

## تحلیل سینماتیکی و طراحی ایزوتروپی روبات موازی صفحه‌ای 3PRR

حمیدرضا کردجزی<sup>۱</sup>، علیرضا اکبرزاده توتونچی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، Kordjazi@gmail.com

<sup>۲</sup> استادیار گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، A\_Akbarzadeh\_T@yahoo.com

### چکیده

در این مقاله کاربردها و مزایای روبات‌های موازی به اختصار بررسی و سپس روبات 3PRR که نوع خاصی از روبات‌های موازی صفحه‌ای است مورد مطالعه قرار گرفته شده است. ابتدا سینماتیک معکوس روبات و پاسخ‌های سینماتیک معکوس برای حالتی خاص محاسبه شده است. سپس سینماتیک مستقیم روبات بررسی شده است. روش بزوت<sup>۱</sup> که یک روش دقیق با تقریب‌های کمتر است، برای حل دستگاه معادلات غیرخطی معرفی و پاسخ‌های قابل قبول سینماتیک مستقیم با استفاده از آن بدست آمده است. در ادامه وارون‌سازی سرعت و شتاب برای روبات بررسی شده و با استفاده از آن، با داشتن سرعت و شتاب مجری نهایی، سرعت و شتاب مفاصل محرک محاسبه گردیده است. با استفاده از مفهوم ایزوتروپی که به عنوان یکی از خواص ماتریس‌ها در ریاضیات مطرح می‌گردد، تحلیل ایزوتروپی روبات 3PRR بر اساس ایزوتروپی ماتریس‌های ژاکوبین و عدد شرط که وابسته به ترکیب‌بندی فیزیکی آن است بررسی می‌شود. پس از معرفی مفهوم طول مشخصه، طراحی ایزوتروپیک روبات بر اساس آن انجام می‌شود. مشاهده می‌شود که روبات دارای ساختارهای ایزوتروپیک زیادی است.

**کلمات کلیدی:** روبات موازی، سینماتیک، ایزوتروپی، ماتریس ژاکوبی، عدد شرط

### مقدمه

امروزه از روبات‌ها در خطوط مونتاژ، صنایع جوشکاری، ماشین‌کاری، پزشکی و صدها عملیات دیگر استفاده می‌شود. روبات‌های صنعتی را می‌توان به دو دسته کلی روبات‌های ایستگاهی و روبات‌های متحرک تقسیم کرد. همچنین روبات‌ها را می‌توان به چهار دسته روبات‌های سری، درختی، موازی و ترکیبی تقسیم‌بندی کرد. برخلاف روبات‌های سری، روبات‌های موازی از زنجیره‌های سینماتیکی بسته تشکیل شده‌اند. این روبات‌ها از دو صفحه متحرک و ثابت تشکیل شده‌اند. کاربردهای بسیاری را می‌توان نام برد که در آنها روبات‌های موازی برقیب هستند، از جمله می‌توان به حرکت‌های بسیار کوچکی که نیاز به دقت بسیار زیاد در یک فضای کاری محدود دارند اشاره نمود. یکی دیگر از کاربردهای روبات‌های موازی در فرایندهای تولیدی است که احتیاج به روبات صلب برای انجام عمل مورد نظر بر روی قطعه کار دارند. به همین دلیل اخیراً استفاده از تکنولوژی روبات‌ها در

طراحی ماشین‌ابزار بسیار متداول شده است. ماشین‌ابزارهای سنتی از نظر زنجیره سینماتیکی تشکیل یک زنجیره سری را می‌دهند. اما اکنون بعضی از این طرح‌ها بر اساس استفاده از تکنولوژی بازوهای مکانیکی موازی که برای رفع نقایص بازوهای سری ابداع شده‌اند بنا شده است.

روبات‌های موازی نسبت به روبات‌های سری دارای مزیت‌هایی از قبیل دقت و سفتی بهتر، نسبت بار به وزن بیشتر، سرعت کاری بیشتر، تکرارپذیری بیشتر و درنهایت استفاده از محرک‌هایی با قدرت کمتر هستند. اما ضعف اصلی این روبات‌ها درمقایسه با روبات‌های سری فضای کاری محدودتر آنهاست. نسبت پایین حمل بار به وزن، دقت پایین و سفتی کم از معایب عمده بازوهای مکانیکی سری است. این عیوب از اتصال سری بازوها (که به فرم یک تیر یک سر درگیر است) و اینکه هر موتور مسئولیت حمل و حرکت کلیه موتورها و بازوهای بالادست خود را دارد، ناشی می‌شود. بعلاوه دقت کاری در بازوهای مکانیکی سری به شدت متأثر از لقی‌ها در مفاصل است که به صورت سری به یکدیگر متصل می‌شوند. تقاضای روزافزون بازار برای تولید ماشین‌ابزار سبک، با سرعت و دقت بالا و با مشخصات دینامیکی خوب، استفاده از بازوهای مکانیکی موازی را اجتناب‌ناپذیر ساخته است. استفاده از بازوهای بلند در تمامی طرح‌های فوق موجب ارتعاشات در سرعت‌های بالا می‌گردد که از معایب عمده کلیه سیستم‌های فوق‌الذکر است. برای رفع این نقص استفاده از بازوهای مکانیکی موازی که دارای طول‌های کوتاه می‌باشند منطقی به نظر می‌رسد. دقت سینماتیکی روبات که به ایزوتروپی ماتریس‌های ژاکوبی وابسته است، اولین بار به وسیله آنجلس<sup>۲</sup> [۱] بر مبنای عدد شرط که مستقل از مقیاس و چارچوب<sup>۳</sup> است پیشنهاد شد. در نهایت یک ماتریس ایزوتروپ، ماتریسی با عدد شرط واحد است و با استفاده از ماتریس ژاکوبین طراحی ایزوتروپی روبات بدست می‌آید [۴-۶].

