

روشی جدید برای ردیابی ترک در محور های دوار، به کمک تغییرات شکل مد

مهدي راغبی^۲
گروه مهندسی مکانیک
دانشگاه فردوسی مشهد

محمد حسین زاده^۲
دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد
(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۲/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۰۹/۲۳)

انوشیروان فرشیدیان فر^۱
گروه مهندسی مکانیک
دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این مقاله، روشی غیر مخرب جهت تعیین فرکانس و تشخیص موقعیت ترک در محور های دوار، با استفاده از روش ماتریس انتقال^۴ و بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، ارائه شده است. در این محور، ترک ها می توانند تحت زوایای مختلفی نسبت به یکدیگر قرار گیرند. وجود ترک در محور ها انعطاف پذیری محلی را تغییر داده و کاهش فرکانس طبیعی را به دنبال خواهد داشت. نتایج حاصل از این روش برای مثال های متنوعی مورد بررسی قرار گرفته و به کمک این تحلیل موقعیت ترک به دست آمده است. در نهایت، نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی به کمک روش ماتریس انتقال با نتایج حاصل از پژوهش های تجربی مقایسه شده که توافق بین پاسخ ها نشان دهنده صحت روش به کار برده شده می باشد.

واژه های کلیدی: محور ترک دار، تحلیل فرکانسی، مد شیپ، روش ماتریس انتقال، محور اورهنگ^۵

A Novel Way for Crack Detection in Rotors, Using Mode Shape Changes

A. Farshidianfar
Mech. Eng. Group
Ferdowsi Univ. of Mashhad

M. Hoseinzadeh
School of Eng.
Islamic Azad Univ., Mashhad Branch

M. Raghebi
Mech. Eng. Group
Ferdowsi Univ. of Mashhad

ABSTRACT

In this article, a non-destructive method for the frequency analysis and multi-crack detection in rotating shafts is presented, using transfer matrix method (TMM) and based on the Timoshenko beam theory. The cracks can be placed in different angles with respect to each other. The presence of cracks in structures change the local flexibility and results in reduction of natural frequency. The TMM is exerted for the frequency analysis of the shafts with discrepant boundary conditions. The resultant frequencies are used for requiring the mode shapes of the shaft corresponding to the two perpendicular planes (x-z and y-z). Subtracting these two mode shapes gives the position of the crack or cracks. Finally, the required frequencies by TMM are compared with some available experimental results. Close adaptation between these results is representing the high accuracy of the transfer matrix method.

Key Words: Cracked Shaft, Frequency Analysis, Mode Shape, Transfer Matrix Method (TMM), Overhang Shaft

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): Farshid@um.ac.ir

۲- کارشناس ارشد (عضو باشگاه پژوهشگران جوان): Hosein2004@yahoo.com

۳- دانشجوی دکتری

4-Transfer Matrix Method (TMM)

5-Overhang Shaft

فهرست علائم

بالانویس ها

l	چپ
r	راست

۱- مقدمه

بیشتر تجهیزاتی که در صنایع مکانیکی مورد استفاده قرار می گیرند دارای روتور نیز می باشند. یکی از عیب های اساسی روتورها که در صورت عدم تشخیص به موقع می تواند منجر به حوادث ناگوار گردد، ترک خستگی در محور است. موضوع تحلیل روتور دارای ترک، اولین بار در سال ۱۹۷۰ مورد بررسی قرار گرفت. رفتار ارتعاشی ساختارهای دارای ترک، خصوصاً روتورهای ترک دار در دو دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته و مساله خسارت و تشخیص ترک در اجزاء ساختاری در سال های اخیر نقش مهمی کسب کرده است. محققان زیادی مدل های مختلفی از محور ترک دار را مورد بررسی قرار داده اند تا تغییرات رفتار ارتعاشی ناشی از رشد ترک در محور را مطالعه نمایند و راهی جدید و کاربردی تر برای جلوگیری از این خسارت ناگهانی پیش رو بگذارند. در این تحقیقات عموماً دینامیک روتورهای ترک دار مورد توجه قرار گرفته است؛ مطابق آن چه در کتاب دیماروگوناتس و پایپتیس^۱ [1] شرح داده شده است. برخی دیگر از کارهای صورت گرفته توسط محققان به صورت زیر می باشد:

دیماروگوناتس [2] در مقاله ای کارهای صورت گرفته توسط سایر محققین را خصوصاً ارتعاشات ساختارهای ترک دار مورد بررسی قرار داد. پاپادوپولوس^۲ و دیماروگوناتس [3]، کوپلینگ ارتعاشات پیچشی و محوری را در محور دارای ترک عرضی سطحی بررسی کردند. آن ها ترک را به صورت باز در نظر گرفتند و انعطاف پذیری محلی ناشی از ترک را با یک ماتریس 6×6 ، با فرض ۶ درجه آزادی برای المان ترک دار محور نمایش دادند و با صرفه نظر از اثر برش و در نظر گرفتن خمش در دو جهت اصلی و کشش، به ماتریس سختی 3×3 شامل جملاتی که بیانگر کوپلینگ بود، دست

a	عمق ترک
A	مساحت سطح مقطع محور
c_{ij}	مولفه های ماتریس انعطاف پذیری ناشی از تر
E	مدول الاستیسیته
G	مدول برشی
I	ممان اینرسی سطح مقطع محور
$J(\alpha)$	چگالی انرژی کرنشی
K_{Ni}	فاکتور شدت تنش
k	ضریب شکل سطح مقطع
M	گشتاور
P_i	نیروی اعمالی بر روی روتور
Q	نیروی برشی
u_i	جابجایی اضافی ناشی از ترک
XYZ	دستگاه مختصات ساکن بر روی روتور
\underline{XYZ}	دستگاه مختصات مرجع

نشانه های یونانی

α	عمق متغیر ترک
ω	فرکانس طبیعی
Ω	سرعت دورانی محور
ρ	دانسیته
ϕ_Y و ϕ_X	زوایای دوران نسبت به دستگاه مختصات ساکن بر روی محور
$\phi_{\underline{Y}}$ و $\phi_{\underline{X}}$	زوایای دوران در دستگاه مختصات کلی
σ_i	تنش ناشی از بار P_i
ν	ضریب پواسان

زیر نویس ها

j و i	اندیس تکرار
N	شماره مد
r و i	موهومی و حقیقی
y و x	محورهای مختصات ساکن بر روی محور که با آن دوران می کنند

1-Dimarogonas and Pipetis

2-Papadopoulos

سکار [۹] در مقاله ای تاثیر هم زمان چند ترک را روی تیرها و محور ها مورد بررسی قرار داد و نیز روش های صورت گرفته توسط سایر محققین را به منظور تعیین ترک ارائه نمود.

باخ اشمیت^۷ و همکاران [۱۰] روشی را برای تعیین موقعیت و عمق ترک عرضی در سیستم یک روتور با استفاده از اندازه گیری های ارتعاشی ارائه نمودند. آن ها با استفاده از مدل ارائه شده و روش حداقل مربعات در دامنه فرکانسی، موقعیت ترک ایجاد شده را پیش بینی کردند. همچنین عمق ترک را از مقایسه ممان خمشی ایستای ناشی از وزن روتور و شرایط راستای یاتاقان با ممان خمشی معادل تعیین شده که متناوب بود، محاسبه نمودند.

تسای و ونگ^۸ [۱۱]، رفتار ارتعاشی محور ترک دار را به ازای موقعیت های گوناگون و عمق های مختلف ترک، تحلیل کرده و روشی برای تعیین موقعیت و اندازه ترک عرضی باز روی محور ساکن، بدون درگیر کردن آن با سیستم ارائه نمودند.

در سال بعد تسای و ونگ [۱۲] محور دواری را مورد بررسی قرار دادند که دارای چندین ترک بود. آن ها در مقاله خویش ترک ها را در مد اول و تحت زوایای گوناگون نسبت به یکدیگر در نظر گرفتند و مد شیپ های متناظر با محور ترک دار و بدون ترک را ترسیم نمودند. سپس از تفاضل این دو شکل مد که به ازای فرکانس طبیعی اول به دست آمده بود، توانستند موقعیت ترک های موجود در سیستم محور دوار را بیابند.

