



# Prediction of Cutting Forces for Flat and Rough End Mill Tools Using B-spline Interpolation of Cutting Edge

## Part 1: B-spline Definition of Cutting Edge

B. Moetakef Imani.<sup>1</sup>, S.A. Hosseini<sup>2</sup>

*Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University, Mashhad, Iran  
Corresponding Author E-mail: imani@ferdowsi.um.ac.ir*

### Abstract

Milling Operation is one of the most widely used method among the machining operations. A variety of milling tools are used in machining of parts with different levels of complexity. End mill tools are used for peripheral milling with small immersion. Also, rough end mills are very widespread when it is required to remove bulk of material as quickly as possible. Rough end mills with serrated cutting edges profile are widely used for suppressing chatter vibrations encountered during milling operations. The serrated profile of cutting edge have phase shift from one flute to the next and interfere with the regeneration of waviness of the cut surface. A comprehensive simulation of rough end milling requires geometrical and physical simulation of the cutting process. In Part 1 of this research, flat and serrated end mills cutting edges are analytically defined and geometrically modelled as a B-spline curve. The main objective of first part of this research is to represent the cutting edges of flat and rough end mills with a unique representation. This representation can be efficiently applied to calculate the differential cutting forces components acting on the helical cutting edges.

**Keywords:** Rough End Milling, B-spline Interpolation, Geometric Modelling of Cutting Edge

---

<sup>1</sup> – Associate Professor

<sup>2</sup> - M.Sc. in Mechanical Engineering



# محاسبه نیروهای برشی ابزارهای فرز انگشتی و فرز خشن تراش با استفاده از درونیابی لبه برنده توسط منحنی های B-spline

بخش اول: تعریف هندسی لبه برنده توسط منحنی های B-spline

بهنام معتکف ایمانی<sup>۱</sup>، سید علی حسینی<sup>۲</sup>،

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک

Corresponding Author E-mail: imani@ferdowsi.um.ac.ir

## چکیده

فرزکاری یکی از فرآیندهای ماشینکاری است که به دلیل انعطاف پذیری فوق العاده در تولید محدوده وسیعی از قطعات صنعتی به پرکاربردترین فرآیند ماشینکاری تبدیل شده است. از جمله ابزارهای فرزکاری می توان به فرز انگشتی و فرز خشن تراش اشاره کرد. فرز انگشتی برای فرزکاری جانبی قطعه کار و فرز خشن تراش برای مرحله خشن تراشی که برداشتن حجم ماده زیادی از سطح قطعه کار مورد نیاز است استفاده می شود. اولین گام در مدلسازی فرآیند های برش فلزات مدلسازی هندسی لبه های برنده ابزار می باشد. در بخش اول این کار پژوهشی به مدل سازی لبه برنده در ابزارهای فرز انگشتی و خشن تراش با استفاده از منحنی های B-spline پرداخته می شود. مدل ارائه شده با استخراج مستقیم کلیه خواص هندسی لبه از معادلات B-spline امکان مدلسازی نیروها در دو حالت استاتیکی و دینامیکی برای لبه برنده با هر هندسه دلخواه را امکان پذیر می سازد.

واژه های کلیدی: فرزکاری خشن تراشی - درونیابی توسط منحنی های B-spline - مدلسازی هندسی لبه برنده

## ۱- مقدمه

امروزه انواع مختلفی از ابزارهای فرز با هندسه های متنوع در ماشینکاری قطعات صنعتی مورد استفاده قرار می گیرند. ابزار های فرز خشن تراش با لبه برنده مارپیچ دندانها ای در مراحل خشن تراشی و ابزارهای فرز انگشتی با لبه برنده مارپیچ در فرزکاری جانبی به طور گسترده ای مورد استفاده قرار می گیرند. در روش های کلاسیک مدل سازی لبه برنده، مدل هندسی برای هر نوع از هندسه لبه و شکل ابزار به صورت جداگانه تعریف می گردد [۱]. به همین دلیل مکانیک برش و مدل سازی نیروهای برشی نیز بایستی برای هر ابزار با هندسه لبه مخصوص به خود به صورت جداگانه تعریف گردد. نمونه ای از این روش را می توان در کارهای پژوهشی Armarego [۲]، Martellotti [۳]، Altintas [۴]، Campomanes [۵] و Budak [۶] مشاهده نمود. ضعف این روش ها در مدلسازی هندسی فرآیندهای ماشینکاری عدم عمومیت آنها برای هندسه های متنوع ابزارهای برشی می باشد. از این رو نیاز است مدلی ارائه شود که مستقل از نوع ابزار و تنها با در نظر گرفتن پارامترها و مختصات هندسی لبه ابزار فرآیند مدلسازی را انجام دهد. این مدل باید قادر باشد با داشتن پارامترهای هندسی ابزار به عنوان ورودی از قبیل نوع ابزار، قطر، تعداد لبه های برنده، زاویه هلیکس و دیگر مشخصات هندسی لبه برنده به مدلسازی هندسی لبه برنده بپردازد.

