

## معیار کیفی سنجش اعتبار مدل‌های انتقال حرارت زیستی تعادلی در برابر مدل‌های غیر تعادلی برای منبع حرارتی

سینوسی یکسو شده

جواد ابوالفضلی اصفهانی<sup>۱</sup>، مهدی بلالی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک؛ abolfazl@um.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد؛ دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک؛ msbalali@gmail.com

### چکیده

امروزه از لیزرهای با پالس کوتاه به طور گسترده در کاربردهای درمانی، مثل هایپرترمیای<sup>۱</sup>، استفاده می‌شود. انتقال انرژی توسط لیزرهای پالس کوتاه در زمان بسیار کوتاهی انجام می‌شود، که این زمان ممکن است از زمان لازم برای برقراری شرایط تعادل حرارتی بین بافت و خون کمتر باشد. در این صورت نمی‌توان از تئوری‌های متداول انتقال حرارت زیستی تعادلی برای شبیه‌سازی رفتار حرارتی بافت استفاده کرد. در این تحقیق یک مدل سه معادله‌ای غیر فوری‌ای و غیرتعادلی و یک مدل دو معادله‌ای غیرفوری‌ای تعادلی ارائه شده و برای یک مدل یک بعدی از بافت دارای سیستم خون رسانی مویرگی<sup>۲</sup>، با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس حل شده‌اند. با مقایسه نتایج حاصل از حل این دو مدل به کمک یک پارامتر به نام معیار تعادل، وجود یا نزدیکی به شرایط تعادل حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. و معیارهای مجاز بودن استفاده از مدل‌های انتقال حرارت زیستی تعادلی ارائه شده‌اند. در پایان مقادیر معیار تعادل برای یک نمونه استفاده از لیزرهای با پالس کوتاه در کاربردهای درمانی محاسبه شده است.

**کلمات کلیدی:** انتقال حرارت زیستی، انتقال حرارت تعادلی، انتقال حرارت غیر تعادلی، تبدیل لاپلاس، لیزر پالس کوتاه، معیار تعادل

### مقدمه

لیزرهای با پالس کوتاه<sup>۳</sup> در بسیاری از کاربردهای درمانی از جمله: هایپرترمیای، حرارت درمانی داخلی<sup>۴</sup>، درمان با فوتو کوگولوشن داخلی<sup>۵</sup> و ... برای انتقال انرژی زیاد به بافت در طول زمان بسیار کوتاه، به کار می‌روند، که هر سه، روش‌هایی برای از بین بردن بافت‌های سرطانی به کمک حرارت می‌باشند [۱]. از سال ۱۹۶۰ که برای اولین بار لیزرها شناخته شدند، به عنوان منابع بالقوه مفیدی برای کاربردهای درمانی مورد توجه بوده‌اند. لیزرها می‌توانند در یک پالس با طول بسیار کوتاه از میلی ثانیه تا فمتو ثانیه ( $10^{-15}$  تا  $10^{-3}$ ) توان لحظه‌ای بسیار بالایی، به بزرگی  $10^9$  وات، را منتقل کنند [۲].

وقتی بافت و شبکه خون رسانی مربوط به آن دارای دمای یکسان باشند، در حالت تعادل حرارتی می‌باشند. این حالت هنگامی رخ می‌دهد که تبادل حرارت بین بافت و خون به میزان کافی صورت گرفته باشد [۳]. پارامترهای موثر در افزایش میزان تبادل حرارت بین بافت و رگ‌های خونی عبارتند از سطح انتقال حرارت، خواص ترموفیزیکی بافت و خون و دیواره رگ‌ها و زمان. بررسی کیفی رابطه خواص ترموفیزیکی و میزان انتقال حرارت از حیطة مطالب مورد بحث در این تحقیق خارج است، بنابراین شرایط مورد بررسی برای رسیدن به حالت تعادل حرارتی بین بافت و خون، وجود سطح حرارت کافی و زمان کافی برای تبادل حرارت می‌باشد. اگر فرض کنیم زمان کافی برای تبادل حرارت وجود دارد تنها شرط لازم برای رسیدن به تعادل حرارتی وجود سطح انتقال حرارت کافی بین خون و بافت است. به خاطر تراکم زیاد مویرگ‌ها نسبت به سایر انواع رگ‌ها در بافت‌های زنده بدن انسان (نسبت مجموع مساحت مقطع همه مویرگ‌ها به مجموع مساحت مقطع همه انواع رگ‌ها ۶،۲۴ می‌باشد [۴])، بیشترین سطح انتقال حرارت بین بافت و خون در حالتی وجود دارد که سیستم خون رسانی بافت مورد بررسی یک شبکه مویرگی باشد. یا به عبارت دیگر شبکه خون رسانی بافت مورد نظر فاقد رگ شاخص حرارتی باشد [۳].