### معرفی روبات 3PRR

روبات دارای یک صفحه ثابت، یک صفحه متحرک و سه لینک است که هر یک دارای یک مفصل انتقالی<sup>۴</sup> (رفت و برگشتی) است که بطور متوالی دارای دو اتصال چرخشی<sup>۵</sup> می‌باشند (شکل ۱). تنها مفاصل

<sup>2</sup> Angeles

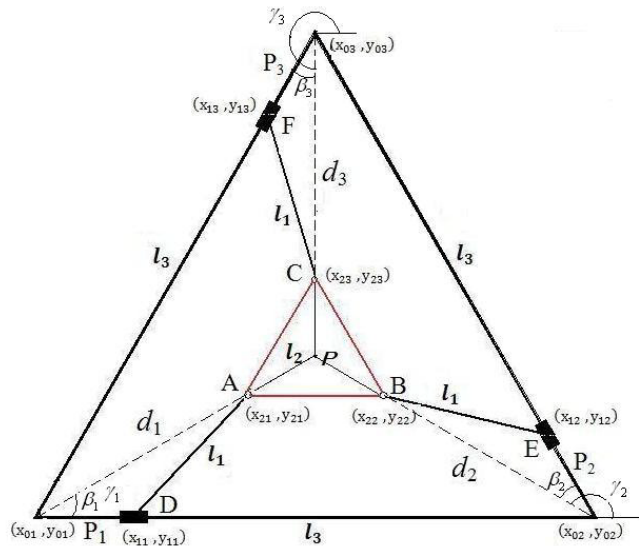
<sup>3</sup> Normalized

<sup>4</sup> Prismatic

<sup>5</sup> Revolute

<sup>1</sup> Bezout

مشاهده می‌شود که سینماتیک معکوس روبات معرفی شده دارای حداکثر هشت جواب می‌باشد (شکل ۳). مثلاً به ازای  $x_p = 0.5m$ ,  $y_p = 0.2m$  و  $\varphi = \pi/6$  برای روبات مشخص شده در جدول ۱ پاسخ‌های سینماتیک معکوس در جدول ۲ و شکل ۳ مشخص شده است.



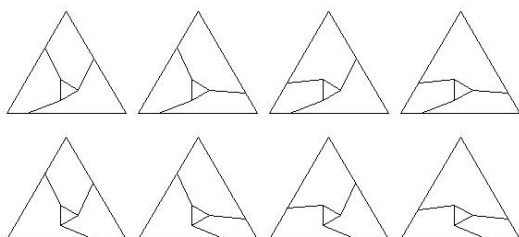
شکل ۲: تعیین پارامترهای روبات 3PRR

جدول ۱: جدول مشخصات روبات

$i$	۱	۲	۳
$x_{oi}(m)$	۰	۱	۰,۵
$y_{oi}(m)$	۰	۰	۰,۸۶۶
$l_i(m)$	۰,۳	۰,۱	۱

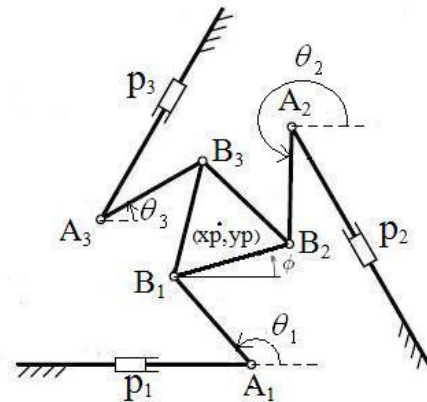
جدول ۲: پاسخ‌های سینماتیک معکوس روبات

شماره پاسخ	$p_1(m)$	$p_2(m)$	$p_3(m)$
۱	۰,۷۲۷۷	۰,۵۴۴۳	۰,۶۹۷۹
۲	۰,۷۲۷۷	۰,۵۴۴۳	۰,۳۵۵۶
۳	۰,۷۲۷۷	۰,۲۰۲۱	۰,۶۹۷۹
۴	۰,۷۲۷۷	۰,۲۰۲۱	۰,۳۵۵۶
۵	۰,۱۷۲۳	۰,۵۴۴۳	۰,۶۹۷۹
۶	۰,۱۷۲۳	۰,۵۴۴۳	۰,۳۵۵۶
۷	۰,۱۷۲۳	۰,۲۰۲۱	۰,۶۹۷۹
۸	۰,۱۷۲۳	۰,۲۰۲۱	۰,۳۵۵۶



شکل ۳: پاسخ‌های سینماتیک معکوس روبات 3PRR

انتقالی تحریک می‌شوند. از جمله مزیت‌های این روبات این است که بدلیل دارا بودن مفاصل انتقالی می‌توان از محرک الکتروپنوماتیکی برای نیروهای نسبتاً کم و از محرک الکتروهیدرولیکی برای نیروهای نسبتاً زیاد استفاده کرد.



شکل ۱: روبات 3PRR

### سینماتیک<sup>۱</sup>

در علم سینماتیک، مکان، سرعت، شتاب و کلیه مشتق‌های آن نسبت به زمان و یا هر متغیر دیگر بررسی می‌شود. سینماتیک مستقیم و سینماتیک معکوس دو مسأله اساسی در سینماتیک روبات‌ها به شمار می‌آیند. در سینماتیک مستقیم با معلوم بودن متغیرهای مفصلی، مختصات کارتزین مجری نهایی<sup>۲</sup> مشخص می‌شود و در سینماتیک معکوس با معلوم بودن مختصات کارتزین مجری نهایی، متغیرهای مفصلی تعیین می‌گردند.

