سالیتونها و برگشت FPU

اسلامی، پروین؛ نوریان، زینب
گروه فیزیک دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

فرمی، پاستا و یولام با شبیه سازی یک زنجیر ۳۲ ذره ای غیر خطی، علی رغم انتظار رفتارهای آماری از سیستم مشاهده کردند که سیستم به حالت اولیه برمی گردد. این معما با در نظر گرفتن سیستم به صورت پیوسته وبا استفاده ازتوصیف سالیتونی حل شد. در این مقاله مساله فوق را برای شرایط اولیه مختلف شبیه سازی کرده و این برگشت را نشان داده ایم. سپس با درنظرگرفتن سیستم به صورت پیوسته و حل عددی معادله kdv تشکیل سالیتونها و برهمکنش آنهارا که نهایتا منجر به برگشت FPU می شود نشان داده ایم.

Solitons and FPU recurrence

Eslami, Parvin; Noorian, Zainab
Physics Department, Ferdowsi University, Mashhad

Abstract

Fermi-Pasta-Ulam (F.P.U) with simulating a nonlinear chain consisting of 32 particles, observed that system returns to its initial state, although it was expected to observe a statistical behavior for it, this problem was solved by considering the system as continuous one and using the soliton describtion. In this paper we have simulated the above problem and have shown this recurrence for various initial conditions .Next, by considering the system as a continuous one and solving kdv equation, numerically, we have shown the solitons formation and their interaction, which finally yields to F.P.U recurrence .

مقدمه

در سال ۱۹۵۵ اولین شبیه سازی عددی برای بررسی رفتارسیستمهای غیر خطی توسط فرمی، پاستا و یولام (F.P.U) انجام شد [۱]. قبلا فرمی روی پدیده های آماری کار کرده بود و به این نتیجه رسیده بود که:

اولا برای اینکه سیستمی رفتار آماری داشته باشد کافی است که ارگودیک باشد. (درسیستم ارگودیک در زمانهای طولانی نقطه نمایش یک دستگاه منزوی به طور دلخواه به هر نقطه معینی بر روی سطح انرژی نزدیک خواهد شد. در پدیده های تصادفی استفاده از فرضیات ارگودیک اجتناب نا پذیر است) ثانیا در سیستمی با تعداد درجات آزادی زیاد، هر برهمکنش غیر خطی ضعیف بین ذرات باعث می شود که سیستم رفتار ارگودیک از خود نشان دهد.

بنابراین به نظر می رسد در سیستمی با تعداد زیادی ذره که باهم برهمکنش غیر خطی دارند، با گذشت زمان انتظار مشاهده رفتارهای آماری مانند رسیدن سیستم به تعادل گرمایی یا برقراری اصل همپاری انرژی داشته باشیم[۲].

F.P.U به منظور شبیه سازی یک کریستال غیر خطی و بررسی این سیستم مدلی شامل ۳۲ ذره به جرم واحد در نظر گرفتند که با فنرهایی بدون جرم با ثابت k به هم متصل شده و ذرات مجاوردر این زنجیر با هم برهمکنش غیر خطی دارند. به این معنی که برای ذره ای با جابجایی ΔL نیروی غیر خطی $K\Delta L+\alpha(\Delta L)^2$ را

داریم که جمله $\alpha(\Delta L)^2$ تصحیح غیرخطی قانون هوک برای این مساله می باشد.

۱. فرمولبندی مساله :

الف) حالت گسسته

مدل شبیه سازی شده زنجیری یک بعدی شامل N ذره به جرم واحد است که ذرات مجاور با هم برهمکنش غیر خطی دارند. این برهمکنش را با اضافه کردن اولین تصحیح غیر خطی به یک نیروی خطی با ثابت k=1 تعریف می کنیم که هامیلتونی آن عبارت است از [۳]:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} p_i^{\,2} + \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2}(u_{i+1}-u_i)^2 + \frac{\alpha}{3}\sum_{i=0}^{N}(u_{i+1}-u_i)^3$$

جمله درجه سوم در این هامیلتونی برهمکنش غیر خطی را نشان می دهد که α میزان قدرت این برهمکنش می باشد.

معادله حرکت برای ذره i ام:

$$\ddot{u}_i = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \alpha\left[(u_{i+1}-u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2\right]$$

.که u_i جابجایی ذره i ام نسبت به مکان تعادل آن است.