- دانشیار مهندسی مکانیک

- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک



## ۲- توابع پایه و منحنی های B-spline

یک منحنی پارامتری تابعی است که پارامتری مانند  $u$  را به نقطه مشخصی در فضا تصویر می کند. توابع B-Spline چند جمله ای های پارامتری هستند که امکان مدل سازی پروفیل های پیچیده توسط چند جمله ای هایی با درجه پایین را امکانپذیر می سازند. این امر با تقسیم یک پروفیل پیچیده به دسته ای از پروفیل های ساده تر امکان پذیر است. بنابراین یک B-spline مجموعه ای از منحنی های به هم پیوسته است که در نقطه اتصال دارای شیب یکسان می باشند. به هر یک از این منحنی ها یک منحنی Bezier می گویند. به پارامتر معادل نقطه اتصال یک گره (Knot) گفته می شود. بنابراین B-spline ای از درجه  $p$  که دارای بردار گره ای (Knot Vector)  $[u_0, u_1, \dots, u_m]$  می باشد، از  $m$  چند جمله ای Bezier مختلف که همگی از درجه  $p$  می باشند تشکیل شده است. به طوری که به ازای  $u_0 \leq u < u_1$  معادلات منحنی اول برقرار است و به ازای  $u_1 \leq u < u_2$  معادلات منحنی دوم و به همین ترتیب در هر بازه (Span) معادله مخصوص به همان بازه صدق می کند. بایستی توجه شود که بردار گره ای همواره صعودی است و همچنین دو یا چند نقطه گره ای متوالی می توانند با یکدیگر برابر باشند. با داشتن  $n+1$  نقطه کنترل  $P_0, P_1, \dots, P_n$  و یک بردار گره ای  $[u_0, u_1, \dots, u_m]$  معادله B-spline از درجه  $p$  را می توان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad (1)$$

که در رابطه (۱) عبارت  $N_{i,p}(u)$  توابع پایه B-spline هستند که با استفاده از روابط زیر محاسبه می گردند [Y] و [A].

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

توابع پایه یک B-spline وزنه هایی برای نقاط کنترل هستند که چند ضلعی کنترل را بر روی منحنی B-spline پوش می کنند. برای هر تابع B-spline رابطه زیر صادق می باشد [Y]:

$$m = n + p + 1 \quad (3)$$

به عبارت دیگر برای داشتن یک B-spline از درجه  $p$  با  $n+1$  نقطه کنترل بایستی  $n+p+2$  نقطه گره ای داشت. منحنی های B-spline با درجه و نقاط کنترل یکسان می توانند متناسب با نحوه چیدمان بردار گره ای رفتار متفاوتی داشته باشند. می توان اثبات کرد که اگر  $p+1$  پارامتر گره ای اول و آخر بردار گره ای برابر باشند، یعنی اگر  $u_0 = u_1 = \dots = u_{p+1} = 0$  و  $u_{m-p-1} = u_{m-p} = \dots = u_m = 0$  منحنی B-spline نه تنها از اولین و آخرین نقطه کنترل می گذرد بلکه در این نقاط بر چند ضلعی کنترل نیز مماس خواهد بود.