### سینماتیک معکوس<sup>۳</sup>

با توجه به هندسه مساله می‌توان پاسخ‌های سینماتیک معکوس روبات 3PRR را بدست آورد. برای شکل ۲ می‌توان نوشت:

$$l_1^2 = d_i^2 + p_i^2 - 2 d_i p_i \cos \beta_i \quad (1)$$

که در رابطه (۱) داریم:

$$d_i^2 = (x_{2i} - x_{0i})^2 + (y_{2i} - y_{0i})^2 \quad (2)$$

$$\gamma_i = a \tan 2(y_{2i} - y_{0i}, x_{2i} - x_{0i}) \quad (3)$$

$$\beta_i = \gamma_i - 2(i-1)\frac{\pi}{3} \quad i=1,2,3 \quad (4)$$

در نتیجه پاسخ‌های سینماتیک معکوس، پاسخ‌های معادله ۵

می‌باشند که برای هر  $p_i$  حداکثر دو جواب حقیقی بدست می‌آید.

$$p_i^2 - 2 n_{1i} p_i + n_{2i} = 0 \quad (5)$$

$$n_{1i} = d_i \cos \beta_i \quad , \quad n_{2i} = d_i^2 - l_1^2 \quad (6)$$

در نتیجه داریم:

$$p_i = n_{1i} \pm \sqrt{n_{1i}^2 - n_{2i}} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Kinematic

<sup>2</sup> End Effector

<sup>3</sup> Inverse Kinematic

سینماتیک مستقیم<sup>۱</sup>

$$\tan \frac{\alpha_2}{2} = z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (19)$$

اما مجهولات  $\alpha_2$  و  $\psi$  می‌باشند. بنابراین رابطه دیگری که می‌توان بدست آورد این است که در مکانیزم چهارمیله نقطه کاپلر C می‌تواند یک مسیر را طی کند. ولی برای متصل بودن حلقه‌ها به یکدیگر لازم است که نقطه C حول نقطه F به شعاع  $l_1$  دوران کند. با قطع دادن منحنی دایره با منحنی‌ای که نقطه کاپلر طی می‌کند به معادله دوم می‌رسیم که عبارت است از:

$$(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2 = l_1^2 \quad (20)$$

حال در اینجا است که بحث روش حل معادلات ۱۹ و ۲۰ بصورت دستگاه معادلات غیرخطی به میان می‌آید. معمولاً برای حل چنین دستگاه معادلاتی از روش سکانت با در نظر گرفتن شرایطی خاص استفاده شده است. اما در اینجا روش بزوت که یک روش کلی و دقیق با تقریب‌های کمتر و مناسب‌تر است، برای حل دستگاه معادلات مورد نظر پیشنهاد می‌شود.

اصول این روش به این صورت است که از معادلات مثلثاتی کوپلر شده، معادلات چند جمله‌ای و ماتریس بزوت ساخته می‌شود. با استفاده از خلاصه‌سازی، می‌توان دستگاه معادلات شامل چند متغیر را به یک چند جمله‌ای بر حسب تنها یک متغیر تبدیل کرد [۷]. در اینجا ما دو معادله مثلثاتی کوپلر شده داریم، یعنی با یک مرحله استفاده از ماتریس بزوت می‌توان به معادله دلخواه رسید. برای حل معادلات غیرخطی ۱۹ و ۲۰ توسط روش بزوت، معادلات مثلثاتی باید بصورت یک چند جمله‌ای تبدیل شوند. این تبدیل توسط تغییر متغیرهای مثلثاتی معروف زیر صورت می‌گیرد:

$$\tan \frac{\alpha_2}{2} = z_1, \sin \alpha_2 = \frac{2z_1}{1+z_1^2}, \cos \alpha_2 = \frac{1-z_1^2}{1+z_1^2} \quad (21)$$

$$\tan \frac{\psi}{2} = z_2, \sin \psi = \frac{2z_2}{1+z_2^2}, \cos \psi = \frac{1-z_2^2}{1+z_2^2} \quad (22)$$

با جایگزینی عبارات فوق در معادلات ۱۹ و ۲۰ و سپس ساده‌سازی معادلات، دو چند جمله‌ای بصورت معادلات ۲۳ و ۲۴ بدست می‌آید که ضرایب  $a_{ij}$  و  $b_{ij}$  که شامل ترم‌های بسیار بلند هستند، ضرایب معادلات چند جمله‌ای‌های فوق می‌باشند که برحسب توان‌های  $z_1$  و  $z_2$  مرتب شده‌اند.

$$f_1 = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 (a_{ij} z_1^{i-1} z_2^{j-1}) \right) \quad (23)$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 (b_{ij} z_1^{i-1} z_2^{j-1}) \right) \quad (24)$$

با استفاده از روش بزوت می‌توان متغیر  $z_2$  را از معادلات حذف کرد و فقط یک معادله برحسب پارامتر مجهول  $z_1$  داشت.

$$f_1 = L_1 z_1^2 + L_2 z_1 + L_3 = 0 \quad (25)$$

$$f_2 = M_1 z_1^2 + M_2 z_1 + M_3 = 0 \quad (26)$$

که ترم‌های  $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3$  بصورت زیر هستند:

همان‌گونه که در شکل ۲ مشخص است نقاط D و E مکان معینی دارند اما مکانیزم DABE یک مکانیزم ۴ میله‌ای است که نقطه C را می‌توان نقطه کاپلر<sup>۲</sup> آن مکانیزم نامید (شکل ۴). با حرکت مفاصل، نقطه C یک مسیر خاص را طی می‌کند که می‌توان مختصات آن را به صورت زیر بدست آورد:

$$x_C = x_D + l_1 \cos(\alpha_1 + \psi) + \sqrt{3}l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \theta) \quad (8)$$

$$y_C = y_D + l_1 \sin(\alpha_1 + \psi) + \sqrt{3}l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \theta) \quad (9)$$

که در روابط فوق  $\theta = \frac{\pi}{3}$  می‌باشد.