در این مقاله، به جای استفاده از مد شیپ های محور سالم و ترک دار تنها از مد شیپ محور ترک دار برای تعیین موقعیت ترک استفاده شده است. در بسیاری از موارد ممکن است فردی که وظیفه نگهداری و مراقبت های پیشگیرانه از سیستم ها را بر عهده دارد، از پیشینه سیستم مزبور اطلاعی نداشته باشد و یا این که در اثر گذشت زمان این اطلاعات از بین رفته باشد. بنابراین، اگر از روش ذکر شده در مرجع [۱۲] جهت تشخیص حضور ترک و همچنین موقعیت ترک

یافتند و پدیده حرکت کوپل شده عرضی و محوری را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. در همان سال پاپادوپولوس و دیماروگوناتس [4] کوپلینگ ارتعاشات خمشی و پیچشی را نیز برای محور ترک دار تیموشنکو بررسی کردند. آن ها همچنین به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری و تاثیر ترک روی رفتار ارتعاشی محور پرداختند و ارتباط بین مقادیر ویژه سیستم، عمق ترک و نسبت باریکی محور را به دست آوردند.

در مقاله ای دیگر پاپادوپولوس و دیماروگوناتس [۵] ارتعاشات کوپل شده محور های ترک دار را مورد بررسی قرار دادند. آن ها در مقاله خویش از تئوری تیر تیموشینکو استفاده نموده و ماتریس انعطاف پذیری 6×6 را برای مدل سازی ترک به کار بردند.

سکار [۶] در مقاله ای، خصوصیات ارتعاشی محور ترک دار با دو ترک باز را بررسی نمود. وی به منظور تحلیل ارتعاشات خمشی محور از روش المان محدود استفاده کرد و نیز تاثیر یک ترک روی ترک دیگر را برای فرکانس های ویژه، مد شیپ ها و محدوده های سرعت بحرانی نشان داد.

گسچ^۷ [۷] رفتار دینامیکی روتور لاول^۳ با یک ترک عرضی را مورد بررسی قرار داد. وی در مقاله اش معادلات غیر خطی حرکت را به دست آورد و به علت غلبه وزن در تغییر مکان الاستیک افقی محور، این معادلات را در حالی به صورت خطی در آورد که با زمان تغییر می کردند.

چاندروس^۴ و همکاران [۸] ارتعاشات پیچشی محور استوانه ای با یک ترک پیرامونی را به دو روش تحلیلی دقیق و روش عددی المان محدود بررسی نمودند. آن ها برای یافتن فرکانس های محور ترک دار از خارج قسمت ریلی^۵ و برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی آن از فرمول تغییرات هیو- واشیزو- بار^۶ استفاده کرده و انعطاف پذیری مربوط به ترک را بر مبنای اصول مکانیک شکست مدل نمودند.

-
- 1-Sekhar
 - 2-Gasch
 - 3-Laval Rotor
 - 4-Chondros
 - 5-Rayleigh Quotient
 - 6-Hu-Washizu-Barr

7-Bachschnid
8-Tsai and Wang

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^a J(\alpha) d\alpha, \quad (1)$$

که در آن، $J(\alpha)$ تابع چگالی انرژی کرنشی می باشد که توسط رابطه زیر داده شده است:

$$J(\alpha) = \int_{-b}^b \frac{1-\nu^2}{E} \left[\left(\sum_{i=1}^6 K_{Ii} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 + (1+\nu) \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \right] dX. \quad (2)$$

در این رابطه، ν ضریب پواسون و E مدول یانگ می باشد. فاکتور شدت تنش نیز با استفاده از رابطه زیر ارزیابی می شود:

$$K_{Ni} = \sigma_i \sqrt{\pi \alpha} F_N \left(\frac{\alpha}{h} \right), \quad (3)$$

که در آن، $N = I, II, III$ بوده و σ_i تنش های حاصل از بار P_i در ناحیه ترک است. توابع $F_N(\alpha/h)$ در پیوست A داده شده است. انعطاف پذیری محلی ایجاد شده ناشی از ترک، با توجه به روابط ذکر شده، می تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_{-b}^b \int_0^a J(\alpha) d\alpha dX. \quad (4)$$

اساساً، یک ماتریس انعطاف پذیری کامل برای ترک، ماتریسی 6×6 [13] می باشد که از معادله (۴) به دست می آید. در این مطالعه با توجه به ماهیت تئوری تیر تیموشنکو، فرض می شود که عبارات مربوط به اثرات خمشی و برشی، پاسخ دینامیکی ناخالص روتورها را تحت تاثیر قرار دهد. بنابراین c_{44} ، c_{45} ، c_{55} و c_{33} در نظر گرفته می شوند (پیوست B).

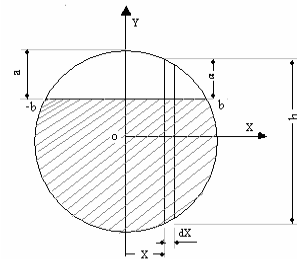
۳- معادلات حرکت سیستم

شکل ۲ نمای شماتیک روتور را نشان می دهد که در آن \underline{XYZ} بیانگر دستگاه مختصات مرجع است، در صورتی که XYZ سیستم مختصات ثابت بر روی روتور می باشد که همراه با روتور با سرعت ثابت Ω حول محور Z دوران می کند. محور \underline{Z} با محور Z موازی است.

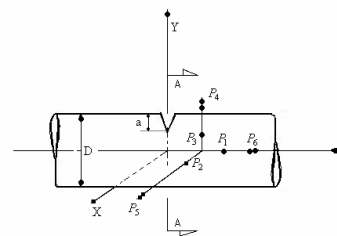
های احتمالی در سیستم استفاده شود، بایستی فرکانس طبیعی و یا اطلاعات تجربی مربوط به مد شیپ محور سالم نیز در دسترس باشد، در غیر این صورت نمی توان از روش اشاره شده استفاده نمود. بنابراین در چنین مواقعی است که اهمیت روش ذکر شده در مقاله کنونی به منظور تشخیص موقعیت ترک مورد توجه بیشتری قرار می گیرد و تنها با استفاده از اطلاعات و داده های فعلی محور می توان وجود ترک و موقعیت آن را پیش بینی نمود.

۲- انعطاف پذیری ناشی از ترک

شکل ۱ جزئیات روتوری را نشان می دهد که دارای یک ترک است.



(الف) مقطع A-A



(ب) بارهای اعمالی

شکل (۱): روتور دوار ترک دار (الف) مقطع محور ترک دار،

(ب) نیروهای اعمالی به محور.

این روتور شش نیروی کلی P_i ($i=1,2,\dots,6$) را تحمل می کند. بر طبق معادله پاریس [۱] جابه جایی اضافی u_i ناشی از ترکی به عمق a در جهت i ، به صورت زیر تعریف می شود:

دوران ϕ_X و ϕ_Y در دستگاه مختصات کلی می تواند بر حسب تغییر مکان های X و Y و زوایای دوران ϕ_X و ϕ_Y در دستگاه مختصات ساکن بر روی محور به صورت زیر بیان شود (شکل ۲):

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_X \\ \phi_Y \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} \phi_X \\ \phi_Y \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

ماتریس دوران T نیز به صورت زیر می باشد:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix}. \quad (9)$$

با به کار بردن اصل همیلتون ، معادلات حرکت برای محور دوار در دستگاه مختصات XYZ به صورت چهار معادله زیر به دست می آید:

$$\ddot{X} - 2\Omega \dot{Y} - \Omega^2 X - \dot{\Omega} Y - \frac{kG}{\rho} (X'' - \phi_Y') = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{Y} + 2\Omega \dot{X} - \Omega^2 Y + \dot{\Omega} X - \frac{kG}{\rho} (Y'' - \phi_X') = 0, \quad (11)$$

$$(12)$$

$$\ddot{\phi}_X + 2\Omega \dot{\phi}_Y - \Omega^2 \phi_X - \dot{\Omega} \phi_Y - \frac{E}{\rho} \phi_X'' - \frac{kGA}{\rho I} (Y' - \phi_X) = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{\phi}_Y - 2\Omega \dot{\phi}_X - \Omega^2 \phi_Y + \dot{\Omega} \phi_X - \frac{E}{\rho} \phi_Y'' - \frac{kGA}{\rho I} (X' - \phi_Y) = 0.$$