در غیاب نیروهای غیر خطی با نوشتن u_i بر حسب مدهای بهنجار سیستم می توان نوشت [٤]:

$$u_i = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\left(\frac{ik\pi}{N+1}\right)$$

$$\omega_k^{\,2} = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)$$

اکنون هامیلتونی سیستم غیر خطی را برحسب مختصات بهنجار سیستم خطی A_k بازنویسی می کنیم:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\dot{A}_k^{\,2} + \omega_k^{\,2} A_k^{\,2}\right) + \frac{\alpha}{3}\sum_{k,l,m=1}^{N} c_{klm} A_k A_l A_m \omega_k \omega_l \omega_m$$

جمله اخیر در هامیلتونی بالا مشارکت قسمت غیر خطی پتانسیل در هامیلتونی است که به صورت جفت شدگی مدهای مختلف نمایان شده است.

برای حالت $(\alpha \neq 0)$ به علت حضور این جمله، انتظار داشتند که انرژی ذخیره شده در مد اولیه با گذشت زمان به سایر مدها منتقل شود تا نهایتا به اصل همپاری (تقسیم مساوی انرژی بین همه درجات آزادی سیستم) برسند.

نتایج این محاسبات عددی برای سیستمی که در ابتدا در اولین مد بهنجار خودقرار داشت نشان داد که هر چند درآغاز سایر مدهای سیستم برانگیخته می شوند ولی با گذشت زمان بر خلاف پیش بینی های مکانیک آماری در t=157 T1 (T1 دوره تناوب مد اولیه) تقریبا همه انرژی به مد اولیه برمی گردد.

این نتیجه جالب، معمای FPU بود و نشان می داد که حضور نیروهای غیر خطی در سیستم، لزوما منجر به رسیدن سیستم به اصل همپاری و نتایج آماری نمی شود. سیستمهای غیرخطی تر (α های بزرگتر) در زمان کوتاهتری به حالت اولیه برمی گشتند.

ب) حالت پیوسته

برای بررسی این معمای جالب کوششهای مختلفی صورت گرفت. در سال ۱۹٦٥ زابوسکی و کروسکال [٥] برای حل این معما محاسبات کامپیوتری مشابهی انجام دادند. در نظر گرفتن زنجیری پیوسته از ذرات، نتایج بدست آمده برگشت FPU را به خوبی توسط مدل سالیتونی توصیف می کرد.

در این شبیه سازی سیستم را به صورت یک ریسمان غیر خطی پیوسته در نظر گرفتند و دریافتند که برای دامنه های کوچک نوسانات ریسمان FPU پیوسته به خوبی توسط معادله kdv توصیف می شود.

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

معادله kdv دسته از امواج غیر خطی با دامنه های کوچک را در محیط هایی با پراکندگی ضعیف، توصیف می کند.

در این محاسبات به جای بررسی مد های بهنجار، جابجایی ها در فضای حقیقی در نظر گرفته شد و نشان دادند که با گذشت زمان در این ریسمان سالیتونها تشکیل می شوند. این سالیتونها جوابهای جایگزیده معادله kdv بودند که با دامنه ها و سرعت های متفاوت (در این سالیتونها سرعت با دامنه متناسب است) حرکت می کردند و با هم برخورد می کردند بدون آنکه تغییری در شکل یا سرعت آنها ایجاد شود. نتیجه این برهمکنشها برگشت FPU است.

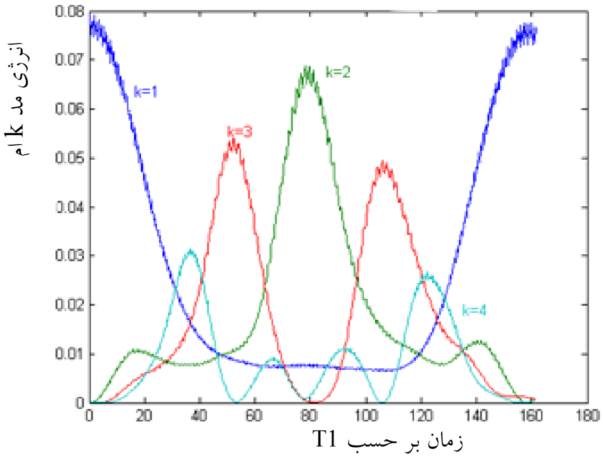
۲. برگشت FPU و ارتباط آن با شرایط اولیه:

در این مقاله با استفاده از نرم افزار MATLAB و شبیه سازی FPU گسسته نشان داده ایم که اگر در ابتدا سیستم در هریک از مدهای بهنجار خود قرار گرفته باشد، دوباره به حالت اولیه بر می گردد و این برگشت تناوبی است.