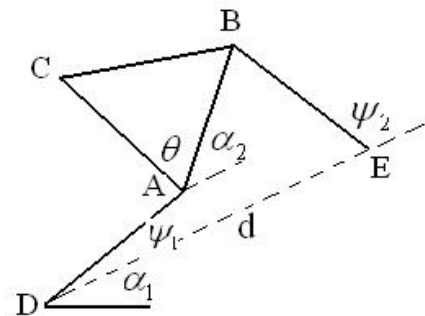
با توجه به شکل مکانیزم می‌توان نوشت:

$$\vec{DA} + \vec{AB} = \vec{DE} + \vec{EB} \quad (10)$$

رابطه برداری فوق را می‌توان تبدیل به دورابطه جبری زیر نمود:

$$l_1 \cos \psi_1 + \sqrt{3}l_2 \cos \alpha_2 = d + l_1 \cos \psi_2 \quad (11)$$

$$l_1 \sin \psi_1 + \sqrt{3}l_2 \sin \alpha_2 = l_1 \sin \psi_2 \quad (12)$$



شکل ۴: نمایش مکانیزم چهار میله در روبات

طرفین روابط ۱۱ و ۱۲ را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم. توجه می‌شود که  $\psi_2$  در این مرحله حذف می‌گردد. در نهایت پس از تغییر متغیر دادن  $\tan \frac{\alpha_2}{2} = z$  و ساده‌سازی، معادله‌ای به فرم معادله ۱۳ حاصل می‌شود:

$$Az^2 + 2Bz + C = 0 \quad (13)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$A = m_1 + m_2 - (1 + m_3) \cos \psi \quad (14)$$

$$B = \sin \psi \quad (15)$$

$$C = m_1 - m_2 + (1 - m_3) \cos \psi \quad (16)$$

در روابط فوق  $\psi = \psi_1$  می‌باشد و نیز داریم:

$$m_1 = \frac{3l_2^2 + d^2}{2\sqrt{3}l_1l_2}, m_2 = \frac{d}{l_2}, m_3 = \frac{d}{\sqrt{3}l_2} \quad (17)$$

$$d^2 = (l_3 - p_1)^2 + p_2^2 - p_2(l_3 - p_1) \quad (18)$$

از رابطه ۱۳ داریم:

<sup>1</sup> Direct Kinematic

<sup>2</sup> Coupler

۱۱	---	---	---
۱۲	---	---	---
*۱۳	۰,۳۰۹۳	۰,۴۰۱۵	۰,۲۱۸۸
*۱۴	۰,۴۵۴۶	۰,۰۹۴۸	۱,۸۳۵۷
*۱۵	۰,۴۰۳۳	۰,۴۸۸۷	۰,۸۹۱۱
*۱۶	۰,۴۳۵۹	۰,۴۵۹۱	۱,۱۱۹۱

### وارون سازی سرعت<sup>۱</sup>

هدف از وارون سازی سرعت آن است که با داشتن سرعت مجری نهایی، سرعت مفاصل محرک را محاسبه نماییم. بطور کلی ماتریس ژاکوبین یک روبات ماتریسی است که سرعت مفاصل را به سرعت کارترین تبدیل می کند. ارتباط بین سرعت محرکها و سرعت نقطه کاری معمولاً به صورت زیر نوشته می شود:

$$Jt + K\dot{p} = 0 \quad (35)$$

که در آن  $J$  و  $K$  ماتریس های ژاکوبین،  $t$  آرایه چرخشی سه بعدی یا بردار سرعت کارترین و  $\dot{p}$  بردار سه بعدی سرعت مفاصل می باشند و داریم:

$$t = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\phi}]^T \quad (36)$$

$$\dot{p} = [\dot{p}_1 \quad \dot{p}_2 \quad \dot{p}_3]^T \quad (37)$$

فرم کلی ماتریس های ژاکوبین در روبات های موازی به صورت زیر می باشد:

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$K = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \quad (39)$$

برای بدست آوردن ترم های  $a_i, b_i, c_i$  برای روبات 3PRR پس از جایگذاری عبارت های ۴۰ تا ۴۲ را در رابطه ۱ از آن مشتق گیری می نماییم.

$$d_i = \sqrt{x_{2i}^2 + y_{2i}^2} \quad (40)$$

$$x_{2i} = x - l_2 \cos \varphi_i, \quad y_{2i} = y - l_2 \sin \varphi_i \quad (41)$$

$$\varphi_i = \varphi + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}(i-1) \quad (42)$$

پس از ساده سازی، رابطه ای به فرم رابطه زیر بدست می آید:

$$a_i \dot{x} + b_i \dot{y} + c_i \dot{\phi} + m_i \dot{p} = 0 \quad (43)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$a_i = 2x_{2i}d_i - x_{2i}e_i - 2p_i y_{2i} \sin \beta_i \quad (44)$$

$$b_i = 2y_{2i}d_i - y_{2i}e_i + 2p_i x_{2i} \sin \beta_i \quad (45)$$

$$c_i = (x_{2i}l_2 \sin \varphi_i - y_{2i}l_2 \cos \varphi_i)(2d_i - e_i) \quad (46)$$

$$m_i = 2p_i d_i - f_i d_i \quad (47)$$

در روابط فوق  $d_i$  از رابطه ۴۰ بدست می آید و نیز داریم:

$$L_1 = I_1 z_2^2 + I_2 z_2 + I_3 \quad (27)$$

$$L_2 = I_4 z_2^2 + I_5 z_2 + I_6 \quad (28)$$

$$L_3 = I_7 z_2^2 + I_8 z_2 + I_9 \quad (29)$$

$$M_1 = J_1 z_2^2 + J_2 z_2 + J_3 \quad (30)$$

$$M_2 = J_4 z_2^2 + J_5 z_2 + J_6 \quad (31)$$

$$M_3 = J_7 z_2^2 + J_8 z_2 + J_9 \quad (32)$$

پارامترهای  $I_i$  و  $J_i$  از ماتریس های  $a$  و  $b$  بدست می آیند. با

تشکیل دترمینان زیر

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_3 \\ M_1 & M_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_2 & L_2 \\ M_1 & L_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_2 & L_3 \\ M_1 & M_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