پارامتر بعدی زمان لازم برای برقراری تعادل حرارتی بین بافت و خون می‌باشد. در برخی از کاربردهای درمانی حرارت با سرعت بسیار زیادی به بافت مورد نظر اعمال می‌شود. مثلاً هنگامی که از لیزرهای با پالس کوتاه برای مقاصد درمانی، مثلاً برای درمان عنبیه چشم [۵]، استفاده می‌شود. در این صورت اگر زمان اعمال حرارت کوتاه‌تر از زمان مشخصه تعادل حرارتی بین بافت و خون باشد، بافت و خون به تعادل حرارتی نخواهند رسید، در نتیجه نمی‌توان از مدل‌های تعادلی برای به دست آوردن توزیع دما در بافت استفاده کرد. منظور از مدل‌های تعادلی، مدل‌هایی هستند که فرض وجود تعادل حرارتی بین بافت و خون را در خود دارند.

مطالعات زیادی در رابطه با اندرکنش‌های حرارتی بین لیزر و بافت در کاربردهای درمانی انجام شده است [۶، ۷، ۸، ۹]. جونیچ و همکاران<sup>۶</sup> [۱] در تحقیق خود توزیع دما را در مدلی استوانه‌ای شکل از یک بافت زنده که در معرض تابش پرتوهای لیزر با پالس کوتاه قرار گرفته بود را به طور عددی و آزمایشگاهی به دست آوردند. در این تحقیق

<sup>1</sup> Hyperthermia

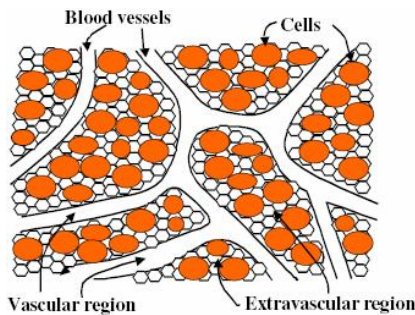
<sup>2</sup> Perfused tissue

<sup>3</sup> Short pulse laser

<sup>4</sup> Interstitial thermotherapy

<sup>5</sup> Interstitial photocoagulation

<sup>6</sup> M. Jaunich et. al.

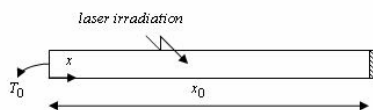


شکل ۱: شماتیک بافت زنده دارای سیستم شریانی [۹].

حرارت همرفت فقط در رگ‌های با قطر بزرگ که خون در آنها با سرعت بالا در جریان است، قابل توجه می‌باشد. در این تحقیق فرض شده است که سیستم شریانی بافت مورد بررسی فقط از شبکه مویرگی تشکیل شده است. بنابراین انتقال حرارت به صورت همرفتی بین خون و بافت قابل نظر خواهد بود (سرعت جریان خون در مویرگ‌ها حدود  $0.2 \text{ cm/s}$  و در آئورت حدود  $20 \text{ cm/s}$  گزارش شده است [۱۲]). از انتقال حرارت هدایتی در خون صرف نظر شده است. همچنین تغییر فاز در بافت در اثر اعمال حرارت، در مدل سازی در نظر گرفته نشده است. بنابراین تنها مکانیزم تبادل حرارت بین بافت و خون ناشی از پرفیوژن خون به بافت می‌باشد.

#### مدل سازی ریاضی:

از آنجا که در این تحقیق فقط انجام تحلیل کیفی مورد نظر است (به دست آوردن معیار وجود تعادل یا عدم وجود تعادل حرارتی در فرآیند درمانی توسط لیزر)، استفاده از مدل یک بعدی بافت، به خاطر سادگی، مناسب است (شکل ۲).



شکل ۲: مدل یک بعدی بافت به همراه شرایط مرزی

با اعمال انرژی با فرکانس بالا ممکن است فاصله زمانی بین تناوب‌های متوالی اعمال انرژی، کمتر از زمان لازم برای همدما شدن (به تعادل رسیدن بافت و خون) باشد. بنابراین در این شرایط استفاده از مدل‌های متداول انتقال حرارت منجر به بروز خطا می‌شود. با استفاده از مدل هایپربولیک غیرفوریه‌ای غیرتعادلی این نقیصه می‌تواند برطرف شود.

برای شبیه سازی منبع انرژی با فرکانس بالا، مشابه لیزر با پالس کوتاه، از یک منبع سینوسی یکسو شده با دوره زمانی  $a$  و قدرت  $S_0$  استفاده می‌شود. دلیل استفاده از منبع سینوسی یکسو شده به جای معادلات توصیفی منبع لیزر با پالس کوتاه، سادگی معادلات و امکان انجام حل تحلیلی می‌باشد معادلات حاکم بر این پدیده عبارتند از:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T_t}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - \rho_b c_b \omega_b (T_t - T_b) + S_0 f(t) \quad (1)$$

$$\rho_b c_b \frac{\partial T_b}{\partial t} = \rho_b c_b \omega_b (T_t - T_b) \quad (2)$$

تبادل حرارت در بافت توسط مدل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای شبیه سازی شده است. آر. دوو<sup>۷</sup> [۲] اندرکنش بین پرتوهای لیزر و بافت زنده را با در نظر گرفتن تغییر فاز در بافت شبیه سازی کرده است. ک. کیم و ز. گوو<sup>۸</sup> [۶] در تحقیق خود پدیده‌های انتقال حرارت شامل چند ثابت زمانی، را در بافت‌های کدر که در معرض تابش لیزر پالس کوتاه قرار گرفته‌اند، بررسی کردند. ج. ژو و ج. لیو<sup>۹</sup> [۷] رفتار حرارتی یک مدل سه بعدی از بافت دارای سیستم خون رسانی، که در معرض تابش لیزر قرار گرفته را تحلیل کردند.