می توان معادلات (۱۰) تا (۱۳) را با حذف ϕ_Y و ϕ_X فقط بر حسب تغییر مکان های عرضی X و Y نوشت. در این صورت با در نظر گرفتن سرعت ثابت ($\dot{\Omega} = 0$) برای روتور، این معادلات به شکل زیر در می آیند:

$$X^{iv} + aX'' + b\ddot{X} + cX + d\dot{X} + e\ddot{X} + f\dot{Y} + g\dot{Y} + h\ddot{Y} = 0, \quad (14)$$

$$Y^{iv} + aY'' + b\ddot{Y} + cY + d\dot{Y} + e\ddot{Y} - f\dot{X} - g\dot{X} - h\ddot{X} = 0, \quad (15)$$

که در این روابط:

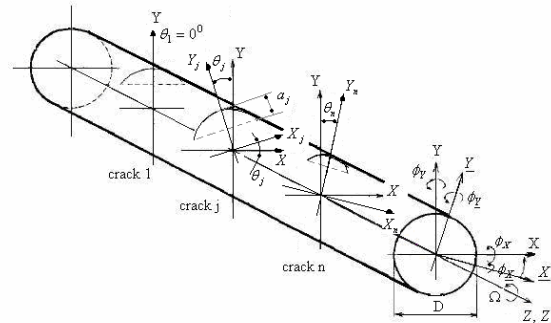
$$a = \frac{\rho\Omega^2}{kG} + \frac{\rho\Omega^2}{E}, \quad b = -\frac{\rho}{kG} - \frac{\rho}{E},$$

$$c = \frac{\rho^2\Omega^4}{kGE} - \frac{\rho A\Omega^2}{EI}, \quad d = -\frac{6\rho^2\Omega^2}{kGE} + \frac{\rho A}{EI}$$

$$e = \frac{\rho^2}{kGE}, \quad f = \frac{2\rho\Omega}{kG} + \frac{2\rho\Omega}{E},$$

$$g = \frac{4\rho^2\Omega^3}{kGE} - \frac{2\rho A\Omega}{EI}, \quad h = -\frac{4\rho^2\Omega}{kGE}.$$

در ادامه معادلات حرکت روتور با استفاده از تئوری تیر تیموشینکو به دست می آید.



شکل (۲): روتور دارای چند ترک و محورهای مختصات ثابت و دورانی.

بنابراین، علاوه بر تغییر مکان خمشی عرضی (X و Y)، دو متغیر مستقل جدید (ϕ_X و ϕ_Y) که زوایای دوران ناشی از خمش می باشند باید برای روتور در نظر گرفته شوند تا تغییر انحنای برشی عرضی را نشان دهند. به این ترتیب، انرژی پتانسیل و جنبشی برای محور با سطح مقطع A و ممان اینرسی I چنین است:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI (\phi_X'^2 + \phi_Y'^2) + kGA \left[(Y' - \phi_X)^2 + (X' - \phi_Y)^2 \right] \right) dZ, \quad (5)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho A (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \rho I (\dot{\phi}_X^2 + \dot{\phi}_Y^2) \right) dZ, \quad (6)$$

که در آن، ρ و G و k به ترتیب عبارتند از دانسیته جرمی، مدول برشی و ضریب برشی [۱۴]. در این معادلات، مشتقات جزئی مکانی، $\partial/\partial Z$ ، با علامت پرایم و مشتقات زمانی، $\partial/\partial t$ ، با علامت نقطه نشان داده شده است. از آنجایی که ترک همراه با دوران روتور، نسبت به زمان باز و بسته می شود، لذا تحلیل فرکانسی آن در دستگاه مختصات کلی دشوار خواهد بود. بنابراین روابط مربوطه به ازای دستگاه مختصات محلی که با محور دوران می کند به دست آمده است. به این ترتیب تغییر مکان های X و Y و زوایای

در این رابطه A_r, A_i, B_r و B_i اعداد حقیقی دلخواه و λ ریشه معادله دترمینان زیر می باشد:

$$\begin{vmatrix} \lambda^4 + p\lambda^2 + q & 0 & 0 & -(r\lambda^2 + s) \\ 0 & \lambda^4 + p\lambda^2 + q & r\lambda^2 + s & 0 \\ 0 & r\lambda^2 + s & \lambda^4 + p\lambda^2 + q & 0 \\ -(r\lambda^2 + s) & 0 & 0 & \lambda^4 + p\lambda^2 + q \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

بنابراین، به ازای مقادیر ثابت Ω ، ریشه های معادله (۲۴) چنین خواهد بود:

$$\lambda = \pm\lambda_1, \pm i\lambda_2, \pm\lambda_3, \pm i\lambda_4.$$

اگر مقادیر ویژه در معادلات مشخصه جایگزین شوند، روابط $B_r = -A_i$ و $B_i = -A_r$ به ازای λ_1 و λ_2 و همچنین $B_r = A_i$ و $B_i = A_r$ به ازای λ_3 و λ_4 به دست می آید. به این ترتیب توابع مودال به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} x_r(Z) &= A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 + A_4 q_4 + \\ &\quad A_5 q_5 + A_6 q_6 + A_7 q_7 + A_8 q_8, \\ x_i(Z) &= B_1 q_1 + B_2 q_2 + B_3 q_3 + B_4 q_4 + \\ &\quad B_5 q_5 + B_6 q_6 + B_7 q_7 + B_8 q_8, \\ y_r(Z) &= B_1 q_1 + B_2 q_2 + B_3 q_3 + B_4 q_4 - \\ &\quad B_5 q_5 - B_6 q_6 - B_7 q_7 - B_8 q_8, \\ y_i(Z) &= -A_1 q_1 - A_2 q_2 - A_3 q_3 - A_4 q_4 + \\ &\quad A_5 q_5 + A_6 q_6 + A_7 q_7 + A_8 q_8, \end{aligned} \quad (25)$$

که در این روابط:

$$q_1 = \cosh \lambda_1 z, \quad q_2 = \sinh \lambda_1 z, \quad q_3 = \cos \lambda_2 z, \quad q_4 = \sin \lambda_2 z,$$

$$q_5 = \cosh \lambda_3 z, \quad q_6 = \sinh \lambda_3 z, \quad q_7 = \cos \lambda_4 z, \quad q_8 = \sin \lambda_4 z.$$

به طور مشابه برای معادلات (۱۶) و (۱۷) و جایگزینی معادلات (۱۰) و (۱۱)، توابع مودال مربوط به زوایای دوران می تواند به صورت زیر به دست آید:

$$\begin{aligned} \phi_{y_r}(Z) &= A_2 p_1 q_1 + A_4 p_1 q_2 + A_4 p_2 q_3 - A_3 p_2 q_4 + \\ &\quad A_6 p_3 q_5 + A_5 p_3 q_6 + A_8 p_4 q_7 - A_7 p_4 q_8, \\ \phi_{y_i}(Z) &= B_2 p_1 q_1 + B_1 p_1 q_2 + B_4 p_2 q_3 - B_3 p_2 q_4 + \\ &\quad B_6 p_3 q_5 + B_5 p_3 q_6 + B_8 p_4 q_7 - B_7 p_4 q_8, \\ \phi_{x_r}(Z) &= B_2 p_1 q_1 + B_1 p_1 q_2 + B_4 p_2 q_3 - B_3 p_2 q_4 - \\ &\quad B_6 p_3 q_5 - B_5 p_3 q_6 - B_8 p_4 q_7 + B_7 p_4 q_8, \\ \phi_{x_i}(Z) &= -A_2 p_1 q_1 - A_4 p_1 q_2 - A_4 p_2 q_3 + A_3 p_2 q_4 + \\ &\quad A_6 p_3 q_5 + A_5 p_3 q_6 + A_8 p_4 q_7 - A_7 p_4 q_8 \end{aligned} \quad (26)$$

در این روابط داریم:

همچنین، به طور مشابه معادلات (۱۰) تا (۱۳) را می توان فقط بر حسب زوایای دوران نیز نوشت. یعنی:

$$\phi_Y^{iv} + a\phi_Y'' + b\ddot{\phi}_Y'' + c\phi_Y + d\ddot{\phi}_Y + e\ddot{\phi}_Y + f\dot{\phi}_X'' + g\dot{\phi}_X + h\ddot{\phi}_X = 0, \quad (16)$$

$$\phi_X^{iv} + a\phi_X'' + b\ddot{\phi}_X'' + c\phi_X + d\ddot{\phi}_X + e\ddot{\phi}_X - f\dot{\phi}_Y'' - g\dot{\phi}_Y - h\ddot{\phi}_Y = 0. \quad (17)$$

این نکته قابل توجه است که روابط به ازای دستگاه مختصاتی نوشته شده اند که متصل به محور است و با آن دوران می کند. بنابراین ممان های اینرسی مختلف محلی در دو جهت عمود بر هم، که از ترک همیشه باز بوجود می آیند، همواره مقدار ثابتی دارند.