برای روبات 3PRR یک معادله درجه هشت بدست می آید:

$$g = N_1 z_2^8 + N_2 z_2^7 + \dots + N_8 z_2 + N_9 = 0 \quad (34)$$

با حل معادله بالا ۸ جواب برای  $z_2$  به دست می آید که با استفاده از آنها  $\psi$  محاسبه می گردد و با استفاده از معادله ۱۹ به ازای هر  $\psi$  دو مقدار برای  $\alpha_2$  بدست می آید. در نتیجه دستگاه معادلات دارای ۱۶ جواب است که تعدادی از آنها غیر حقیقی و غیر قابل قبولند. یک روش برای پیدا کردن پاسخ های قابل قبول از میان پاسخ های حقیقی، چک کردن پاسخها با سینماتیک معکوس با در نظر گرفتن مقداری خطا می باشد. اما روشی که در اینجا به کار رفته است، چک کردن پاسخها توسط معادلات  $f_1$  و  $f_2$  می باشد. پاسخها باید هر دو معادله را ارضا کنند. پاسخ های سینماتیک مستقیم روبات مشخص شده در جدول ۱ برای حالتی که جدول ۳ مشخص شده است.

همانطور که گفته شد، مساله سینماتیک مستقیم دارای حل چندگانه است. اما با توجه به مسیر تنها یک حل حقیقی مطابق با مسیر خواهد بود که توسط روش های مختلف قابل انتخاب می باشد.

جدول ۳: پاسخ های سینماتیک مستقیم (\*: پاسخ های قابل قبول)

شماره پاسخ	$x_p(m)$	$y_p(m)$	$\varphi_p(rad)$
۱	---	---	---
۲	---	---	---
۳	---	---	---
۴	---	---	---
۵	۰,۳۳۱۹	۰,۳۷۱۶	۰,۰۳۰۹
۶	۰,۷۲۵۰	۰,۱۰۷۰	۰,۳۴۹۱
۷	۰,۵۷۱۰	۰,۲۶۹۱	-۰,۶۳۴۳
۸	۰,۶۴۹۱	۰,۲۳۷۹	-۰,۶۳۲۸
۹	---	---	---
۱۰	---	---	---

<sup>1</sup> Velocity Inversion

اهمیت عدد شرط یک ماتریس به وارون<sup>۲</sup> آن در هنگام حل یک دستگاه معادلات خطی وابسته به آن ماتریس، مربوط می‌شود. واضح است در هر حالتی که ماتریس غیر مربعی باشد، این وارون به صورت یک وارون تعمیم یافته<sup>۳</sup> شناخته می‌شود. هنگامی که وارون یک ماتریس به صورت عددی محاسبه می‌شود، همواره خطای گرد کردن<sup>۴</sup> وجود دارد و بنابراین بسط این خطای گرد کردن برای به دست آوردن جواب‌ها، بر دقت نتایج محاسبه شده تأثیر می‌گذارد. یک ماتریس منفرد، حداقل دارای یک مقدار منفرد صفر است و بنابراین عدد شرط آن بینهایت است. بالعکس اگر مقادیر منفرد یک ماتریس برابر باشند، آنگاه عدد شرط این ماتریس برابر با مقدار حداقل واحد خواهد بود. ماتریس‌های دارای این خاصیت را ماتریس ایزوتروپ<sup>۵</sup> می‌نامند. دلیل اینکه ماتریس‌های ایزوتروپ مطلوب هستند این است که وارون آنها به راحتی محاسبه می‌شود.

با توجه به اینکه ماتریس‌های ژاکوبین به ترکیب‌بندی روبات وابسته است، واضح است که عدد شرط ماتریس‌های ژاکوبین یک روبات نیز به ترکیب‌بندی آن وابسته است. بنابراین سازه یک روبات را می‌توان به گونه‌ای طراحی کرد که شامل موقعیت‌هایی که ماتریس ژاکوبین ایزوتروپ می‌شود، باشد. عدد شرط فقط برای موقعیت‌هایی که خیلی نزدیک به حالت‌های تکین هستند و باید در مسیر حرکت مجری نهایی از آن موقعیت‌ها اجتناب کرد، بسیار بزرگ می‌شود. برای روبات‌های موازی زمانی یک طرح ایزوتروپ نام می‌گیرد که هر دو ماتریس  $J$  و  $K$  ایزوتروپ باشند، به عبارت دیگر اگر دو عدد مثبت  $\tau$  و  $\sigma$  وجود داشته باشند، بطوریکه داشته باشیم:

$$JJ^T = \sigma^2 I_{3 \times 3} \quad (55)$$

$$KK^T = \tau^2 I_{3 \times 3} \quad (56)$$

عدد شرط یک ماتریس  $m \times n$  که  $m \leq n$  عبارتست از:

$$k = \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \quad (57)$$

که  $\sigma_m$  و  $\sigma_s$  به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقادیر منفرد آن ماتریس می‌باشد. بنابراین پراکندگی زیاد مقادیر منفرد، باعث به وجود آمدن عدد شرط بزرگ می‌شود.