در مسائلی که اعمال حرارت با سرعتی هم مرتبه یا بیشتر از سرعت انتقال حرارت در محیط انجام می‌شود، رفتار موجی انتقال حرارت غالب می‌شود [۸]. در این صورت استفاده از مدل‌های فوریه‌ای احتمالاً منجر به بروز خطای زیادی خواهد شد. از آنجا که در کاربردهایی که از لیزر برای اعمال حرارت استفاده می‌شود سرعت اعمال انرژی بسیار بالاست، در اغلب تحقیقاتی که رفتار حرارتی بافت در معرض تابش لیزر، بررسی می‌شود از مدل‌های غیرفوریه‌ای انتقال حرارت استفاده می‌کنند، از جمله [۶ و ۱]. در همه تحقیقات بالا برای توصیف پدیده انتقال حرارت در بافت زنده از معادله کلاسیک پهنس، که یک معادله انتقال حرارت تعادلی می‌باشد [۳]، استفاده شده است. در صورتی که در کاربرد لیزرهای پالس کوتاه زمان اعمال انرژی بسیار کوتاه است و می‌تواند از زمان مشخصه تعادل حرارتی بافت و خون کوتاه‌تر باشد و در نتیجه پدیده انتقال حرارت غیرتعادلی خواهد بود.

در این تحقیق پدیده انتقال حرارت در بافت زنده، توسط یک مدل غیرفوریه‌ای شبیه سازی شده است. چرا که منبع حرارتی مورد استفاده لیزر با پالس کوتاه بوده و در نتیجه سرعت اعمال انرژی با سرعت انتقال آن در بافت قابل مقایسه خواهد بود. مدل مذکور با فرض وجود تعادل حرارتی و همچنین با فرض عدم وجود تعادل حرارتی بین بافت و شبکه خون رسانی آن تحلیل شده است. با مقایسه نتایج، معیارهای کیفی برای شرایط مجاز بودن استفاده از مدل تعادلی (که استفاده از آن از نظر محاسباتی ساده‌تر است) به دست می‌آید. همچنین برخلاف تحقیقات گذشته [۲ و ۱] که دمایی شریانی ثابت فرض می‌شود، در این تحقیق تغییرات این دما در طول زمان و موقعیت محاسبه شده است.

#### مدل فیزیکی:

بافت زنده شامل سیستم شریانی را می‌توان متشکل از سه جزء اصلی ساختاری دانست (شکل ۱): رگ‌های خونی، سلول‌ها و فضای میان بافتی [۹]. مکانیزم‌های حاکم بر پدیده انتقال حرارت در بافت زنده که در معرض منبع حرارت خارجی قرار گرفته است، عبارتند از: هدایت در بافت، هدایت در خون، همرفت بین خون و بافت، تبادل حرارت ناشی از پرفیوژن خون در بافت و تغییر فاز در بافت [۱۱ و ۱۰]. انتقال

<sup>7</sup> R. Dua

<sup>8</sup> K. Kim & Z. Guo

<sup>9</sup> J. Zhou & J. Liu

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{\partial Q}{\partial \xi} + S_0 F(\eta) \quad (15)$$

$$\tau \frac{\partial Q}{\partial \eta} + Q + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad (16)$$

روش حل:

برای حل از روش تبدیلات لاپلاس استفاده می‌کنیم. با اعمال تبدیل لاپلاس به معادلات ۹ تا ۱۱ و استفاده از شرط اولیه (معادله ۱۲) خواهیم داشت [۱۳]:

$$s \bar{\theta}_t = -\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} - (\bar{\theta}_t - \bar{\theta}_b) + \frac{S_0 \pi a}{a^2 s^2 + \pi^2} \coth\left(\frac{a.s}{2}\right) \quad (17)$$

$$s \bar{\theta}_b = C_R (\bar{\theta}_t - \bar{\theta}_b) \quad (18)$$

$$s \tau \bar{Q} + \bar{Q} + \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \xi} = 0 \quad (19)$$

علامت "-" نشان دهنده متغیر تبدیل شده در فضای لاپلاس می‌باشد. شرایط مرزی هم در فضای لاپلاس عبارتند از:

$$\xi = 0: \bar{Q} = 0, \bar{\theta}_t = \bar{\theta}_b = 0 \quad (20)$$

$$\xi = \xi_0: \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{\theta}_b}{\partial \xi} = 0 \quad (21)$$