## ۳- درونیابی توسط منحنی های B-spline

هدف از درونیابی توسط یک منحنی B-spline یافتن معادله یک منحنی B-spline از درجه مشخص است که از تعدادی نقطه داده شده در صفحه مختصات عبور کند. همانطور که ذکر شد یک گروه نقطه کنترل همراه با یک بردار گره ای و درجه که مشخص کننده توابع پایه است یک منحنی B-spline را تعریف می کنند. با مشخص بودن درجه یک B-spline، کافی است بردار گره ای و نقاط کنترل آن پیدا شود. یافتن معادله B-spline شامل سه مرحله مختلف است:



### ۳-۱- تعیین پارامترهای منحنی

برای یافتن معادله منحنی یک B-spline که از نقاط  $D_0, D_1, \dots, D_n$  عبور کند ابتدا بایستی پارامترهای متناظر هر یک از این نقاط را مشخص نمود. به عبارت دیگر بایستی پارامترهای  $t_0, t_1, \dots, t_n$  به قسمی تعیین گردند که  $D_i = C(t_i)$ . برای تعیین این پارامترها سه روش وجود دارد که عبارتند از: روش تقسیم همگن (Uniformly Spaced Method)، روش طول وتر (Chord Length Method) و روش مایل به مرکز (Centripetal Method) [۴].

### ۳-۲- تعیین بردار گرهی

برای تعیین بردار گرهی نیز می توان از روش تقسیم همگن استفاده کرد، البته بایستی توجه کرد که به منظور حفظ پیروی مناسب B-spline از روند تغییرات نقاط داده شده،  $p+1$  گره اول و آخر بردار گرهی یکسان در نظر گرفته می شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} u_o = u_1 = \dots = u_{p+1} &= 0 \\ u_{j+p} &= \frac{j}{n-p+1} \quad j = 1, 2, \dots, n-p \\ u_{m-p-1} = u_{m-p} = \dots = u_m &= 0 \end{aligned} \quad (۴)$$

### ۳-۳- تعیین نقاط کنترل منحنی

با داشتن پارامترهای متناظر نقاط داده و بردار گرهی می توان به سادگی نقاط کنترل را یافت:

$$D_k = C(t_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \cdot P_i \quad (۵)$$

تنها مجهول این رابطه نقاط  $P_i$  یا همان نقاط کنترل می باشند. بایستی توجه کرد که توابع پایه  $N_{i,p}$  تنها به مقدار  $p$  یا درجه B-spline بستگی دارد. با بدست آوردن نقاط کنترل، معادله B-spline توسط معادله (۱) قابل ارائه خواهد بود.

### ۴- مدل سازی هندسی لبه برنده توسط منحنی های B-spline

برای مدل سازی لبه برنده برای ابزار فرز انگشتی و فرز انگشتی خشن تراش لازم است مختصات تعدادی از نقاط لبه این دو ابزار به عنوان ورودی به الگوریتم درونیابی B-spline داده شود. بدین منظور لازم است یک دستگاه مختصات بر روی کف ابزار تعریف گردد و مختصات تمامی نقاط لبه برنده نسبت به آن تعریف گردد. شکل (۱) و (۲) نحوه تعریف دستگاه مختصات برای ابزار فرز انگشتی و فرز خشن تراش را نشان می دهد. در شکل (۱) و (۲) بردار  $R$  بردار مکان نقطه مفروض  $P$  و شعاع حامل نقطه  $P$  یا همان فاصله شعاعی از محور  $Z$  می باشد که چون در ابزار فرز انگشتی لبه های برنده بر روی محیط ابزار قرار دارند بردار  $R$  همان شعاع ابزار می باشد [۹].

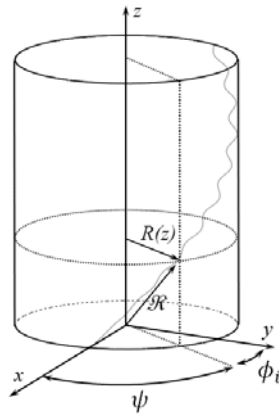
$$R = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} \quad (۵)$$

که در رابطه (۵)