با توجه به شکل ۱ سرعت نقطه  $P$  (مرکز مثلث متحرک) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{P} = \vec{V}_{Ai} + (\vec{V}_{Bi} - \vec{V}_{Ai}) + (\vec{P} - \vec{V}_{Bi}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (58)$$

که در آن  $V_{Bi}$  و  $V_{Ai}$  به ترتیب سرعت نقاط  $A$  و  $B$  می‌باشند. بعلاوه سرعت بین دو نقطه را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\vec{V}_{Bi} - \vec{V}_{Ai} = \dot{\theta}_i \mathbf{E} \vec{e} \quad (59)$$

که در آن  $\vec{e}$  بردار واحد از  $A_i$  تا  $B_i$  و  $\dot{\theta}_i$  نرخ تغییرات  $\theta_i$  است، اگر مفصل چرخشی باشد  $\mathbf{E} = a_i \mathbf{E}$  و اگر

$$e_i = \frac{d_i^2 + p_i^2 - l_1^2}{d_i} \quad (48)$$

$$f_i = \frac{d_i^2 + p_i^2 - l_1^2}{p_i} \quad (49)$$

### وارون‌سازی شتاب<sup>۱</sup>

هدف از وارون‌سازی شتاب آن است که با داشتن شتاب مجری نهایی، شتاب مفاصل محرک را محاسبه نماییم. رابطه بین شتاب مفاصل و شتاب کارترین با مشتق‌گیری از رابطه ۳۵ بدست می‌آید. در نتیجه خواهیم داشت:

$$J \dot{t} + \dot{J} t + K \ddot{p} + \dot{K} \dot{p} = 0 \quad (50)$$

که در این رابطه داریم:

$$\dot{t} = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{\phi}]^T \quad (51)$$

$$\ddot{p} = [\ddot{p}_1 \quad \ddot{p}_2 \quad \ddot{p}_3]^T \quad (52)$$

سایر پارامترها از وارون‌سازی سرعت بدست می‌آیند. مشتقات ماتریس‌های ژاکوبین هم با مشتق‌گیری مولفه‌های  $J$  و  $K$  نسبت به زمان حاصل می‌شود.

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 & \dot{b}_1 & \dot{c}_1 \\ \dot{a}_2 & \dot{b}_2 & \dot{c}_2 \\ \dot{a}_3 & \dot{b}_3 & \dot{c}_3 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\dot{K} = \text{diag}(\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3) \quad (54)$$

نکته قابل ذکر در زمینه وارون‌سازی سرعت و شتاب این است که برخی از پارامترها از سینماتیک معکوس محاسبه می‌شوند.

### طراحی ایزوتروپی

همانطور که گفته شد ارتباط بین سرعت محرک‌ها و سرعت نقطه کاری به صورت معادله ۳۵ می‌باشد. مفهوم ایزوتروپی روبات‌ها بر عدد شرط ماتریس یا ماتریس‌های ژاکوبین بنا شده است، در اینجا با استفاده از این مفهوم تحلیل ایزوتروپی روبات 3PRR انجام می‌گیرد.

مکانیزم کنترل دقت روبات وابسته به عدد شرط ماتریس ژاکوبین است. این موضوع در روبات‌های سری به عدد شرط ماتریس ژاکوبین  $J$  و در روبات‌های موازی به عدد شرط هر دو ماتریس ژاکوبین  $J$  و  $K$  وابسته است.

برای یک ماتریس  $A_{m \times n}$  که  $m < n$  است، می‌توان  $m$  مقدار منفرد نامنفی به صورت ریشه دوم مقادیر ویژه نامنفی ماتریس  $AA^T$  تعریف کرد. چون  $AA^T$  مربعی و متقارن و درایه‌های آن حقیقی است، مقادیر ویژه آن حقیقی و نامنفی خواهند بود. عدد شرط که یک مفهوم متداول برای همه ماتریس‌های مربعی و غیرمربعی است، بر مقادیر منفرد این ماتریس‌ها بنا شده است.

<sup>2</sup> Inversion

<sup>3</sup> Generalized Inversion

<sup>4</sup> Roundoff Error

<sup>5</sup> Isotrop

<sup>1</sup> Acceleration Inversion

$$(A_i B_i)^2 + ((A_i B_i) \mathbf{E} (B_i P) / L)^2 = \tau^2 \quad (68)$$

برای  $i \neq j$ :

$$\overrightarrow{A_i B_i}^T \overrightarrow{A_j B_j} + ((\overrightarrow{A_i B_i}^T \mathbf{E} \overrightarrow{B_i P}) (\overrightarrow{A_j B_j}^T \mathbf{E} \overrightarrow{B_j P}) / L)^2 = 0 \quad (69)$$

با استفاده از رابطه‌های ۶۸ و ۶۹ قیدهای مساله بدست می‌آیند که عبارتند از:

$$\overline{A_1 B_1} = \overline{A_2 B_2} = \overline{A_3 B_3} \quad (70)$$

$$\overline{B_1 P} = \overline{B_2 P} = \overline{B_3 P} \quad (71)$$

$$A_1 B_1^T A_2 B_2 = A_2 B_2^T A_3 B_3 = A_3 B_3^T A_1 B_1 \quad (72)$$

همچنین برای ایزوتروپ بودن ماتریس  $K$  با استفاده از رابطه ۵۶ داریم:

$$(A_1 B_1)^2 = (A_2 B_2)^2 = (A_3 B_3)^2 \quad (73)$$

با استفاده از معادلات ۶۸ تا ۷۱ طول مشخصه برای روبات 3PRR (شکل ۱) عبارتست از:

$$L = \sqrt{\frac{\overline{A_1 B_1}^T \overline{A_2 B_2}}{(\overline{A_1 B_1}^T \mathbf{E} \overline{B_1 P}) \cdot (\overline{A_2 B_2}^T \mathbf{E} \overline{B_2 P})}} \quad (74)$$

با توجه به قیدهای بدست آمده (رابطه ۷۰ تا ۷۳) شرایط ایزوتروپی روبات عبارتند از:

- ۱- محرک‌ها بر روی اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.
- ۲- مثلث متحرک نیز یک مثلث متوازی‌الاضلاع باشد.
- ۳- طول بازوهای ثابت  $(A_i B_i)$  در همه شاخه‌ها باید یکسان باشد.