با ترکیب معادلات ۱۷ تا ۱۹ یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) بر حسب  $\xi$  به دست می‌آید (معادله ۲۲).

$$A \frac{\partial^2 \bar{\theta}_t}{\partial \xi^2} + B \bar{\theta}_t = C \quad (22)$$

$$\bar{\theta}_b = \frac{C_R}{s + C_R} \bar{\theta}_t \quad (23)$$

$$Q = \frac{-1}{1 + \tau.s} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \xi} \quad (24)$$

$$A = 1/(1 + \tau.s) \quad (25)$$

$$B = C_R/(s + C_R) - s - 1 \quad (26)$$

$$C = [S_0 \pi \coth(s/2f)] / [f \cdot ((s/f)^2 + \pi^2)] \quad (27)$$

$$\beta = \sqrt{-B/A} \quad (28)$$

با حل معادلات ۲۲ تا ۲۴ پاسخهای مدل غیر تعادلی به دست می‌آید:

$$\bar{\theta}_t(\xi, s) = \frac{C}{B} [\cosh(\beta \xi) - \tanh(\beta \xi_0) \cdot \sinh(\beta \xi) - 1] \quad (29)$$

$$\bar{\theta}_b = \frac{C_R}{s + C_R} \left\{ \frac{C}{B} [\cosh(\beta \xi) - \tanh(\beta \xi_0) \cdot \sinh(\beta \xi) - 1] \right\} \quad (30)$$

$$\bar{Q} = \frac{-1}{1 + \tau.s} \left\{ \frac{C \beta}{B} [\sinh(\beta \xi) - \tanh(\beta \xi_0) \cdot \cosh(\beta \xi)] \right\} \quad (31)$$

$$\bar{Q} = \frac{-1}{1 + \tau.s} \left\{ \frac{C \beta}{B} [\sinh(\beta \xi) - \tanh(\beta \xi_0) \cdot \cosh(\beta \xi)] \right\} \quad (31)$$

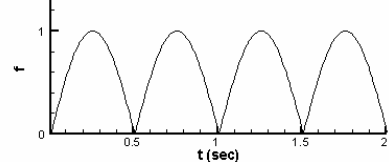
$$\bar{Q} = \frac{-1}{1 + \tau.s} \left\{ \frac{C \beta}{B} [\sinh(\beta \xi) - \tanh(\beta \xi_0) \cdot \cosh(\beta \xi)] \right\} \quad (31)$$

معادلات مربوط به مدل تعادلی (معادله ۱۵ و ۱۶) هم به همین ترتیب با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس حل می‌شوند (معادلات ۳۲ تا ۳۴).

$$\bar{\theta}_t(\xi, s) = \frac{C}{B} [\cosh(\beta \xi) - \tanh(\beta \xi_0) \cdot \sinh(\beta \xi) - 1] \quad (32)$$

$$\bar{\tau} \frac{\partial q}{\partial x} + q + k_t \frac{\partial T_t}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

معادله ۳ توزیع شار حرارتی با یک سرعت محدود در بافت می‌باشد. در واقع به زمانی معادل  $\bar{\tau}$  نیاز است تا شار اعمالی  $q$  در بافت نفوذ کند. دلیل اینکه ثابت زمانی در بافت‌های زنده قابل توجه می‌باشد این است که بافت‌های زنده به شدت ناهمگن می‌باشند [۸]. روشن است که با صفر شدن مقدار  $\bar{\tau}$  معادله ۳ به قانون فوریه تبدیل می‌شود. قانون فوریه فرض می‌کند که موج حرارتی با سرعت بی‌نهایت در دامنه منتشر می‌شود. تابع  $f(t)$  منبع حرارتی سینوسی یکسو شده است، که در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: تابع سینوسی یکسو شده با دوره نوسان  $a = 0.5 \text{ sec}$

شرایط مرزی و اولیه حاکم عبارتند از:

$$t = 0: q = 0, T_t = T_b = T_0 \quad (4)$$

$$x = 0: q = 0, T_t = T_b = T_0 \quad (5)$$

$$x = x_0: \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \frac{\partial T_t}{\partial x} = \frac{\partial T_b}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

چنانچه در معادله ۶ دیده می‌شود، فرض می‌شود طول مشخصه بافت به اندازه کافی بزرگ است که بتوان از تغییرات در انتهای دامنه صرف نظر کرد.