۱-۴- روتور با مقطع یکنواخت

از آن جایی که مدار چرخشی حالت پایدار عموماً بیضوی شکل است، حل معادلات (۱۴) و (۱۵) ممکن است به صورت زیر بیان شود:

$$X(Z, t) = x(Z)e^{i\omega t}, \quad (18)$$

$$Y(Z, t) = Y(Z)e^{i\omega t}, \quad (19)$$

که در آن، $i = \sqrt{-1}$ و ω فرکانس زاویه ای چرخشی است. جایگذاری معادلات (۱۸-۱۹) در (۱۴-۱۵) نتیجه می دهد:

$$x^{iv} + p x'' + q x + i r y'' + i s y = 0, \quad (20)$$

$$y^{iv} + p y'' + q y - i r x'' - i s x = 0, \quad (21)$$

که در آن:

$$p = \frac{\rho\Omega^2}{E} + \frac{\rho\omega^2}{E} + \frac{\rho\Omega^2}{kG} + \frac{\rho\omega^2}{kG},$$

$$q = -\frac{\rho A \Omega^2}{EI} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} + \frac{\rho^2 \Omega^4}{kGE} + \frac{6\rho^2 \Omega^2 \omega^2}{kGE} + \frac{\rho^2 \omega^4}{kGE},$$

$$r = \frac{2\rho\Omega\omega}{E} + \frac{2\rho\Omega\omega}{kG},$$

$$s = -\frac{2\rho A \Omega \omega}{EI} + \frac{4\rho^2 \Omega^3 \omega}{kGE} + \frac{4\rho^2 \Omega \omega^3}{kGE}.$$

معادلات (۲۰-۲۱) پاسخ هایی به صورت زیر دارند:

$$x(Z) = (A_r + i A_i) e^{\lambda Z}, \quad (22)$$

$$y(Z) = (B_r + i B_i) e^{\lambda Z}. \quad (23)$$

در این روابط، بالانویس r و l به ترتیب به معنای راست و چپ می باشد. از سوی دیگر c_{22} و c_{33} بیانگر تغییر مکان های اضافی ناشی از نیروی برشی و c_{44} ، c_{45} و c_{55} نشان دهنده زوایای دوران اضافه شده ناشی از ممان خمشی اعمالی به فبر معادل ترک می باشد. رابطه متغیرهای حالت بین سمت راست و چپ اتصال ترک، مستقیماً از معادلات (۳۱) تا (۳۸) به دست می آید که شکل ماتریسی آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U^r = H U^l, \quad (39)$$

که در آن، H ماتریس انتقال اتصال مربوط به ترک بوده که اجزای آن در پیوست مقاله آورده شده است (پیوست C).

۴-۳- ترک در زاویه متفاوت

در شکل ۲ تعدادی از ترک های باز در جهات متفاوت و با زوایای انحراف مختلف θ_s ، نسبت به محور Y نشان داده شده است. باید توجه داشت که در هنگام استفاده از روش TMM، تبدیل دستگاه مختصات المان ها یا اتصالات، به یک دستگاه مختصات ثابت ضروری است. معادلات ذیل به کمک رابطه (۹) این تبدیلات را انجام می دهد:

$$U_j|_{\theta=s} = T U_j|_{\theta=0}, \quad (40a)$$

$$U_{j+1}|_{\theta=s} = T U_{j+1}|_{\theta=0}, \quad (40b)$$

$$U_{j+1}|_{\theta=s} = H_j U_j|_{\theta=s}, \quad (40c)$$

با استفاده از سه معادله ذکر شده در بالا، رابطه زیر برای ترک های دارای زوایای مختلف نسبت به یکدیگر، به دست می آید:

$$U_{j+1}|_{\theta=0} = T^{-1} H_j T U_j|_{\theta=0}. \quad (41)$$

در رابطه فوق، T ماتریس انتقال مربوط به دو دستگاه مختصات است که المان های این ماتریس 16×16 در پیوست مقاله داده شده است (پیوست D).

۴-۴- اتصال پله

اساساً متغیرهای حالت در دو طرف اتصال پله ای، باید پیوسته باشند. لذا شرایط زیر بایستی در محل پله محور ها ارضا شود:

$$p_1 = \lambda_1 + \frac{\rho(\omega + \Omega)^2}{\lambda_1 k G}, \quad p_2 = \lambda_2 - \frac{\rho(\omega + \Omega)^2}{\lambda_2 k G},$$

$$p_3 = \lambda_3 + \frac{\rho(\omega - \Omega)^2}{\lambda_3 k G}, \quad p_4 = \lambda_4 - \frac{\rho(\omega - \Omega)^2}{\lambda_4 k G}.$$

از ارتباط بین تنش و کرنش تعمیم یافته، ممان ها و نیروهای برشی می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$M_x = EI \phi'_x, \quad M_y = EI \phi'_y, \quad (27)$$

$$Q_x = k GA(x' - \phi_y), \quad Q_y = k GA(y' - \phi_x). \quad (28)$$

بردار حالت کلی محور به صورت زیر ایجاد می گردد:

$$U = \begin{bmatrix} x_r, \phi_{yr}, Q_{xr}, M_{yr}, x_l, \phi_{yl}, Q_{xl}, M_{yl}, \\ y_r, \phi_{xr}, Q_{yr}, M_{xr}, y_l, \phi_{xl}, Q_{yl}, M_{xl} \end{bmatrix}^T. \quad (29)$$

توسط رابطه ماتریسی زیر، بردار حالت یک طرف محور را می توان به طرف دیگر آن مرتبط نمود:

$$U_i = E U_{i-1}. \quad (30)$$

در این رابطه، ماتریس E ماتریس انتقال محور با مقطع یکنواخت بوده که ابعاد آن 16×16 می باشد.

۴-۲- اتصال ترک دار

در این مقاله، انعطاف پذیری اضافی ناشی از ترک به صورت یک فنر پیچشی مدل می شود. با توجه به پیوستگی در این نوع اتصال، شرایط ذکر شده در زیر باید ارضا شود: تغییر مکان ها

$$x^r = x^l + c_{22} Q_x^l, \quad (31)$$

$$y^r = y^l + c_{33} Q_y^l, \quad (32)$$

زوایای دوران ناشی از خمش

$$\phi_x^r = \phi_x^l + c_{55} M_x^l + c_{45} M_y^l, \quad (33)$$

$$\phi_y^r = \phi_y^l + c_{44} M_y^l + c_{45} M_x^l, \quad (34)$$

نیروهای برشی

$$Q_x^r = Q_x^l, \quad (35)$$

$$Q_y^r = Q_y^l, \quad (36)$$

ممان های خمشی

$$M_x^r = M_x^l, \quad (37)$$

$$M_y^r = M_y^l. \quad (38)$$

تغییر مکان ها

$$x^r = x^l, \quad (۴۲)$$

$$y^r = y^l, \quad (۴۳)$$

زوایای کلی دوران

$$x^{rr} = x^{ll}, \quad (۴۴)$$

$$y^{rr} = y^{ll}, \quad (۴۵)$$

نیروهای برشی

$$Q_x^r = Q_x^l, \text{ or } kGA^r(x^{rr} - \phi_y^r) = kGA^l(x^{ll} - \phi_y^l) \quad (۴۶)$$

$$Q_y^r = Q_y^l, \text{ or } kGA^r(y^{rr} - \phi_x^r) = kGA^l(y^{ll} - \phi_x^l) \quad (۴۷)$$

ممان های خمشی

$$M_x^r = M_x^l, \quad (۴۸)$$

$$M_y^r = M_y^l. \quad (۴۹)$$

با جایگزینی معادلات (۴۴) و (۴۵) در معادلات (۴۶) و (۴۷) داریم:

$$\phi_y^r = \phi_y^l + \frac{1}{kG} \left(\frac{1}{A^l} - \frac{1}{A^r} \right) Q_x^l, \quad (۵۰)$$

$$\phi_x^r = \phi_x^l + \frac{1}{kG} \left(\frac{1}{A^l} - \frac{1}{A^r} \right) Q_y^l.$$

بدین ترتیب شرایط پیوسته زاویه دوران ناشی از خمش، به جای زوایای دوران کلی به دست می آید. حال با استفاده از معادلات (۴۲-۵۰)، ارتباط متغیرهای حالت بین سمت راست و چپ اتصال پله ای را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U^r = S U^l, \quad (۵۱)$$

که در آن، S ماتریس انتقال اتصال پله ای می باشد که المان های آن در پیوست مقاله ذکر شده است (پیوست E).