۴- نقطه  $P$  که در مرکز سطح مثلث متحرک قرار دارد، باید در مرکز سطح مثلث ثابت نیز قرار داشته باشد.

با توجه به شرایط ذکر شده نقاط  $A_1, A_2, A_3$  باید رؤس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند. همانطور که در شکل ۵ مشخص شده، بی‌نهایت مثلث متساوی‌الاضلاع درون مثلث ثابت می‌توان رسم نمود، به‌طوری‌که رؤس آن بر روی اضلاع مثلث ثابت باشند. همچنین نقاط  $B_1, B_2, B_3$  نیز باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل دهند، به‌طوری‌که رؤس آن روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع  $A_1 A_2 A_3$  قرار داشته باشند. در نتیجه بی‌نهایت مثلث متساوی‌الاضلاع هم برای  $B_1 B_2 B_3$  می‌توان در نظر گرفت (شکل ۶). این بدین معناست که روبات 3PRR دارای ساختارهای (موقعیت‌های) ایزوتروپیک زیادی است. در تمام حالات مرکز سطح مثلث متحرک و مرکز سطح مثلث ثابت در یک نقطه واقع می‌شوند. بعلاوه بدلیل آنکه بی‌شمار مثلث با زوایای  $\varphi$  مختلف می‌توان رسم کرد، ثابت می‌شود که ایزوتروپی مستقل از زاویه  $\varphi$  می‌باشد.

با توجه به خاصیت ایزوتروپی می‌توان مثلاً  $l_1$  و  $l_3$  را پارامتر طراحی در نظر گرفت که این پارامترها با توجه به شرایط مورد نظر از جمله فضای کاری مطلوب و ... مشخص می‌گردند و متناسب با آن  $l_2$  برای ایزوتروپ بودن روبات تعیین می‌گردد.

مفصل لغزشی باشد  $\mathbf{E} = I$  خواهد بود که در آن  $I_{2 \times 2}$  ماتریس همانی است و  $a_i = \overline{A_i B_i}$  می‌باشد.  $E_{2 \times 2}$  ماتریس متعامدی است که هر بردار در صفحه را به اندازه ۹۰ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران می‌دهد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

رابطه سرعت نقطه  $P$  به شکل برداری بصورت زیر است:

$$\vec{P} = \vec{p}_i + \vec{\theta} \times \overline{A_i B_i} + \vec{\varphi} \times \overline{B_i P} \quad (61)$$

با استفاده از تعریف ماتریس  $E$  سرعت نقطه  $P$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{P} = \vec{p}_i + \vec{\theta} \mathbf{E} \overline{A_i B_i} + \vec{\varphi} \mathbf{E} \overline{B_i P} \quad (62)$$

در روابط فوق  $\vec{P}$  سرعت مرکز مثلث متحرک و  $\vec{p}_i$  سرعت مفصل محرک می‌باشند. به منظور حذف  $\vec{\theta}$  طرفین رابطه ۶۲ را از سمت چپ در بردار  $\overline{A_i B_i}^T$  ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\overline{A_i B_i}^T \vec{P} = (\overline{A_i B_i}^T) \vec{p}_i + (\overline{A_i B_i}^T) \vec{\varphi} \mathbf{E} (\overline{B_i P}) \quad (63)$$

$i = 1, 2, 3$

$$\overline{A_i B_i}^T \vec{P} - (\overline{A_i B_i}^T) \vec{\varphi} \mathbf{E} (\overline{B_i P}) - (\overline{A_i B_i}^T) \vec{p}_i = 0 \quad (64)$$

در نتیجه ماتریس‌های  $J$  و  $K$  عبارتند از:

$$J = \begin{bmatrix} \overline{A_1 B_1}^T & -(\overline{A_1 B_1}^T) \mathbf{E} (\overline{B_1 P}) \\ \overline{A_2 B_2}^T & -(\overline{A_2 B_2}^T) \mathbf{E} (\overline{B_2 P}) \\ \overline{A_3 B_3}^T & -(\overline{A_3 B_3}^T) \mathbf{E} (\overline{B_3 P}) \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$K = \begin{bmatrix} \overline{A_1 B_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{A_2 B_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A_3 B_3} \end{bmatrix} \quad (66)$$

هنگامی که محرک‌ها یکسان نباشند (به عنوان مثال بعضی از محرک‌ها لغزشی و بعضی دیگر چرخشی باشند) ابعاد ماتریس  $J$  همگن نخواهد بود، در این صورت می‌توان این ماتریس را به وسیله عبارتی به نام طول مشخصه [۸،۹] که اولین بار به وسیله تاندریسی<sup>۱</sup> و همکاران معرفی شد، باز تعریف کرد. در نتیجه ماتریس  $J$  به صورت زیر تبدیل می‌شود که  $L$  طول مشخصه می‌باشد:

$$J = \begin{bmatrix} \overline{A_1 B_1}^T & -(\overline{A_1 B_1}^T) \mathbf{E} (\overline{B_1 P}) / L \\ \overline{A_2 B_2}^T & -(\overline{A_2 B_2}^T) \mathbf{E} (\overline{B_2 P}) / L \\ \overline{A_3 B_3}^T & -(\overline{A_3 B_3}^T) \mathbf{E} (\overline{B_3 P}) / L \end{bmatrix} \quad (67)$$

برای آنکه طراحی روبات ایزوتروپ باشد هر دو ماتریس  $J$  و  $K$  باید ایزوتروپ باشند، یعنی باید ماتریس‌های ۶۷ و ۶۶ به ترتیب در روابط ۵۵ و ۵۶ صدق کنند، در نتیجه خواهیم داشت:

<sup>1</sup> Tandirci

Mechanism and Machine Theory”, Volume 43, Issue 5, Pages 591-616, 2008.