اگر فرض شود بافت و خون در تعادل حرارتی قرار دارند، دمای آنها برابر خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:  $T_b = T_t$ . با در نظر گرفتن این فرض معادلات ۱ تا ۳ به این صورت بازنویسی خواهند شد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + s_0 \cdot f(t) \quad (7)$$

$$\bar{\tau} \frac{\partial q}{\partial t} + q + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

قبل از انجام حل، معادلات حاکم را نرمال سازی می‌کنیم. پارامترهای نرمال سازی در فهرست علائم ارائه شده‌اند. معادلات ۱ تا ۸ به معادلات ۹ تا ۱۶ تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \eta} = -\frac{\partial Q}{\partial \xi} - (\theta_t - \theta_b) + S_0 F(\eta) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial \eta} = C_R (\theta_t - \theta_b) \quad (10)$$

$$\tau \frac{\partial Q}{\partial \eta} + Q + \frac{\partial \theta_t}{\partial \xi} = 0 \quad (11)$$

شرایط مرزی تبدیل شده عبارتند از:

$$\eta = 0: Q = 0, \theta_t = \theta_b = 0 \quad (12)$$

$$\xi = 0: Q = 0, \theta_t = \theta_b = 0 \quad (13)$$

$$\xi = \xi_0: \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial \theta_t}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta_b}{\partial \xi} = 0 \quad (14)$$

و معادلات تعادلی تبدیل شده عبارتند از:

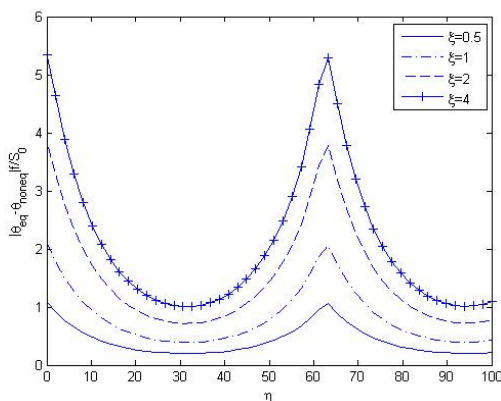
برای سنجش کیفی اعتبار مدل تعادلی، مقادیر پارامترها بدون توجه به فیزیک و فقط با هدف نمایش کیفی تغییرات و رفتارها انتخاب شده‌اند. شکل ۴ توزیع معیار تعادل بر حسب زمان نرمال شده ( $\eta$ ) را در موقعیت‌های مختلف از دامنه حل نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مقدار معیار تعادل با نزدیک شدن به انتهای دامنه بیشتر می‌شود. بنابراین بحرانی‌ترین نقطه در انتهای دامنه قرار دارد. یا به عبارت دیگر نقاط انتهای دامنه بیشترین فاصله را از حالت تعادل حرارتی دارند. به همین دلیل تحلیل‌های بعدی روی این نقطه انجام می‌شوند.

شکل ۵ اثر تغییر ثابت زمانی نرمال شده  $\tau$  را بر معیار تعادل نشان می‌دهد. با توجه به این شکل روشن است که تغییرات ثابت زمانی تاثیر قابل توجهی بر معیار تعادل ندارد.

شکل ۶ اثر نسبت توانایی ذخیره سازی انرژی بافت به خون ( $C_R$ ) را بر معیار تعادل نشان می‌دهد. با توجه به این شکل با افزایش مقدار  $C_R$  مقدار معیار تعادل کاهش می‌یابد. یا به عبارت دیگر با کاهش توانایی ذخیره سازی انرژی خون نسبت به بافت، سیستم به شرایط تعادل حرارتی نزدیک‌تر می‌شود. اما از آنجا که قدرت ذخیره سازی انرژی بافت و خون تقریباً یکسان است ( $C_R=1$ ) نتیجه قابل استفاده‌ای از این تحلیل برداشت نمی‌شود.

شکل ۷ اثر فرکانس نرمال شده منبع را بر معیار تعادل نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل دیده می‌شود با افزایش فرکانس، مقدار معیار تعادل افزایش می‌یابد. یا به عبارت دیگر سیستم از حالت تعادل حرارتی فاصله بیشتری می‌گیرد. با افزایش فرکانس منبع، توان اعمالی در زمان کوتاه‌تری به سیستم منتقل می‌شود، بنابراین زمان کافی برای همدم شدن و به تعادل رسیدن بافت و خون وجود ندارد. بنابراین در کاربردهایی درمانی که منبع حرارتی با فرکانس بالا، مثل لیزر، به کار می‌رود، برای تحلیل پدیده‌های مربوط به انتقال حرارت در سیستم زنده تحت درمان، نمی‌توان از مدل‌های انتقال حرارت تعادلی، مثل مدل پنس، استفاده کرد.

پس از انجام تحلیل‌های کیفی بررسی تئوری ارائه شده برای مقادیر فیزیکی پارامترها لازم به نظر می‌رسد. مقادیر خواص ترموفیزیکی بافت و خون عبارتند از [۸]:



شکل ۴: معیار تعادل بر حسب زمان بی‌بعد در موقعیت‌های مختلف.