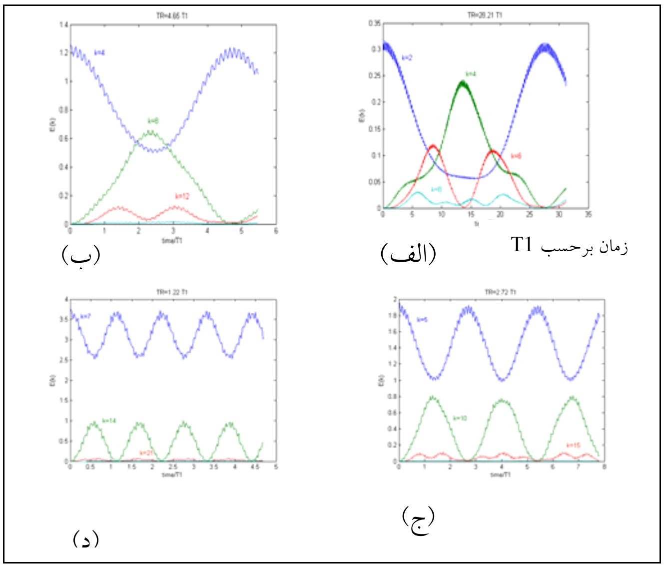
با در نظر گرفتن روابط زیر به عنوان شرایط اولیه سیستم زمانیکه در ابتدا در مد k ام قرار گرفته است، زمانهای برگشت را محاسبه کرده ایم.

$$u_i(0) = a\sin\left(\frac{ik\pi}{N+1}\right), \frac{du_i(0)}{dt} = 0$$

برای k=1 به ازای $\alpha = 0.25, a = 1$ محاسبات ما برگشت را در t=161.5 T1 نشان می دهد که در توافق خوبی با نتایج FPU است (شکل ۱).



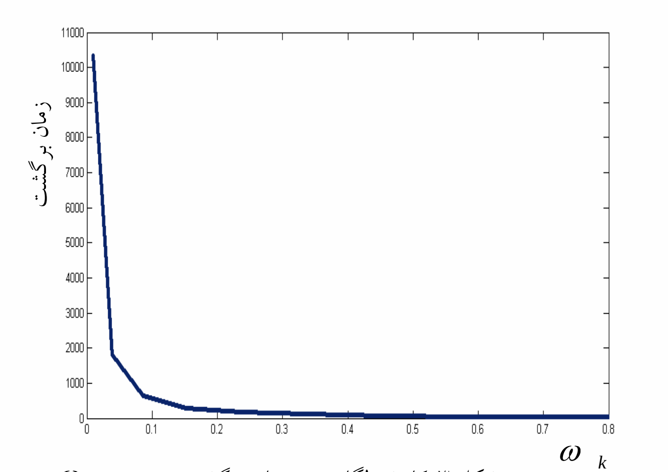
شکل ۱: توزیع انرژی بر حسب زمان برای $(\alpha = 0.25)$.



شکل ۲: توزیع انرژی مد k ام بر حسب زمان T1 برای مدهای ۱ و ۲ و ۳ و ٤.