[3]- René V. Mayorga, Johnatan Carrera, Maria M. Ortiz, “A kinematics performance index based on the rate of change of a standard isotropy condition for robot design optimization Robotics and Autonomous Systems”, Volume 53, Issues 3-4, 31, Pages 153-163, 2005.

[4]- Grigore Gogu, “Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations”, European Journal of Mechanics A/Solids 23 , 1021-1039, 2004

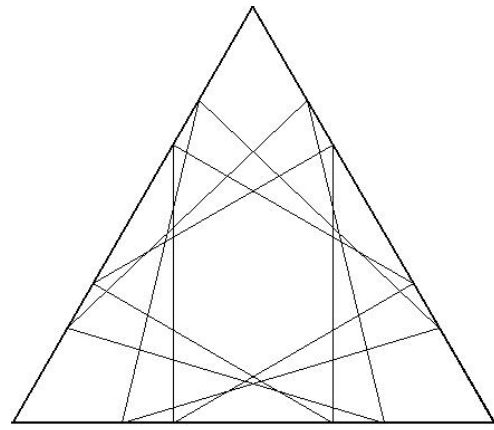
[5]- K.Y. Tsai a, K.D. Huang, “The design of isotropic 6-DOF parallel manipulators using isotropy generators”, Mechanism and Machine Theory 38 , pp 1199-1214, 2003.

[6]- K. Y. Tsai, K. D. Huang, “The design of isotropic 6-DOF parallel manipulators using isotropy generators” Mechanism and Machine Theory, Volume 38, Issue 11, Pages 1199-1214, 2003.

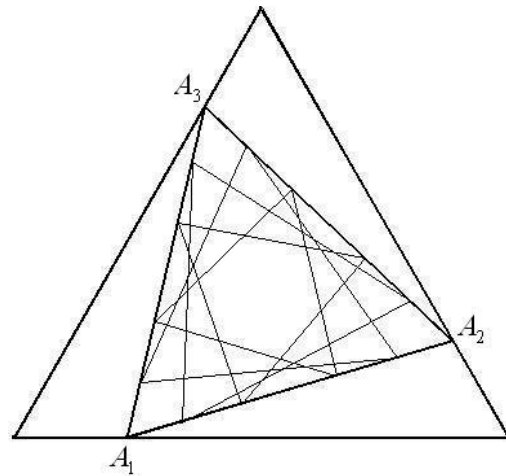
[7]- Meng-Shiun Tsai, Ting-Nung Shiau, Yi-Jeng Tsai, Tsann-Huei Chang, “Direct kinematic analysis of a 3-PRS parallel mechanism”, Mechanism and Machine Theory, Volume 38, Issue 1, Pages 71-83, 2003.

[8]- Gosselin, C. and Angeles, J., “The optimum Kinematic Design of Planar Three Degree of Freedom Parallel manipulator”, ASME J. of Mechanisms, Transmission, and Automaton in Design, Vol. 110, No. 1, pp. 35-41, 1988.

[9]- Tandirci, M., Angeles, J. and Ranjbaran, F, “The Characteristic Point and the Characteristic Length of Robotic Manipulators,” ASME Biennial Mechanisms Conference, Vol. 45, pp. 203-208, 1992.



شکل ۵: نمایش تعدادی از مثلث‌های  $A_1A_2A_3$  در مثلث ثابت



شکل ۶: نمایش تعدادی از مثلث‌های  $B_1B_2B_3$  در مثلث  $A_1A_2A_3$

### نتیجه‌گیری

در این مقاله سینماتیک مستقیم و معکوس ربات موازی 3PRR بررسی و روش بزوت که از دقت خوبی برای حل دستگاه معادلات غیرخطی برخوردار است معرفی و پاسخ‌های قابل قبول سینماتیک مستقیم با استفاده از آن بدست آمد. پس از معرفی مفهوم طول مشخصه مسأله طراحی ایزوتروپی ربات موازی 3PRR بر اساس ایزوتروپ بودن ماتریس‌های ژاکوبین بررسی شد و شرایط ایزوتروپ بودن ربات بدست آمد. ثابت شد که ربات 3PRR دارای ساختارهای ایزوتروپیک زیادی است و نیز ایزوتروپی مستقل از زاویه  $\varphi$  می‌باشد. با توجه به خاصیت ایزوتروپی می‌توان دو پارامتر را پارامتر طراحی در نظر گرفت و متناسب با آن پارامتر سوم (مثلاً  $l_2$ ) را برای ایزوتروپ بودن ربات محاسبه نمود.

### مراجع

- [1]- Angeles, J., “A Scale-Independent and Frame Invariant Index of Kinematic Conditioning for Serial Manipulators”, Paper Note, McGill University, Dep. of Mech.Eng.
- [2]- Sandipan Bandyopadhyay, Ashitava Ghosal, “An algebraic formulation of kinematic isotropy and design of isotropic 6-6 Stewart platform manipulators