$$\xi_0=4, S_0=1, f=2, C_R=0.5, \tau=0.01$$

$$\bar{\theta}_b = \frac{C_R}{s + C_R} \quad (33)$$

$$\left\{ \frac{C}{B} [\cosh(\beta\xi) - \tanh(\beta\xi_0) \cdot \sinh(\beta\xi) - 1] \right\}$$

$$\bar{Q} = \frac{-1}{1 + \tau \cdot s} \quad (34)$$

$$\left\{ \frac{C\beta}{B} [\sinh(\beta\xi) - \tanh(\beta\xi_0) \cdot \cosh(\beta\xi)] \right\}$$

$$A = 1/(1 + \tau \cdot s) \quad (35)$$

$$B = -s \quad (36)$$

$$C = [S_0 \pi \cdot \coth(s/2f)] / [f \cdot ((s/f)^2 + \pi^2)] \quad (37)$$

$$\beta = \sqrt{-B/A} \quad (38)$$

اکنون با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس به معادلات ۲۹ تا ۳۴ می‌توان مقادیر نرمال شده  $\theta$  و  $Q$  را برای مدل تعادلی و غیر تعادلی در فضای زمان نرمال شده ( $\eta$ ) به دست آورد. بدین منظور از رابطه زیر به صورت عددی انتگرال گرفته می‌شود.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m-i\infty}^{m+i\infty} e^{s \cdot t} F(s) ds \quad (39)$$

در این رابطه مقدار  $m$  طوری انتخاب می‌شود که همه نقاط تکیه تابع  $F(s)$  در سمت چپ خط  $\text{Re}(s)=m$  قرار گیرند [۱۴]. در این تحقیق مقدار  $m$  برابر  $0.0001$  در نظر گرفته شده است.

#### نتایج:

نتایج به گونه‌ای استخراج شده‌اند که معیارهای وجود یا عدم وجود تعادل حرارتی مشخص شوند. بدین منظور اختلاف نتایج حاصل از مدل تعادلی و غیر تعادلی در طول زمان برای مقادیر مختلف پارامترها بررسی شده‌اند. اختلاف دمای نرمال شده بافت حاصل از مدل تعادلی ( $\theta_{t,eq}$ ) با دمای نرمال شده بافت حاصل از مدل غیر تعادلی ( $\theta_{t,neq}$ ) به عنوان پارامتر معیار در نظر گرفته شده‌اند. بدین ترتیب نزدیک شدن مقدار این پارامتر ( $|\theta_{t,eq} - \theta_{t,neq}|$ ) به صفر به منزله اعتبار مدل تعادلی خواهد بود. اما از آنجا که هر دو دمای نرمال شده متناسب با تفاضل دمای هر نقطه با دمای اولیه ( $\theta = (T - T_0)/T_0$ ) که مقداری ثابت است می‌باشند، با کم شدن کل انرژی ورودی به سیستم، مقدار دمای حاصل از هر دو مدل به دمای اولیه نزدیک‌تر شده و در نتیجه مقدار تفاضل آنها هم کم خواهد شد. بنابراین پارامتر معیار به طور کاذب کاهش می‌یابد. در تحقیق قبلی که توسط مولفین انجام شده است [۱۵]، انتخاب پارامتر  $S_0$  در هر تحلیل متناسب با سایر پارامترها به گونه‌ای انجام گرفته که میزان کل انرژی ورودی به بافت ثابت بماند. اما اکنون برای رفع این مشکل اختلاف دمای مذکور با پارامتر بدون بعد  $S_0/f$  نرمال می‌شود. این پارامتر متناسب با کل انرژی ورودی به انرژی اولیه سیستم می‌باشد ( $S_0/f = s_0 a / \rho_t c_t T_0$ ). بنابراین معیار سنجش اعتبار مدل تعادلی عبارت است از:  $|\theta_{t,eq} - \theta_{t,neq}| \cdot f / S_0$ . از این پس این پارامتر "معیار تعادل" نامیده می‌شود.

$$\xi = 64,93 \times$$

$$\eta = 5e-4 t$$

$$\tau = 5e-4 \bar{t}$$

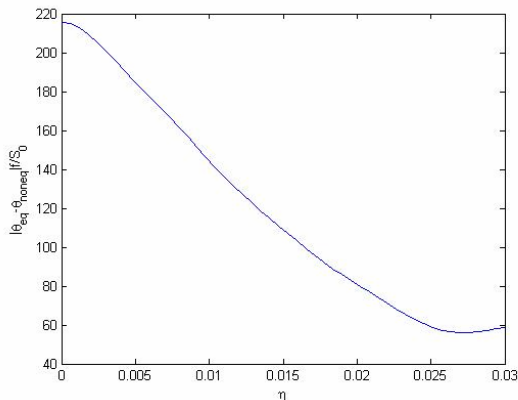
$$Q = 9,95e-5 q$$

$$S_0 = 1,536e-6 s_0$$

$$f = 2000/a$$

طول ناحیه مورد درمان را با توجه با داده‌های [۸]  $0,002$  متر و طول دوره درمان از مرتبه ۱ دقیقه در نظر گرفته شده است. توان منبع و طول دوره زمانی اعمال انرژی با توجه به داده‌های مرجع [۲] برای لیزرهای با پالس کوتاه از مرتبه  $10^9$  وات و  $10^{-3}$  ثانیه فرض شده است. مقدار عددی ثابت زمانی  $\bar{t}$  برای بافت‌های زنده با توجه به [۸] از مرتبه ۲۰ می‌باشد.