۵- معادله فرکانسی روتور دارای چند ترک

با داشتن ماتریس های انتقال هر بخش از یک محور همانند ماتریس های المان محور، اتصالات، پله و ترک، می توان ماتریس انتقال کلی محور را به دست آورد و به کمک آن معادله فرکانسی روتور دارای چند ترک را محاسبه نمود. اگر یک محور پله دار که دارای چند ترک عرضی با زوایای مختلف می باشد را در نظر بگیریم، ماتریس انتقال این روتور را می توان به صورت معادله (۵۲) نوشت:

$$U_n = E_n S_{n-1} E_{n-1} \dots E_3 T_2^{-1} H_2 T_2 E_2 S_1 E_1 U_0, \quad (۵۲)$$

یا:

$$U_n = Q U_0. \quad (۵۳)$$

در این رابطه، ماتریس Q ، ماتریس انتقال کلی سیستم بوده که ۱۶×۱۶ می باشد. با اعمال شرایط مرزی مسئله، رابطه (۵۳) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \{U_n\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q_{11}] & [Q_{12}] \\ [Q_{21}] & [Q_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (۵۴)$$

در این رابطه، $\{0\}$ ، بردارهای حالت صفر ناشی از اعمال شرایط مرزی در دو انتهای روتور می باشند. برای مساله مقدار ویژه در ارتعاش آزاد، تنها معادله زیر باید در نظر گرفته شود:

$$\{0\} = [Q_{21}] \{U_0\}. \quad (۵۵)$$

به این ترتیب مقادیر ویژه با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس مربعی Q_{21} قابل حصول خواهند بود. لذا معادله فرکانسی روتور عبارتست از:

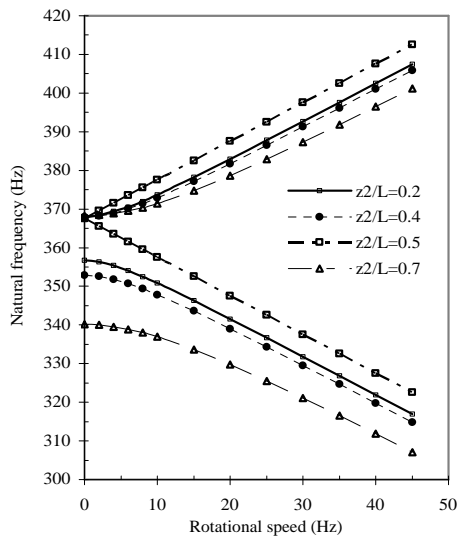
$$|Q_{21}| = 0. \quad (۵۶)$$

۶- شکل مدها

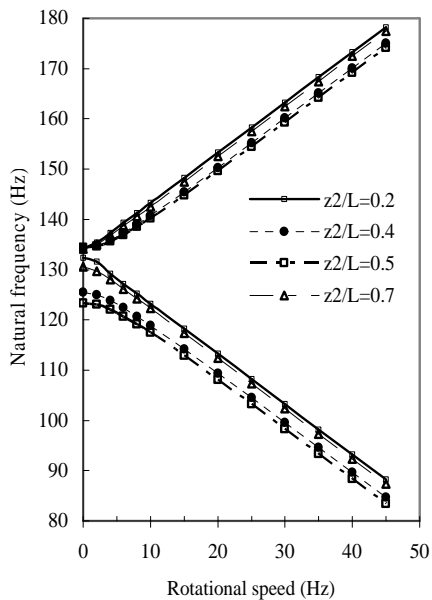
برای محاسبه شکل مدها می توان از کوفاکتورهای معادله مشخصه استفاده نمود. با توجه به این که ماتریس مشخصه محور اخیر، ماتریسی ۸×۸ است، لذا باید هشت بردار ویژه یافت شود. به منظور یافتن این هشت بردار ویژه کافی است هشت کوفاکتور متناظر با سطر اول ماتریس مشخصه محور دارای پله را به دست آورد و سپس نتایج حاصل را نرمالیزه کرد. پس از به دست آوردن بردارهای ویژه و جایگذاری در روابط موجود در پیوست مقاله (پیوست G)، معادلات (۲۴-۲۵) مورد استفاده قرار می گیرد و با داشتن مقادیر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, p_1, p_2, p_3, p_4$ از المان اول، شکل اولین المان به دست می آید. همچنین با استفاده از ماتریس های E, H, T^l, T و k ضرایب مربوط به معادلات (۲۵) و (۲۶) به ترتیب برای المان های دیگر نیز یافت می شود.

۷- محاسبه فرکانس طبیعی حاصل از مدل

در این بخش به بررسی تاثیر ترک در فرکانس طبیعی محور های دوار می پردازیم. بدین منظور، محوری با مقطع



شکل (۴): فرکانس طبیعی مد ۳ و ۴ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول $a/D=0.1$ ، در ترک دوم $a/D=0.5$).



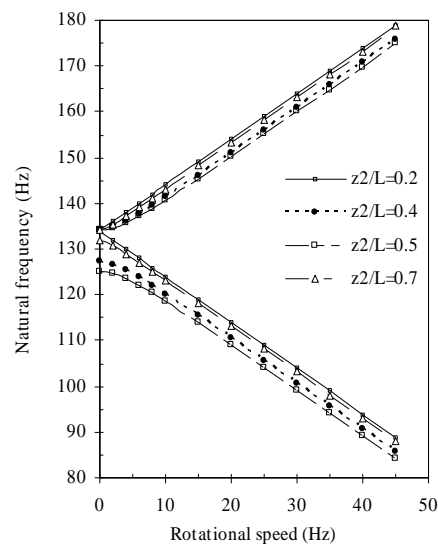
شکل (۵): فرکانس طبیعی مد ۱ و ۲ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول $a/D=0.3$ ، در ترک دوم $a/D=0.5$).

یکنواخت که دارای دو ترک می باشد را در نظر می گیریم. این محور فولادی دارای طول $L=1m$ ، قطر $D=0.03m$ ، مدول یانگ $E=200Gpa$ ، نسبت پواسون $\nu=0.3$ و دانسیته $\rho=7860 kg/m^3$ می باشد. همچنین، شرایط مرزی دو سر آن به صورت گیردار بوده و سایر خصوصیات مربوط به دو ترک را نیز می توان در جدول ۱ مشاهده نمود.

جدول (۱): خصوصیات ترک ها.

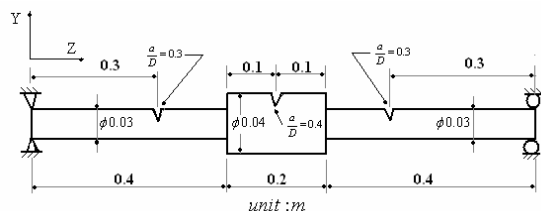
ترک اول	ترک دوم
عمق بی بعد ترک (a/D)	0.5
موقعیت بی بعد ترک (Z/l)	0.1 و 0.3
زاویه ترک نسبت به محور Y (θ)	0.1 تا 0.9
	0^0

شکل های ۳-۶ تاثیر سرعت دورانی محور را به ازای موقعیت های مختلف ترک دوم، به ترتیب در مدهای اول تا چهارم نشان می دهد.



شکل (۳): فرکانس طبیعی مد ۱ و ۲ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول $a/D=0.1$ ، در ترک دوم $a/D=0.5$).

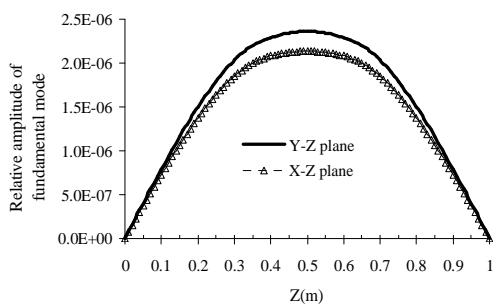
باشد که به صورت متقارن نسبت به محور عمودی وسط محور قرار گرفته است. عمق بی بعد ترک ها به ترتیب از چپ به راست $0.3/0.4$ ، $0.3/0.3$ می باشد. سرعت دورانی این محور نیز 30 هرتز در نظر گرفته شده که مقداری ثابت بوده و تمام خصوصیات دیگر این محور مانند محور مربوط به بخش ۷ است. سه ترک در دو حالت مورد بررسی قرار می گیرد. یکی حالتی که ترک ها تحت زاویه صفر نسبت به یکدیگر و نسبت به محور Y ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$) قرار دارند و دوم حالتی که این ترک ها نسبت به هم زاویه داشته باشند.