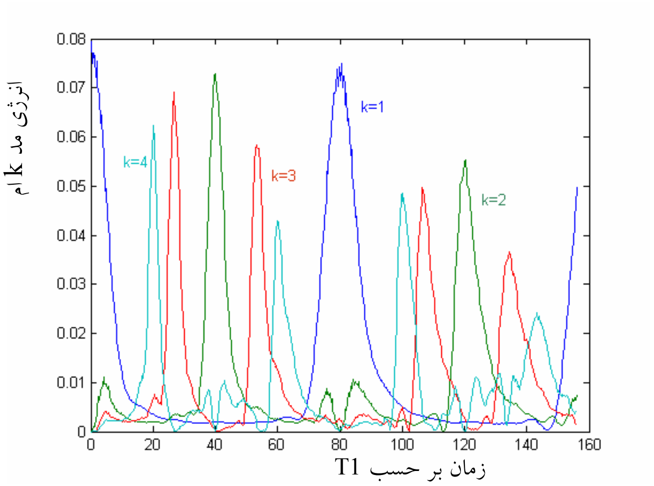
در شکل ۲: (الف) سیستم ابتدا در مد دوم قرار داشته با گذشت زمان مدهای ٤ و ٦ و ۸ هم برانگیخته می شوند و نهایتا در سیستم t=28.21 T1 انرژی تماما به مد دوم برمی گردد. (ب) در ابتدا در مد چهارم بوده با برانگیخته شدن مدهای ۸ و۱۲ در t=4.65 T1 سیستم به حالت اولیه برمی گردد. (ج) در ابتدا سیستم در مد پنجم بوده با برانگیخته شدن مدهای ۱۰ و۱۵ در t=2.72 T1 سیستم به حالت اولیه برمی گردد. (د) در ابتدا سیستم در مد هفتم بوده با برانگیخته شدن مدهای ١٤و ۲۱ در t=1.22 T1 سیستم به حالت اولیه برمی گردد.

به همین ترتیب برگشت را برای سایر مدها هم بدست آورده ایم ونشان داده ایم که چنانچه سیستم در حالت اولیه ای با مدهای بالاتر برانگیخته شود سریعتر بر می گردد (شکل ۳).



شکل ۳: کاهش لگاریتمی زمان برگشت بر حسب ω_k.

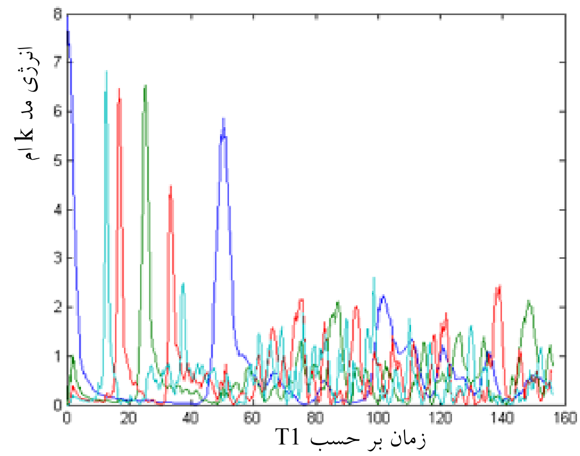
همچنین با افزایش قدرت غیر خطی (α های بزرگتر) سیستم در زمان کوتاهتری به حالت اولیه برمی گردد (شکل ٤).



شکل ٤: توزیع انرژی بر حسب زمان برای $(\alpha = 1)$ که در t=79.03 T1 سیستم به مد اولیه برگشته است.

در شبیه سازی FPU شرایط اولیه در زیر آستانه پدیده های تصادفی انتخاب شده بود. با انتخاب دامنه های بزرگتر می توان نشان داد که نهایتا سیستم کاملا در این حالت

خصوصیات آماری از خود نشان می دهد و بدون داشتن برگشت FPU، انرژی بین همه مدهای بهنجار سیستم به صورت یکسان تقسیم می شود و به تعادل ترمودینامیکی می رسد (شکل ۵).

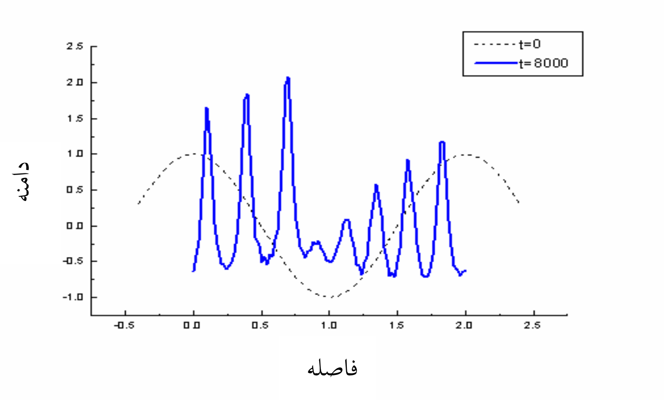


شکل۵ : توزیع انرژی بر حسب زمان برای $a = 10$.

