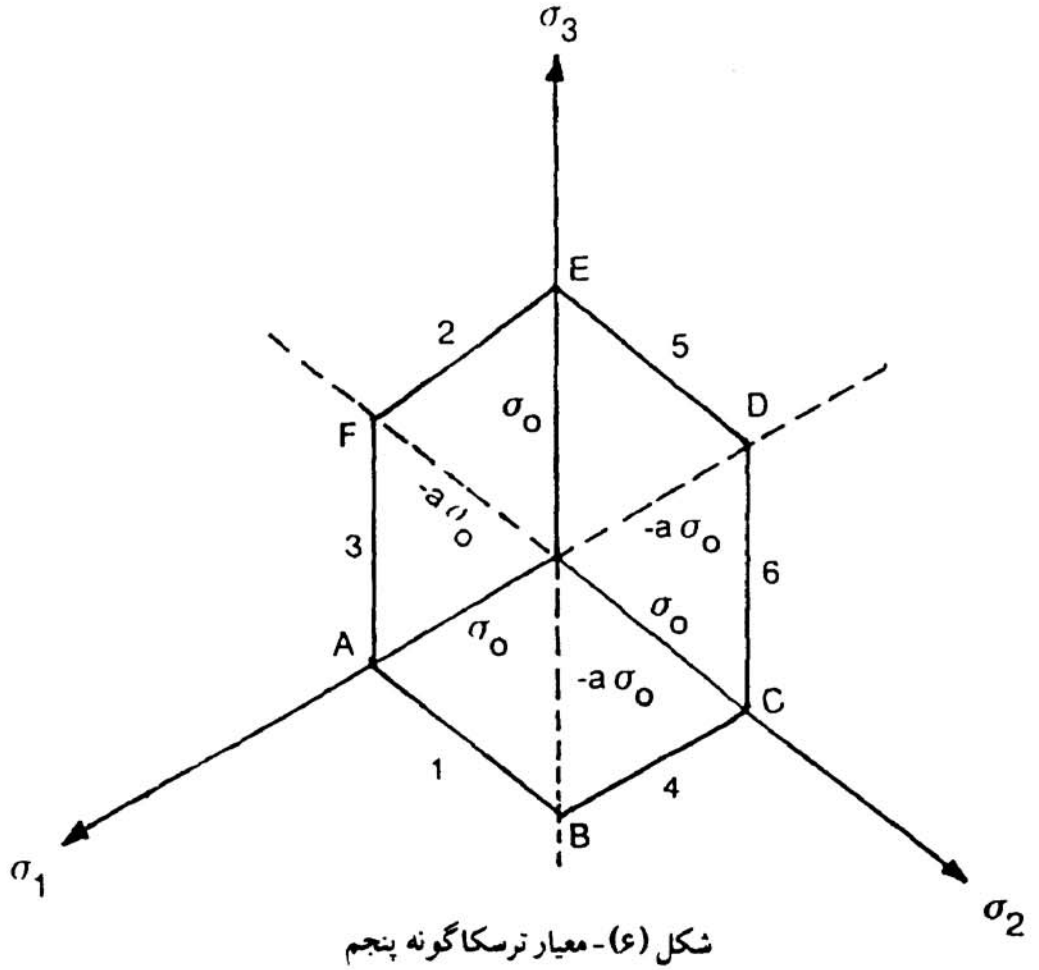
در سال ۱۹۸۷، السانوسی سطح تسلیم ترسکا گونه دوم را به همراه قانون سخت‌شوندگی ترکیبی برای تحلیل غیرخطی به کار گرفت [6]. وی مسأله تنش مستوی با بار چرخه‌ای و یا افزایشی را تحلیل نمود. به دنبال اینها، در سال ۱۹۹۵، معیار ترسکا گونه چهارم پیشنهاد شد. این معیار با پنج عامل که از آزمایشهای تجربی به دست می‌آیند، تعریف می‌شود. شکل (۵) سطح تسلیم مزبور را نشان می‌دهد. معیار تریسکا گونه چهارم و قانون سخت شوندگی ترکیبی برای مسأله تنش مستوی نتیجه‌های خوبی به دست داده است [1].