شکل (۷): روتور پله دار و ترک دار ($\Omega = 30$ Hz).

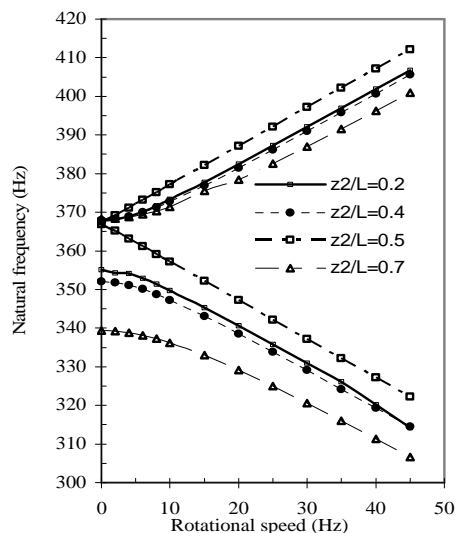
۸-۱- حالت اول: ترک های هم ردیف

در این حالت فرکانس اول محور در دو حالت ترک دار و بدون ترک به ترتیب $29/0.9$ و $31/1.8$ هرتز می باشد. مد شیپ های مربوط به این محور، در دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ ، مطابق شکل ۸ نشان داده شده و اختلاف این دو مد شیپ، یعنی تفاضل مد شیپ های مربوط به محور ترک دار نسبت به دو صفحه مختلف نیز در شکل ۹ به نمایش گذاشته شده است.



شکل (۸): مد شیپ محور ترک دار در دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$

به ازای حالتی که ترک ها نسبت به هم زاویه صفر دارند.



شکل (۶): فرکانس طبیعی مد ۳ و ۴ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول $a/D=0.3$ ، در ترک دوم $a/D=0.5$).

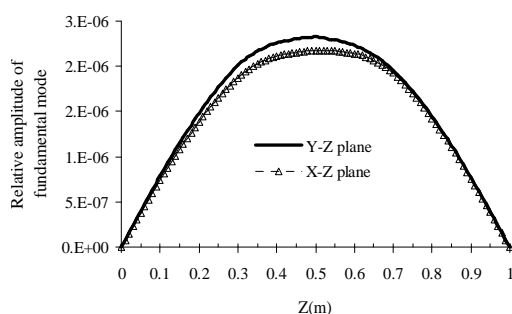
در این شکل ها، فرض بر این است که ترک اول موقعیتی ثابت در راستای محور دارد. همانطور که در این شکل ها ملاحظه می شود، بخش هایی از نمودار که دارای شیب منفی هستند، اشاره به فرکانس طبیعی پسرو^۱ یا مد فرکانسی فرد و قسمت های دارای شیب مثبت مربوط به فرکانس طبیعی پیشرو^۲ یا مد فرکانسی زوج می باشد. نتایج حاصل از شکل های ۳-۶ نشان می دهد که فرکانس در محدوده $\Omega \leq 10$ Hz به استثنای مدهای سوم و چهارم (در حالتی که ترک دوم در وسط محور واقع می شود) دارای تغییرات غیر خطی است. به عبارت دیگر فرکانس طبیعی و سرعت دورانی محور در سرعت های $\Omega > 10$ Hz، نسبت به یکدیگر رابطه ای خطی دارند.

۸. تشخیص موقعیت ترک ها در روتور ترک دار

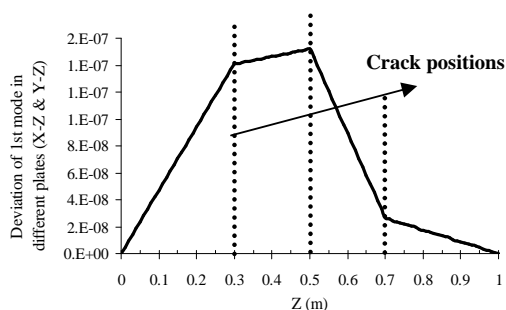
محوری مطابق شکل ۷ را در نظر بگیرید. همانطور که مشاهده می شود، این محور دارای سه ترک و دو پله می

1-Backward Whirling
2-Forward Whirling

مختلف محور، برخلاف آن چه در بخش قبل برای ترک های هم ردیف توضیح داده شد، تقارن خود را از دست می دهد.



شکل (۱۰): مد شیب محور ترک دار در دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ به ازای حالتی که زوایای ترکها نسبت به محور قائم 0° ، 30° و 60° درجه است.



شکل (۱۱): تفاضل مد شیب های مربوط به صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ به ازای حالتی که زوایای ترکها نسبت به محور قائم 0° ، 30° و 60° درجه است.

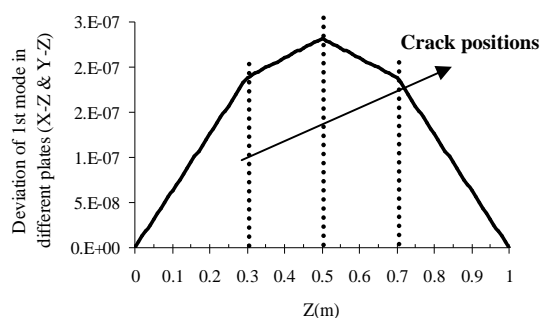
۹- مقایسه با نتایج تجربی

در این بخش، به منظور تایید نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی محور با استفاده از روش ماتریس انتقال، دو مثال تجربی ذکر شده است.

۹-۱- تحلیل فرکانسی لوله آلومینیمی ترک دار

مطابق شکل ۱۲، آزمایشی تجربی [۱۵] بر روی لوله ای از جنس آلومینیم صورت گرفته و فرکانس های دوم به بعد

با توجه به این شکل، دقیقا در نقاطی از امتداد محور که ترک در آن موقعیت ها قرار گرفته، تغییرات قابل ملاحظه ای مشاهده می شود. همچنین از آن جایی که ترک ها به طور متقارن و تحت زاویه صفر نسبت به یکدیگر قرار دارند، تفاضل مد شیب های متناظر با دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ نیز متقارن است.



شکل (۹): تفاضل مد شیب های مربوط به صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ به ازای حالتی که ترک ها نسبت به هم زاویه صفر دارند.

۲-۸- حالت دوم: ترک های تحت زاویه

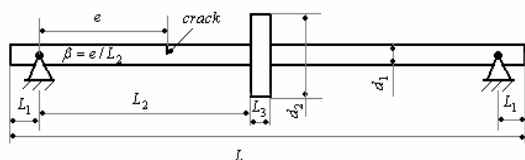
در این، حالت زوایای ترک های θ_1 ، θ_2 و θ_3 نسبت به محور قائم به ترتیب 0° ، 30° و 60° درجه است. مشابه با حالت اول، فرکانس های مربوطه برای دو حالت ترک دار و بدون ترک به ترتیب عبارت خواهد بود از $29/09$ و $31/18$ هرتز. این نتیجه حاصل شد که فرق چندانی در اولین فرکانس طبیعی محور در دو حالت وجود ندارد و فرکانس به دست آمده تقریبا برای دو حالت یکسان است. مد شیب های متناظر با محور مورد نظر در دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ ، مطابق شکل ۱۰، رسم شده است. از تفاضل این دو مد شیب، همانند حالت قبل، موقعیت ترک ها به صورت نشان داده شده در شکل ۱۱، به دست می آید. مشاهده می شود که در موقعیت هایی از امتداد محور که ترک وجود دارد، نمودار حاصل از تفاضل مدشیب ها دارای تغییرات شدید است. در شکل ۱۱، از آن جا که ترک ها نسبت به یکدیگر تحت زاویه قرار گرفته اند، نمودار تفاضلی حاصل از مدشیب های مربوط به دو نمای

جدول (۳): مقایسه فرکانس های طبیعی لوله ترک دار با استفاده از روش تجربی و روش ماتریس انتقال (Hz).