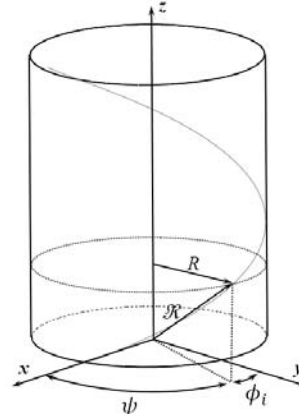
$$\begin{aligned} R_x &= R \cdot \sin \phi_i(z) \\ R_y &= R \cdot \cos \phi_i(z) \end{aligned} \quad (۶)$$

$$R_z = z$$

در رابطه (۶)، شعاع ابزار و  $\phi_i(z)$  زاویه درگیری شعاعی (Axial Immersion Angle) می باشد. چون در ابزار فرز خشن تراش لبه برنده دارای پروفیل دندانه ای می باشد شعاع ابزار متغیر است و از رابطه (۷) بدست می آید:



شکل ۲ - بردار مکان برای یک نقطه روی لبه ابزار فرز خشن تراش



شکل ۱ - بردار مکان برای یک نقطه روی لبه ابزار فرز انگشتی

$$R \rightarrow R(z) = \frac{D}{2} - R^s(z) \quad (7)$$

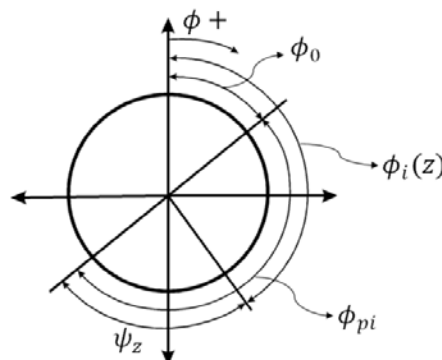
در مدل سازی هندسی ابزار یکی از لبه های برنده به عنوان لبه مرجع  $i = 0$  انتخاب می شود و زاویه نقطه شروع آن در کف ابزار با  $\phi_i(z) = 0$  نمایش داده می شود. موقعیت زاویه ای دیگر لبه های برنده روی ابزار نسبت به لبه مرجع سنجیده می شود. زاویه درگیری شعاعی برای لبه برنده  $i$  ام از یک ابزار با  $L$  لبه برنده و قطر  $D$  با رابطه (۸) تعیین می شود:

$$\phi_i(z) = \phi_0 + \sum_{i=1}^L (\phi_{pi}) - \psi(z) \quad (8)$$

در رابطه (۸) زاویه تاخیر  $\psi(z)$  به صورت زیر محاسبه می شود:

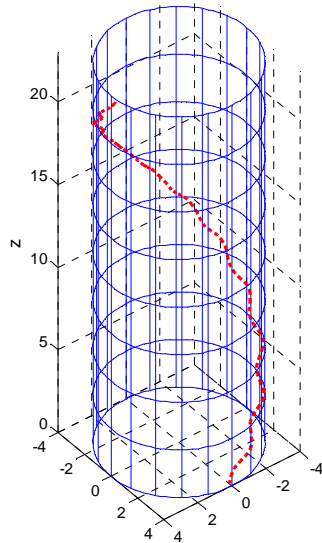
$$\psi(z) = \frac{\tan(i_o)}{(\frac{D}{2})} \cdot z = k_\mu \cdot z \quad (9)$$

شکل (۳) نحوه تعریف زوایای فوق را برای یک ابزار فرز از نمای بالا نشان می دهد.

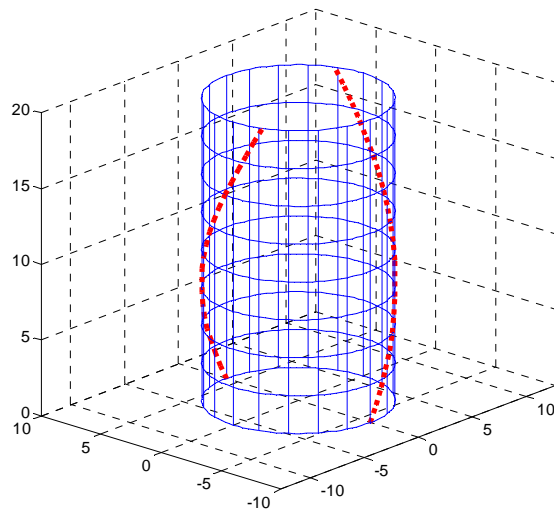


شکل ۳ - نحوه تعریف زوایای  $\phi_0$ ،  $\phi_i(z)$ ،  $\psi(z)$  و  $\phi_{pi}$  [۹] و [۱۰]