شکل (۵) - معیار ترسکا گونه چهارم

معیار تسلیم ترسکا گونه پنجم

یک ویژگی این معیار تسلیم، کمی بودن آن است. به سخن دیگر، با مقدار دادن به عاملهای این سطح تسلیم می‌توان معیارهای پیشین را از آن نتیجه گرفت. شکل (۶) معیار تسلیم ترسکا گونه پنجم را در فضای تنشهای اصلی سه بعدی نشان می‌دهد. سطح تسلیم مزبور نیاز به ۱۲ معادله دارد. از اینها، ۶ معادله در ناحیهٔ کششی و ۶ معادله دیگر در ناحیهٔ فشاری می‌باشد. سطحهای کششی یکدیگر را بر روی محور آب ایستا قطع می‌کنند. از سوی دیگر، سطحهای فشاری نسبت به محور آب ایستا واگرا بوده و از آنها دور می‌شوند.



شکل (۶)- معیار ترسکا گونه پنجم

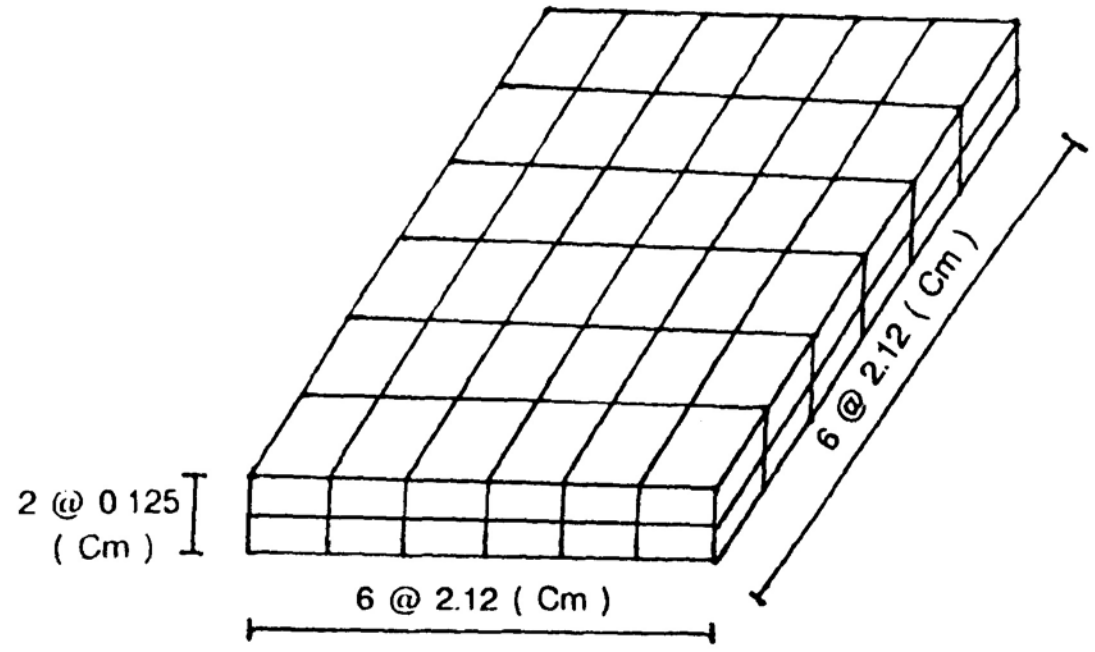
ماتریس کشسان - مومسان، $[D]_{ep}$، این سطح تسلیم برحسب عاملهای مشخصی حساب می‌شود. از میان آنها، $\bar{H}$، شیب نمودار تنش - کرنش یک محوری کششی، m عامل سخت شوندگی ترکیبی و H ثابت سخت‌شوندگی است. باید آگاه بود، m = ۰ سخت‌شوندگی همگن و m = ۱ سخت‌شوندگی پویا را مشخص می‌کنند. اگر ماتریس کشسان با $[D]_e$، تابع تسلیم با F و عامل سخت‌شوندگی همگن با κ مشخص شوند، آنگاه، ماتریس کشسان - مومسان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}[M]^{-1}\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T[D]_e$$

$$[M] = H(1-m)\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} + m\gamma\frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)}\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T[D]_e\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \qquad (۱)$$