Case No.	TMM		Experimental [15]	
	ω_2	ω_3	ω_2	ω_3
No crack	378.92	842.86	382.50	835.00
1	378.81	842.23	382.16	834.81
2	378.64	840.85	381.48	834.48
3	378.61	842.16	382.01	834.50
4	377.89	840.61	381.10	833.50

۹-۲- تحلیل فرکانسی محور فولادی ترک دار

دومین آزمایش مطابق شکل ۱۳ بر روی محور فولادی دو سر مفصل و فاقد سرعت دورانی به منظور تعیین سه فرکانس طبیعی اول صورت گرفته است [16] که جنس آن از فولاد 40cr می باشد.



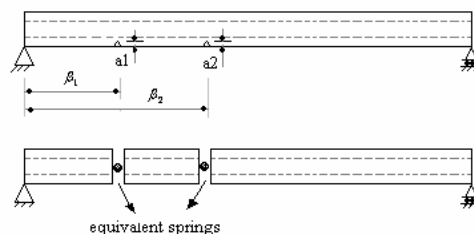
شکل (۱۳): محور اورهنگ ترک دار [16].

در این آزمایش از نوسان نگار لیزری سیگنال دوپلر^۱ برای تعیین فرکانس ها استفاده شده است. مشخصات این محور به صورت زیر می باشد:

$L=300\text{mm}$ ، $L_1=8\text{mm}$ ، $L_2=188\text{mm}$ ، $\nu=0.3$ ، $E=2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ، $L_3=$
 $e=148/3$ و $d_2=76\text{mm}$ ، $d_1=9/5\text{mm}$ ، $\rho=7860 \text{ kg/m}^3$

در این آزمایش، ترک به صورت ترک خستگی مدل شده و با عمقی معین در موقعیتی ثابت بر روی محور قرار گرفته است. با توجه به این که طول L_1 در مقایسه با طول کل محور نسبتاً کم است، لذا قسمت های اورهنگ (بعد از تکیه گاه ها) تاثیر زیادی بر روی فرکانس های طبیعی محور ندارد. بنابراین، به منظور مقایسه نتایج حاصل از این آزمایش و نیز نتایج به دست آمده از روش ماتریس انتقال برای محور نشان داده شده در شکل ۱۳ از قسمت های اورهنگ صرفه

برای این لوله ترک دار، به صورت تجربی به دست آورده شده است.



شکل (۱۲): لوله آلومینیومی دارای دو ترک عرضی باز [15].

خصوصیات این لوله آلومینیومی به شرح زیر است: طول $L=0.87$ متر، قطر داخلی 0.02 متر، قطر خارجی $Do=0.033$ متر و دانسیته آلومینیوم $2645/19$ کیلوگرم بر واحد حجم.

ویژگی های دو ترک موجود در این لوله آلومینیومی در جدول ۲ داده شده است.

جدول (۲): خصوصیات دو ترک مربوط به لوله آلومینیومی ترک دار [15].

Case No.	Crack data			
	β_1	a_1/t	β_2	a_2/t
1	0.207	0.19043	0.350	0.38077
2	0.207	0.25385	0.350	0.63460
3	0.207	0.38077	0.350	0.19043
4	0.207	0.63460	0.350	0.25385

حال به منظور مقایسه نتایج به دست آمده از روش ماتریس انتقال با نتایج تجربی، کافی است سرعت دورانی لوله توخالی را برابر صفر در نظر بگیریم و فرکانس ها را با این روش بیابیم. نتایج حاصل از این تحلیل و همچنین نتایج تجربی در جدول ۳ آورده شده است. مقایسه این نتایج و نزدیکی پاسخ های به دست آمده، نشان دهنده صحت مدل مورد استفاده می باشد.

۱۰- نتیجه‌گیری

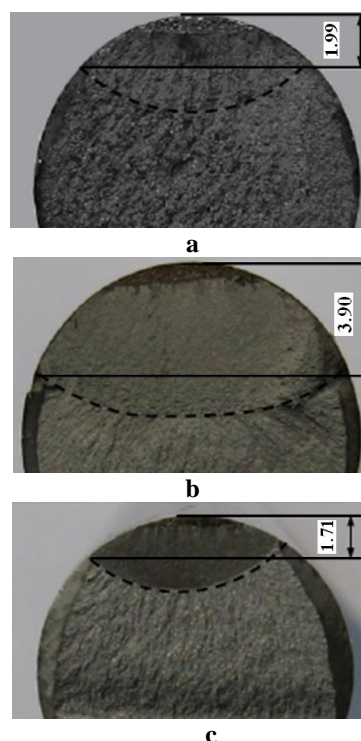
در این مقاله، آنالیز فرکانسی محور ترک دار با استفاده از روش ماتریس انتقال ارائه شده و از تئوری تیر تیموشنکو برای مدلسازی محور استفاده شد. مزیت اساسی روش ماتریس انتقال این است که تعداد المان‌های مربوط به محور مهم نیست، زیرا با این روش همواره ماتریس انتقال کلی روتور ماتریسی 16×16 خواهد بود و بنابراین نسبت به روش المان محدود به حافظه کمتری نیاز است.

برای ردیابی ترک در محور دوار، پس از به دست آوردن فرکانس‌های اولیه محور، شکل مدهای متناظر با صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ در حالتی که محور دارای ترک است، ترسیم گردید. به عبارت دیگر، به جای این که شکل مدهای متناظر با محور ترک دار و بدون ترک محاسبه شود، تصویر شکل مد اول محور ترک دار در دو صفحه مختلف محاسبه و ترسیم گردید. از تفاضل این دو شکل مد، موقعیت ترک‌های موجود در سیستم تشخیص داده شد. یکی از مزایایی که این نحوه تشخیص ترک نسبت به روش ذکر شده در مرجع [12] دارد، این است که دیگر نیازی به تعیین شکل مد محور در حالت سالم نمی‌باشد و مستقیماً بدون نیاز به اطلاعات مدی محور سالم، از روی محوری که در دسترس است و احتمالاً دارای ترک می‌باشد، می‌توان موقعیت ترک را تشخیص داد. اهمیت این مطلب زمانی آشکار می‌شود که اطلاعاتی از پیشینه سیستم (در این جا محور) نداشته باشیم و یا داده‌های آزمایشگاهی مربوط به سیستم سالم به دلیلی از بین رفته باشد. مشخص است که در این موارد نمی‌توان از روش ارائه شده در مرجع [۱۲] برای تعیین و شناسایی موقعیت ترک استفاده نمود.

مراجع

1. Dimarogonas, A.D. and Paipetis, S.A., "Analytical Methods in Rotor Dynamics", Applied Science Pub., London, 1983.
2. Dimarogonas, A.D., "Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review", Eng. Fracture Mech., Vol. 55, No. 5, pp. 831- 857, 1996.
3. Papadopoulos, C.A. and Dimarogonas, A.D., "Coupled Longitudinal and Bending Vibrations

نظر شده است. نتایج حاصل از این مقایسه‌ها در جدول ۴ آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین فرکانس‌های تجربی و نتایج به دست آمده از TMM برقرار است. لازم به ذکر است که این آزمایش به ازای سه عمق متفاوت ترک صورت گرفته است. مقادیر مربوط به این سه عمق در شکل ۱۴ نشان داده شده است.



شکل (۱۴): عمق‌های متفاوت ترک خستگی [۱۶].

جدول (۴): فرکانس‌های طبیعی محور فولادی به روش تجربی و روش ماتریس انتقال (Hz).