با داشتن بردار  $R$  و تعیین مولفه های آن مختصات دقیق نقاط روی لبه برنده ابزار فرز انگشتی و فرز خشن تراش مشخص می شود. در این صورت برای تولید نقاطی از لبه های برنده به عنوان ورودی الگوریتم درونیایی B-spline کافی است تعداد لبه های برنده روی ابزار، زاویه هلیکس و ارتفاع لبه های برنده تعیین شود. شکل (۴) و (۵) نقاط تولید شده از لبه یک فرز انگشتی و یک فرز خشن تراش که از آنها به عنوان ورودی الگوریتم درونیایی B-spline استفاده می شود را نشان می دهد.

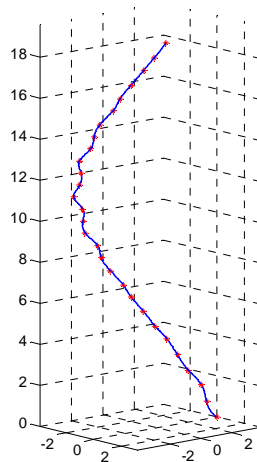


شکل ۵- نقاط تولید شده از لبه برنده یک ابزار فرز خشن تراش به قطر ۸ میلیمتر و زاویه هلیکس ۴۰ درجه [۱۱]

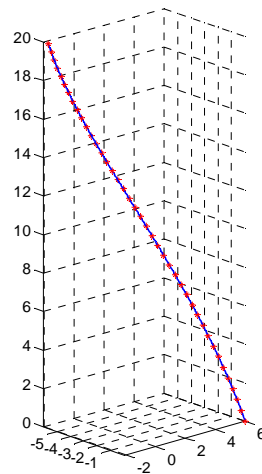


شکل ۴- نقاط تولید شده از لبه برنده یک ابزار فرز انگشتی با دو لبه برنده به قطر ۱۲ میلیمتر و زاویه هلیکس ۳۰ درجه [۱۱]

این نقاط همان ورودی های الگوریتم درونیابی B-spline هستند و با وارد کردن آنها به الگوریتم که در نرم افزار MATLAB نوشته شده است لبه های برنده به شکل B-spline تولید می شوند. شکل (۶) و (۷) یکی از لبه های ابزارهای فوق را که با الگوریتم درونیابی به یک منحنی B-spline از درجه 3 تبدیل شده اند را نشان می دهد.



شکل ۷- منحنی B-spline عبور کننده از لبه برنده یک ابزار فرز خشن تراش به قطر ۸ میلیمتر و زاویه هلیکس ۴۰ درجه [۱۱]



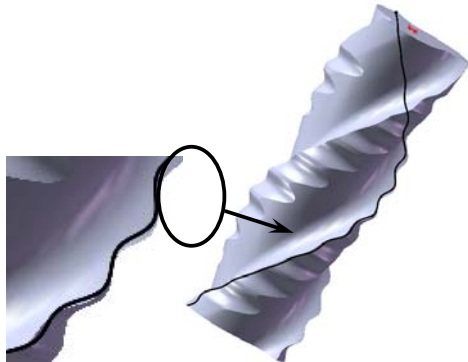
شکل ۶- منحنی B-spline عبور کننده از لبه برنده یک ابزار فرز انگشتی به قطر ۱۲ میلیمتر و زاویه هلیکس ۳۰ درجه [۱۱]

### ۵- بررسی صحت مدل B-spline لبه با ابزار مورد استفاده در تست

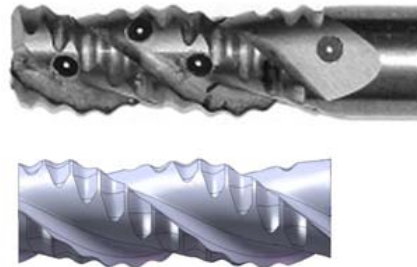
لازم است مدل ایجاد شده از لبه های برنده توسط منحنی های B-spline با لبه ابزاری که در تست از آن استفاده می شود مقایسه گردد تا از صحت مدل B-spline اطمینان حاصل شود. بدین منظور ابتدا مدلی از ابزار مورد استفاده در تست های فرزکاری در نرم افزار SolidWorks و مدل B-spline لبه برنده در نرم افزار MATLAB ایجاد گردید. سپس با مقایسه این دو مدل با یکدیگر دقت مدل در حد 0.02 mm مورد تایید واقع گردید. شکل (۸) مدل ایجاد شده از یک ابزار فرز خشن تراش در



نرم افزار SolidWorks و مقایسه آن با ابزار مورد استفاده در تست و شکل (۹) انطباق لبه مدل شده با منحنی های B-spline را با لبه ابزار واقعی نشان می دهد.