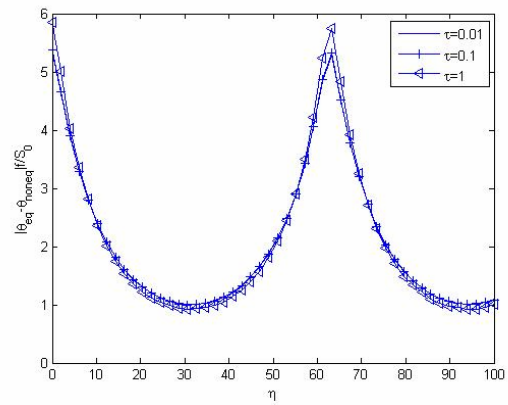
شکل ۸ پارامتر معیار را بر حسب زمان نرمال شده برای مقادیر داده شده برای لیزر با پالس کوتاه نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که مقدار این پارامتر، به خصوص در لحظات اولیه، نسبتاً بالاست و این بدین معناست که در درمان‌های حرارتی توسط لیزرهای با پالس کوتاه، به هیچ وجه تعادل حرارتی وجود ندارد.



شکل ۸: معیار تعادل بر حسب زمان بی‌بعد برای لیزرهای با پالس کوتاه

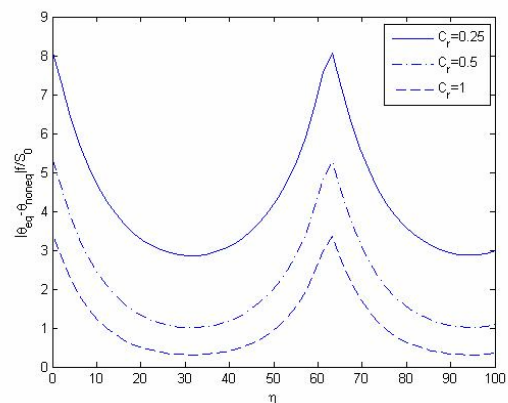
### نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

هدف از انجام این تحقیق به دست آوردن معیاری برای تشخیص اعتبار و یا عدم اعتبار فرض وجود تعادل حرارتی می‌باشد. تحلیل‌های انجام شده نشان می‌دهند که حتی در صورتی که سیستم شریانی بافت مورد نظر فقط از شبکه مویرگی تشکیل شده باشد، باز هم در فرکانس‌های بالا، استفاده از مدل‌های تعادلی منجر به خطا می‌شوند. زمان مشخصه موج حرارتی غیرفوری‌های تأثیر قابل توجهی بر تعادل حرارتی ندارد. کاهش پارامتر  $C_R$  که نسبت توان ذخیره سازی انرژی در بافت به توان ذخیره سازی انرژی در خون می‌باشد، منجر به کاهش معیار تعادل می‌شود. به عبارت دیگر افزایش توان ذخیره سازی انرژی در خون نسبت به بافت باعث از بین رفتن شرایط تعادل حرارتی می‌شود. در پایان با حل یک مساله نمونه از کاربرد لیزرهای با پالس کوتاه در مسائل درمانی، مشخص شد که معیار تعادل مربوط به آن نسبتاً بزرگ بوده و تجزیه و تحلیل آن به کمک مدل‌های تعادلی منجر به بروز خطا خواهد شد.



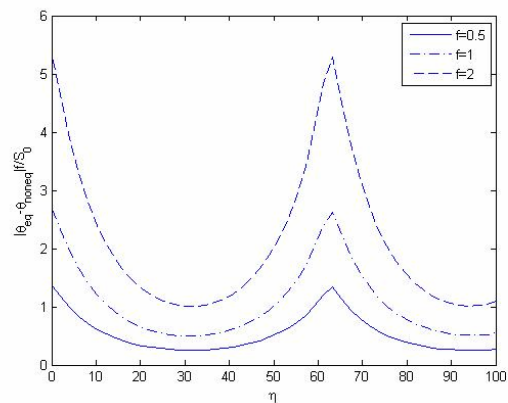
شکل ۵: معیار تعادل بر حسب زمان بی‌بعد برای مقادیر مختلف  $\tau$ .

$$\xi_0 = 4, S_0 = 1, f = 2, C_R = 0,5, \xi = 4$$



شکل ۶: معیار تعادل بر حسب زمان بی‌بعد برای مقادیر مختلف  $C_R$ .

$$\xi_0 = 4, S_0 = 1, f = 2, \tau = 0,1, \xi = 4$$



شکل ۷: معیار تعادل بر حسب زمان بی‌بعد برای مقادیر مختلف  $f$ .

$$\xi_0 = 4, S_0 = 1, C_R = 0,5, \tau = 0,01, \xi = 4$$

$$\rho_t = \rho_b = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_t = c_b = 4200 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$$

$$k_t = 0,5 \text{ W/m}^\circ\text{K}$$

$$\omega_b = 0,0005 \text{ 1/s}$$

$$T_0 = 37^\circ\text{C} = 310^\circ\text{K}$$

بنابراین:

[6]- K.Kim, Z.Guo, "Multi-time-scale heat transfer modeling of turbid tissues exposed to short-pulsed irradiations", computer methods and programs in biomedicine, Vol. 86, pp. 112-123, 2007

[7]-J.Zhou, J.Liu, "Numerical study on 3D light and heat transport in biological tissues embedded with large blood vessels during laser-induced thermo therapy", Numerical heat transfer, part A, vol.45, pp. 415-449, 2004

[8]-K.C.Liu, "Thermal propagation analysis for living tissue with surface heating", International Journal of Thermal Sciences, Vol. 47, p.p. 507-513, 2008

[9]-A.Nakayama, F. Kuwahara, "A general bioheat transfer model based on the theory of porous media", International journal of heat and mass transfer, Vol. 51, p.p. 3190-3199, 2008

[10]-A.R.A. Khaled, K.Vafai, "The role of prous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues", International journal of heat and mass transfer, vol. 46, pp.4989-5003, 2003

[11]-J.P.Abraham, E.M. Sparrow, "A thermal ablation bioheat model including liquid to vapour phase change, pressure and necrosis-dependent perfusion, and moisture-dependent properties", International journal of heat and mass transfer, vol. 50, pp.2537-2544, 2007

[12]-Y.He, H.Liu, R.Himeno, "A one dimensional thermo fluid model of blood circulation in the human upperlimb", International journal of heat and mass transfer, vol. 47, pp. 2735-2745, 2004

[13]- W.E.Boyce, R.C.Diprima, "Elementary differential equations and boundary value problems", 3rd edition, John Wiley & Sons, 1977

[14]-M.R.Spiegel, "Mathematical handbook of formulas and tables", Schaums outline series, McGrawHill 1990

[۱۵]- جواد ابولفضلی اصفهانی، مهدی بلالی، "معیار کیفی سنجش اعتبار مدل‌های انتقال حرارت زیستی تعادلی در برابر مدل‌های غیر تعادلی برای منبع حرارتی نوسانی"، پانزدهمین کنفرانس مهندسی پزشکی ایران، مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، ۱۳۸۷

### فهرست علائم

a	دوره تناوب، sec
c	ظرفیت حرارتی ویژه، J/kgK
$C_R = \rho_t c_t / \rho_b c_b$	نسبت ظرفیت حرارتی بافت به خون
$f = \rho_t c_t / \rho_b c_b \omega_b a$	فرکانس نرمال شده
f(t)	تابع سینوسی یکسو شده
k	ضریب انتقال حرارت هدایتی، W/mK
q	شار حرارتی، W/m <sup>2</sup>
$Q = q \sqrt{k_t / \rho_b c_b \omega_b} / k_t T_0$	شار حرارتی نرمال شده

$s_0$	ماکزیم مقدار منبع حرارتی، W/m <sup>3</sup>
$S_0 = s_0 / T_0 \rho_b c_b \omega_b$	ماکزیم مقدار منبع حرارتی نرمال شده
t	زمان، sec
T	دما، K
x	موقعیت، m
$x_0$	طول دامنه، m

### علائم یونانی

$\eta = t \rho_b c_b \omega_b / \rho_t c_t$	زمان نرمال شده
$\theta = (T - T_0) / T_0$	دمای نرمال شده
$\xi = x / \sqrt{k_t / \rho_b c_b \omega_b}$	موقعیت نرمال شده
$\xi = x_0 / \sqrt{k_t / \rho_b c_b \omega_b}$	طول نرمال شده دامنه
$\rho$	چگالی، kg/m <sup>3</sup>
$\tau = \bar{\tau} \rho_b c_b \omega_b / \rho_t c_t$	ثابت زمانی غیرفوری‌های نرمال شده
$\bar{\tau}$	ثابت زمانی غیرفوری‌های، sec
$\omega$	پرفیوژن خون به بافت، 1/sec

### زیرنویس

b	خون
t	بافت

### مراجع

- [1]- M.Jaunich, S.Raje, K.Ki, K.Mitra, Z.Guo, "Bioheat transfer analysis during short pulse laser irradiation of tissue", International journal of heat and mass transfer, Vol. 51, pp. 5511-5521, 2008
- [2]- R.Dua, S.Chakraborty, "A novel modeling and simulation technique of photo-thermal interactions between lasers and living biological tissues undergoing multiple changes in phase" computers in biology and medicine, Vol. 35, pp. 447-462, 2005
- [3]- P.Yaun, "Numerical analysis of temperature and thermal dose response of biological tissues to thermal non-equilibrium during hyperthermia therapy", Medical engineering & physics, Vol. 30, pp. 135-144, 2008
- [4]-C.Guyton, J. E. Hall, "Text book of Medical Physiology", Vol. 1, 9th edition, Tchehr, 2000
- [5]-E.H.Ooi, W.T.Ang, E.Y.K.Ng, "A boundary element method of the human eye undergoing laser thermokeratoplasty", computers in biology and medicine, vol. 38, pp.727-737