$\beta = e/L_2$	$\alpha = a/h$	TMM		
		ω_1	ω_2	ω_3
0.789	0.21 (a)	98.37	584.21	1054.02
0.789	0.41 (b)	97.3	583.41	1049.71
0.789	0.18 (c)	98.40	584.24	1054.16
$\beta = e/L_2$	$\alpha = a/h$	Experimental [16]		
		ω_1	ω_2	ω_3
0.789	0.21 (a)	97.34	583.84	1051.64
0.789	0.41 (b)	93.04	580.87	1032.64
0.789	0.18 (c)	97.99	584.71	1053.58

پیوست ها

پیوست A: توابع $F_N(\alpha/h)$

توابع $F_N(\alpha/h)$ مربوط به معادله (۳) با روابط زیر داده می شود [1]:

$$F_{IX}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}} \frac{[0.923 + 0.199(1 - \sin \beta)^4]}{\cos \beta},$$

$$F_{IY}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}} \frac{[0.752 + 2.02\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 0.37(1 - \sin \beta)^3]}{\cos \beta},$$

$$F_{II}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \frac{[1.122 - 0.561\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 0.85\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 + 0.18\left(\frac{\alpha}{h}\right)^3]}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{h}}},$$

$$F_{III}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}}, \quad \beta = \frac{\pi \alpha}{2h}.$$

پیوست B: انعطاف پذیری های c_{ij}

روابط انعطاف پذیری مربوط به ترک که در این مقاله استفاده شده است، به صورت زیر می باشد [1]:

$$c_{22} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi ER} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{b}} \bar{Y} F_{III}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{33} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi ER} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{b}} \bar{Y} F_{II}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{44} = \frac{32(1-\nu^2)}{\pi ER^3} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{b}} \bar{X}^2 \bar{Y} F_{IY}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{45} = \frac{64(1-\nu^2)}{\pi ER^3} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{b}} \bar{X} \bar{Y} \sqrt{1 - \bar{X}^2} F_{IX}(\bar{Y}/\bar{h}) F_{IY}(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{55} = \frac{64(1-\nu^2)}{\pi ER^3} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{b}} (1 - \bar{X}^2) \bar{Y} F_{IX}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X}.$$

پیوست C: ماتریس انتقال مربوط به ترک

ماتریس انتقال H برای اتصال ترک دار مطابق زیر می باشد:

$$H_{i,i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 16, \quad H_{1,3} = H_{5,7} = c_{22},$$

$$H_{9,11} = H_{13,15} = c_{33}, \quad H_{2,4} = H_{6,8} = c_{44},$$

of a Rotating Shaft with an Open Crack", J. Sound and Vibration, Vol. 117, No. 1, pp. 81- 93, 1987.

4. Papadopoulos, L.A. and Dimarogonas, A.D., "Coupling of Bending and Torsional Vibration of a Cracked Timoshenko Shaft", Ingenieur-Archiv, Vol. 57, No. 4, pp. 257- 266, 1987.
5. Papadopoulos, C.A. and Dimarogonas, A.D., "Coupled Vibration of Cracked Shafts, J. Vibration and Acoustics", Vol. 114, No. 1, pp. 461- 467, 1992.
6. Sekhar, A.S., "Vibration Characteristics of a Cracked Rotor with Two Open Cracks", J. Sound and Vibration, Vol. 223, No. 4, pp. 497- 512, 1999.
7. Gasch, R., "Dynamic Behaviour of the Laval Rotor with a Transverse Crack", Mech. Systems and Signal Processing, Vol. 22, No. 1, pp. 790- 804, 2008.
8. Chondros, T.G. and Labeas, G.N. "Torsional Vibration of a Cracked rod by Variational Formulation and Numerical Analysis", J. Sound and Vibration, Vol. 301, No. 2, pp. 994- 1006, 2007.
9. Sekhar, A.S., "Multiple Cracks Effects and Identification", Mech. Systems and Signal Processing, Vol. 22, No. 1, pp. 845- 878, 2008.
10. Bachschmid, N., Pennacchi, P., Tanzi, E., and Vania, A., "Identification of Transverse Crack Position and Depth in Rotor Systems", Meccanica, Vol. 35, No. 1, pp. 563- 582, 2000.
11. Tsai, T.C. and Wang, Y.Z., "Vibration Analysis and Diagnosis of a Cracked Shaft", J. Sound and Vibration, Vol. 192, No. 3, pp. 607- 620, 1996.
12. Tsai T.C. and Wang Y.Z., "The Vibration of a Multi-crack Rotor", Int. J. Mech. Sciences, Vol. 39, No. 9, pp. 1037-1053, 1997.
13. Haris, C.M. and Crede, C.E., "Shock and Vibration Handbook", 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
14. Shames, H.I. and Dym, C.L., "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics", McGraw-Hill, New York, pp. 200, 1985.
15. Murigendrappa, S.M., Maiti, S.K., and Srirangarajan, H.R., "Frequency-based Experimental and Theoretical Identification of Multiple Cracks in Straight Pipes Filled with Fluid", NDT&E Int., Vol. 37, No. 1, pp. 431- 438, 2004.
16. Xiang, J., zhong, Y., Chen, X., and He, Z., "Crack Detection in a Shaft by Combination of Wavelet-based Elements and Genetic Algorithm", Int. J. Solids and Structures, Vol. 45, No. 17, pp. 4782- 4795, 2008.

$$A_8 = -\frac{K(\phi_{y_r}(0) + \phi_{x_i}(0))(\lambda_3 - p_3) - p_3(Q_{y_i}(0) + Q_{x_r}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)},$$

$$B_1 = -\frac{-M_{x_r}(0) - M_{y_i}(0) - EI \lambda_2 p_2 (x_i(0) + y_r(0))}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$B_2 = -\frac{K(\phi_{y_i}(0) + \phi_{x_r}(0))(p_2 - \lambda_2) + p_2(Q_{y_r}(0) + Q_{x_i}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$B_3 = -\frac{M_{x_r}(0) + M_{y_i}(0) - EI \lambda_1 p_1 (x_i(0) + y_r(0))}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$B_4 = -\frac{K(\phi_{y_i}(0) + \phi_{x_r}(0))(\lambda_1 - p_1) - p_1(Q_{y_r}(0) + Q_{x_i}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$B_5 = -\frac{M_{x_r}(0) - M_{y_i}(0) + EI \lambda_4 p_4 (y_r(0) - x_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

$$B_6 = -\frac{K(\phi_{x_r}(0) - \phi_{y_i}(0))(\lambda_4 - p_4) + p_4(Q_{x_i}(0) - Q_{y_r}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)},$$

$$B_7 = -\frac{M_{y_i}(0) - M_{x_r}(0) + EI \lambda_3 p_3 (y_r(0) - x_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

$$B_8 = -\frac{K(\phi_{y_i}(0) - \phi_{x_r}(0))(\lambda_3 - p_3) + p_3(Q_{y_r}(0) - Q_{x_i}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)}.$$

$$H_{10,12} = H_{14,16} = c_{55},$$

$$H_{2,12} = H_{6,16} = H_{10,4} = H_{14,8} = c_{45},$$

و مابقی المان های این ماتریس برابر صفر می باشد.

پیوست D: ماتریس انتقال دوران (T)

ماتریس انتقال مربوط به دوران دستگاه مختصات دوران یافته تحت زاویه θ نسبت به دستگاه مختصات XYZ به صورت زیر بیان می شود:

$$T_{i,i} = \cos \theta, \quad i = 1, 2, \dots, 16, \quad T_{i,i+8} = \sin \theta, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

$$T_{i+8,i} = -\sin \theta, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

و بقیه درایه های این ماتریس برابر صفر است.

پیوست E: ماتریس انتقال مفصل پله (S)

ماتریس انتقال S که مربوط به اتصال ترک است، چنین می باشد:

$$S_{i,i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 16,$$

$$S_{i,i+1} = \frac{1}{kG} \left(\frac{1}{A^l} - \frac{1}{A^r} \right), \quad i = 2, 6, 10, 14,$$

و بقیه المان های این ماتریس برابر صفر می باشد.

پیوست F: ضرایب معادلات مد شیپ

ضرایب A_1, A_2, \dots, A_8 و B_1, B_2, \dots, B_8 به ازای انتهای المان اول سمت چپ محور، بر حسب شرایط مرزی انتهای چپ محور به صورت زیر حاصل می شود:

$$A_1 = -\frac{M_{x_i}(0) - M_{y_r}(0) - EI \lambda_2 p_2 x_r(0) + EI \lambda_2 p_2 y_i(0)}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$A_2 = -\frac{K(\phi_{x_i}(0) - \phi_{y_r}(0))(\lambda_2 - p_2) + p_2(Q_{x_r}(0) - Q_{y_i}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$A_3 = -\frac{-M_{x_i}(0) + M_{y_r}(0) + EI \lambda_1 p_1 (y_i(0) - x_r(0))}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$A_4 = -\frac{K(\phi_{y_r}(0) - \phi_{x_i}(0))(\lambda_1 - p_1) + p_1(Q_{y_i}(0) - Q_{x_r}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$A_5 = -\frac{-M_{x_i}(0) - M_{y_r}(0) - EI \lambda_4 p_4 (x_r(0) + y_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

$$A_6 = -\frac{-K(\phi_{y_r}(0) + \phi_{x_i}(0))(p_4 - \lambda_4) + p_4(Q_{y_i}(0) + Q_{x_r}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)},$$

$$A_7 = -\frac{M_{x_i}(0) + M_{y_r}(0) - EI \lambda_3 p_3 (x_r(0) + y_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.