شکل ۹- مقایسه دقت مدل B-spline یک لبه برنده از ابزار با مدل سه بعدی [۱۱]



شکل ۸- مقایسه مدل هندسی سه بعدی ابزار با ابزار مورد استفاده در تست [۱۱]

## ۶- نتیجه گیری

با استفاده از معادله لبه برنده که با استفاده از منحنی های B-spline تولید شده است می توان عملیات ریاضی مورد نظر از قبیل مشتق گیری ، انتگرالگیری و غیره را مستقیماً بر روی معادله لبه برنده انجام داد و نیازی به ارائه فرمول جداگانه برای هندسه های مختلف لبه در ابزارهای مختلف نمی باشد. این روش مستقل از هندسه ابزار عمل می کند و قابل پیاده سازی بر روی کلیه ابزارهای فرز با هندسه های گوناگون لبه برنده می باشد. یکی از مهمترین کاربردهای این روش محاسبه نیروهای برشی در فرآیند فرزکاری برای ابزارهای فرز خشن تراش می باشد که هندسه لبه آنها به دلیل دندانه دار بودن از پیچیدگی خاصی برخوردار است. در ابزارهای فرز انگشتی بدلیل هندسه یکنواخت لبه مولفه های دیفرانسیلی نیرو و تصویر آنها در امتداد محورهای مختصات با سادگی قابل محاسبه است. در ابزارهای فرز خشن تراش هندسه لبه برنده به دلیل دندانه دار بودن آن در امتداد محور ابزار تغییر می کند به همین دلیل محاسبه تصویر مولفه های دیفرانسیلی نیرو در امتداد محورهای مختصات به آسانی ابزارهای فرز انگشتی امکانپذیر نخواهد بود. قسمت دوم این مقاله (Part 2) به شرح کاربرد این روش در مدل سازی نیروها در فرآیند فرزکاری می پردازد.

## مراجع

- 1- Engin, S., Mechanics and Dynamics of General Milling Cutters, Part I: Helical End Mills, Int. J. Mach. Tools Manuf., 41, pp. 2195-2212, 2001.
- 2- Armarego, E.G.A., Brown, R.H., The Machining of Metal, Pentice-Hall, 1996.
- 3- Martellotti, M.E., 1941, An Analysis of Milling Process, Trans. ASME, 63, 667-700.
- 4- Altintas, Y., 2000 Manufacturing Automation, Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibration and CNC Design, Cambridge University Press.
- 5- Campomanes, M. L., Kinematics and Dynamics of Milling With Roughing Endmills, Metal Cutting and High Speed Machining, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002,.
- 6- Budak E.A, Altintas, Y., and Armarego E.J.A., 1996, Prediction of milling force coefficient from orthogonal cutting data, Trans. ASME, 118, 216-224
- 7- Piegl, L., and Tiller, W., The NURBS Book, New York, Springer-Verlag, 1997, ISBN: 3-540-61545-8.
- 8- Shene, C.K., Introduction to computing with geometry, Text book, Michigan Technological University.
- 9- Merdol, S.D., Altintas, Y., Mechanics and dynamics of serrated cylindrical and tapered end mill, Transaction of the ASME, Journal of manufacturing science and engineering, May 2004, Vol. 126.
- 10- Moetakef Imani, B., El-Mounayri, H., Hosseini, S.A., Analytical Chip Load Prediction for Rough End Mill, Proceeding of Tehran International Congress on Manufacturing Engineering (TICME 2005), 2007, Iran.

حسینی، سید علی، مدل سازی استاتیکی و دینامیکی فرآیند فرزکاری خشن تراشی، پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک (طراحی کاربردی)، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۷.