۳. برگشت FPU و ارتباط آن با معادله kdv:

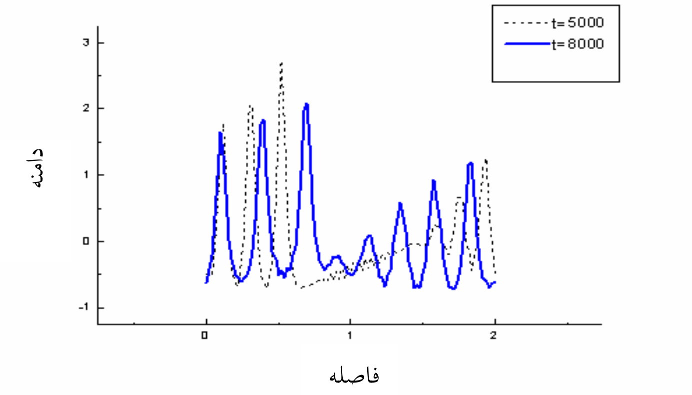
در این قسمت از نرم افزار فرترن برای حل عددی معادله kdv بـه روش رانگ کوتای مرتبه چهار، استفاده کرده ایم. با انتخاب شرایط اولیه غیر موضعی به شکل یـک مـوج تخـت $u(0)=\cos(\pi x)$ و برای $\delta = 0.022$ تحول سیستم را بررسی کردیم.

در لحظه t=0 شرایط اولیه ودر لحظه t=8000 تشکیل سالیتونها را نشان می داده ایم (شکل ٦).

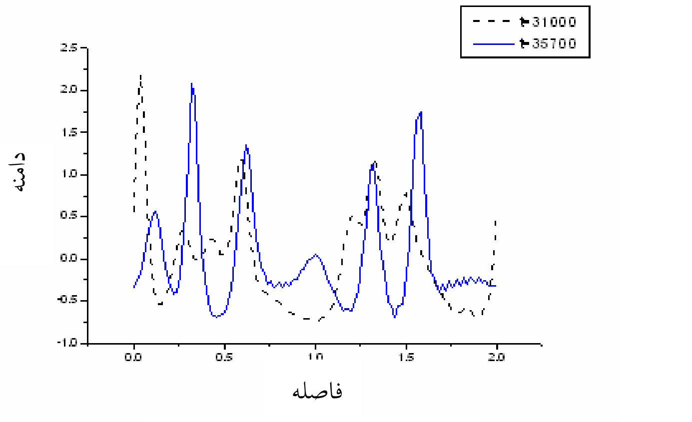


شکل ٦: دامنه $u(x)$ بر حسب فاصله

موقعیت سالیتونها در دو لحظه t=5000 و t=8000 را نشان داده ایم که حرکت سالیتونها و وابستگی سرعت سالیتون به دامنه مشهود است (شکل ۷). در لحظه t=31000 سالیتونها برهمکنش غیر خطی دارند و در t=35700 دوباره ظاهر می شوند در حالی که سرعت وشکل خود را حفظ کرده اند (شکل ۸).



شکل ۷: حرکت سالیتونها.



شکل ۸ : برهمکنش سالیتونها.

نتیجه این برهمکنشها و پایداری سالیتونها در این برخوردهای غیرخطی، بازگشت سیستم به حالت اولیه است. بدین صورت می توان با در نظر گرفتن مدل سالیتونی برگشت FPU را توضیح داد.

مرجع ها

[۱] Fermi E., Pasta J., Ulam S., Los Alamos report LA-1940, published later in Collected Papers of Enrico Fermi, E. Segr´e (Ed.), University of Chicago Press (1965) .

[۲] G. P. Berman and F. M Izrailev, The Fermi-Pasta-Ulam problem Fifty years of pgrogress, Chaos 15, 015104, 2005.

[۳] Nizan Z. Klinghoffer, A Review of the FPU Problem and the Kdv Equation March 5, 2006.

[۴] B.Marion, Stephaen T.Thornton , *Classical Dynamics; Of Particles & Systems* 3rd.ed 1988 , sec.11,12.

[۵] Zabusky N. J., Kruskal M. D., Phys. Rev. Lett. 15, 240-243 (1965).