نمونهٔ عددی

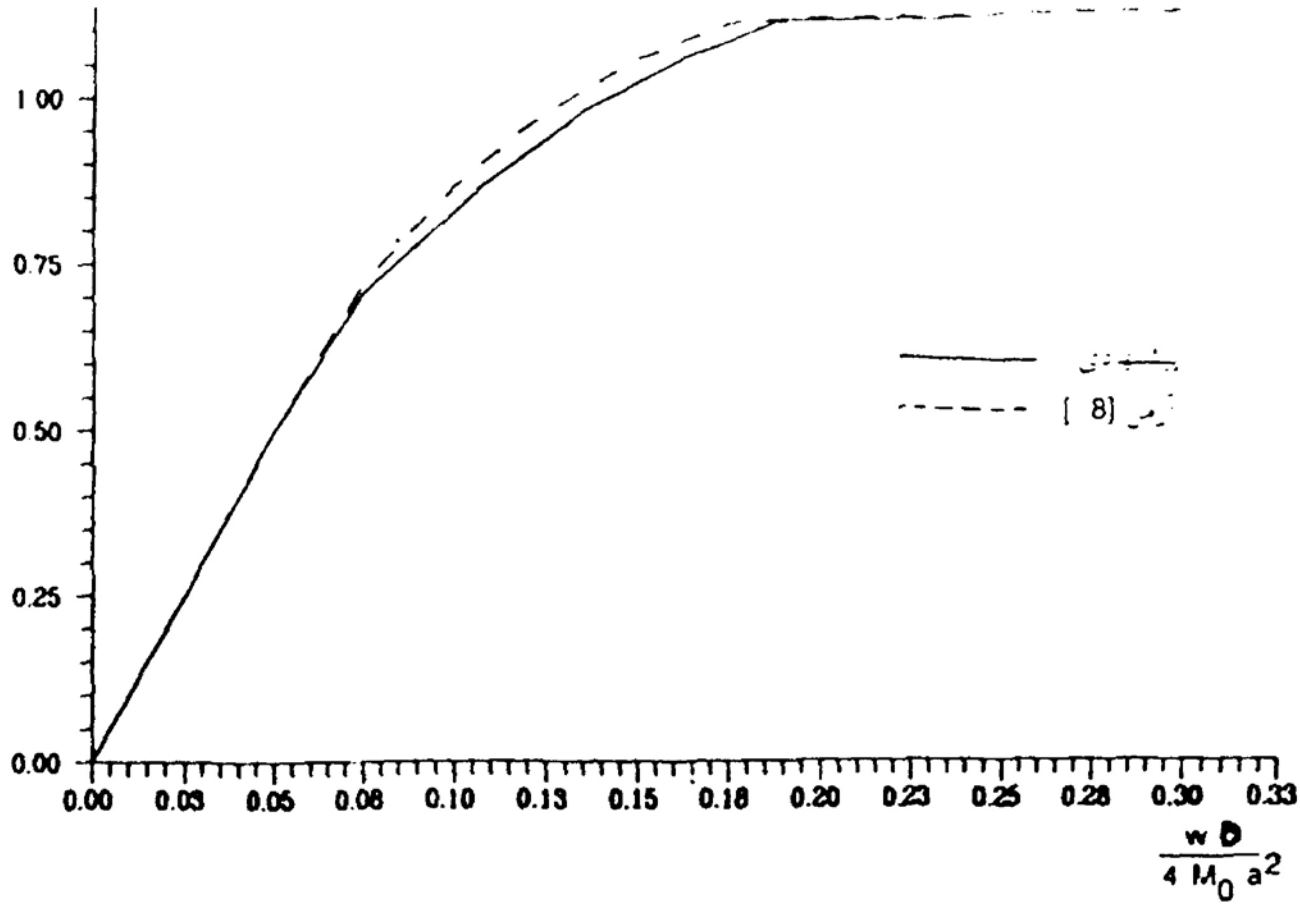
برای نشان دادن تواناییهای معیار تسلیم ترسکا گونه پنجم، یک صفحهٔ خمشی با آن تحلیل کشسان - مومسان می‌شود. شکل (۷) شبکه‌بندی یک چهارم از صفحهٔ مزبور را نشان می‌دهد. اندازهٔ پهلوهای این صفحهٔ مربعی ۲۵/۴ = a سانتی‌متر است. این سازه ضخامت ۰/۲۵ = ۱ سانتی‌متر دارد.



شکل (۷) - شبکه‌بندی صفحهٔ خمشی

براساس این شکل، سازه به ۷۲ جزء در دو لایه تقسیم می‌شود. صفحه در چهار پهلو دارای تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد. بار وارد بر صفحه گستردهٔ یکنواخت به شدت P است. ضریب کشسانی مواد E = ۷۰۳۱۰۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع و تنش تسلیم σ_y = ۲۱۱۰ کیلوگرم بر سانتی‌مربع می‌باشند. نسبت پواسون صفحه، ν = ۰/۳ پنداشته می‌شود. شکل (۸) نشان دهندهٔ تغییرمکان مرکز صفحه است. محور افقی متناسب با بار و محور قائم متناسب با تغییرمکان گرهی اختیار شده‌اند.

باید آگاه بود، درستی رابطه‌سازی و برنامه‌رایانه‌ای وابسته به آن، با مقایسه با پاسخهای دیگران مشخص می‌شود. در ضمن، ترتیب اجزای مومسان شده در شکل (۹) به نمایش در آمده است. ترتیب نقطه‌های مومسان شده با نتیجه‌های تجربی سازگار می‌باشد [8]. خاطر نشان می‌کند، تجربه‌های عددی گوناگون با معیار ترسکا گونه پنجم انجام گرفته است و کلیهٔ آنها درستی روش پیشنهادی برای تحلیل غیرخطی را تأیید کرده‌اند. آشکار است، حجم مقاله اجازهٔ درج تجربه‌های عددی بیشتر را نمی‌دهد.



شکل (۸) - نمودار نیرو - تغییرمکان مرکز صفحه

			4	2	1
		7	5	3	2
			6	5	4
				7	

شکل (۹) - ترتیب اجزای مومسان شده

نتیجه گیری

تحلیل کشسان - مومسان در این مقاله مورد بحث قرار گرفت. از سطحهای تسلیم ترسکا گونه سخن به میان آمد. نمونه‌های مختلف این سطحهای تسلیم به نظر خوانندگان رسید. افزون بر اینها، معیار تسلیم جدیدی پیشنهاد شد. با این معیار تحلیل کشسان - مومسان سازه‌ها انجام گرفت. به دلیل حجم زیاد، نمی‌توان کلیه تحلیلها را در این مقاله درج نمود. با وجود این، نتیجه‌های عددی به دست آمده و مقایسه آنها با پاسخهای دیگر پژوهشگران، کارایی سطح تسلیم پیشنهادی را تأیید می‌کنند.

منبعها

[1]- Rezaiee-Paiand. M., Asghari, H., "A Five -Parameter Yield Surface", Esteghlal Journal of Engineering, Isfahan University of Technology, Vol. 15, No. 2, pp.1-25, (March 1997), (in Persian).

[2]- Rezaiee-Pajand, M., "Tresca Type Yield Condition and Isotropic Hardening", Journal of the Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Vol. 1, No. 1, pp.79-96, (Spring 1989), (in Persian).

[3]- Rezaiee-Pajand, M., "Daynamic Analysis of Elasto-Plastic Structures", Journal of the Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Vol. 1, No. 2, pp.15-32, (Autumn 1989), (in Persian).

[4]- Torkamani, M.A.M., and Rezaiee-Pajand, M., "Plastic Cyclic Analysis Using Linear Yield Surface", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 110, No. 5, pp. 776-793, (May 1984).

[5]- Rezaiee-Pajand, M., "Elasto-Plastic Analysis and its Computer Programm", Journal of the Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Vol. 4, No. 1-2, pp. 5-29, (1992), (in Persian).

[6]- Torkamani, M.A.M., and Alsanusi, S.K., "Elasto-Plastic Analysis of Plane Stress Problem Using Linearized Yield Surface and Mixed Hardening Rule", Computers & Structures, Vol. 31, No. 6, pp. 935-956, (1989).

[7]- Torkamani, M.A.M., "A Linear Yield Surface in Plastic Cyclic Analysis", Computers & Structures, Vol. 22, No. 3, pp. 499-516, (1986).

[8]- Armen H., Pifko A.B., Levine H.S., and Isakson, G., Finite Element Techniques, Chapter 8, Plasticity, McGraw-Hill Book Company, (1972).