



کنترل حالت لغزشی مرتبه بالای سیستمهای غیر خطی با بهره سوئیچینگ تطبیقی

علی کریمی ملایی^۱، ناصر پریز^۲، حسن مدیر شانه چی^۳

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد (akarami@wali.um.ac.ir)

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد (n-pariz@um.ac.ir)

^۳ استاد باز نشسته دانشگاه فردوسی مشهد، مشغول به تدریس در دانشگاه ایلینویز آمریکا (shanechi@iit.edu)

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۶/۳۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۱۲/۲)

چکیده: در این مقاله، کنترل سیستمهای غیر خطی با روش حالت لغزشی مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از بهره سوئیچینگ تطبیقی و فیدبک حالت خطی و تعریف یک سطح لغزشی تناسبی-انتگرالی، روش جدیدی ارائه شده است که قابل اعمال بر روی سیستمهای تک ورودی-تک خروجی می باشد. هدف، سنکرون سازی خروجی سیستم تک ورودی-تک خروجی و مشتقات آن تا مرتبه ای مشخص، با یک سیستم خطی با مشخصات دلخواه است. مهمترین خصوصیت روش ارائه شده این است که برخلاف روشهای دیگر، در این روش به کران بالای نامعینی ها و عدم قطعیتهای سیستم نیازی نیست و در عین حال بهره سوئیچینگ مطابق با شرایط سیستم افزایش و کاهش می یابد. بنابراین با ترکیب کنترل لغزشی مرتبه بالا و بهره سوئیچینگ تطبیقی وزوز حذف خواهد شد. در نهایت، روش پیشنهادی برای سنکرون سازی سیستمهای آشوبی استفاده شده است.

کلمات کلیدی: کنترل حالت لغزشی مرتبه بالا، کنترل سیستمهای غیر خطی، کنترل تطبیقی، وزوز.

Higher Order Sliding Mode Control of Nonlinear Systems with Adaptive Switching Gain

Ali Karami-Mollaei, Naser Pariz, Hasan Shanechi

Abstract: In this paper, we present a new method for designing higher order sliding mode controller (HOSMC) with adaptive switching gain by defining a new PI sliding surface and employing a linear state feedback. The objective is to force the outputs of a nonlinear SISO system and their derivatives up to a certain order, track the states of a linear system with desired properties. The main property of proposed controller is that it does not need an upper bound for the uncertainty and moreover, the switching gain increases and decreases according to the system circumstances by employing an adaptation procedure. Then, chattering is removed completely by using the HOSMC with a small switching gain. Finally, we have used the proposed method to control and synchronize of chaotic uncertain systems.

Keywords: Higher order sliding mode control, nonlinear systems, chattering, adaptive control.

طراحی شده بر روی سیستمهای حقیقی را با مشکل مواجه می کنند [۲،۳،۴]. مهمترین دلیل توجه به کنترل حالت لغزشی، خاصیت تغییر ناپذیری آن است. تغییر ناپذیری خصوصیت و معیاری است قویتر از مقاوم بودن [۴]. از طرفی، مهمترین ایراد کنترل حالت لغزشی، وزوز می باشد. وزوز عبارت است از نوسانهای فرکانس بالا (ولی محدود) با دامنه کم، که موجب تلفات حرارتی در مدارهای قدرت و استهلاک قطعات

۱- مقدمه

در دهه های اخیر، تلاشهای قابل ملاحظه ای برای کنترل سیستمهای غیر خطی با روش حالت لغزشی انجام شده است [۱]. در این مدت نشان داده شده است که کنترل حالت لغزشی، روش مناسبی برای مقابله با نامعینی های ساختار یافته و ساختار نیافته، اغتشاش و نویز می باشد. واضح است که این عوامل، همواره تحقق کنترل کننده های

مکانیکی می شود [۵]. وزوز در اثر تحریک و نوسانی شدن دینامیکهای فرکانس بالای مدل نشده و یا ناشناخته سنسورها، محرکها و یا خود سیستم بوجود می آید [۳،۶،۷]. به طور کلی این دینامیکها به دو دلیل تحریک شده و نوسانی می شوند: استفاده از بهره بزرگ در کنترل کننده و سوئیچینگ سیگنال کنترل ورودی [۱].

پنج روش برای کاهش و یا حذف اثر وزوز پیشنهاد شده است: روش لایه مرزی، لایه مرزی تطبیقی، روش مبتنی بر روتگر، روشهای هوشمند و روش مرتبه بالا. هر چند که در روشهای لایه مرزی و لایه مرزی تطبیقی خاصیت تغییر ناپذیری سیستم از بین می رود، ولی دلیل توجه به این روشها این است که در آنها سوئیچینگ سیگنال کنترل ورودی کاهش یافته و یا حذف می شود [۸]. اما مشکل مهمتر این دو روش، استفاده از بهره بزرگ در داخل لایه مرزی می باشد [۲،۹]. این بهره بزرگ باعث ناپایداری در داخل لایه مرزی شده که این پدیده همان وزوز است [۱،۷]. در روشهای مبتنی بر روتگر، وزوز به طور کامل حذف می شود [۱،۳]. ولی در این روشها نیز خاصیت تغییر ناپذیری سیستم از بین می رود زیرا در این روشها، حالتیهای تخمین زده شده به سمت سطح لغزش سوق داده می شوند نه حالتیهای خود سیستم. به عبارت دیگر، به دلیل مجانبی بودن پایداری روتگر، نه تنها خاصیت تغییر ناپذیری از بین خواهد رفت بلکه ممکن است خاصیت مقاوم بودن سیستم حلقه بسته نیز کاهش یابد [۱،۱۰]. بنابراین، برای پیاده سازی کنترل حالت لغزشی روشهای هوشمند مورد توجه قرار گرفته اند [۱۱،۱۲]. به هر حال تواناییهای روشهای هوشمند بر هیچ محقق پوشیده نیست ولی این روشها نیز نمی توانند بر طرف کننده نیاز به یک روش تحلیلی مدون مبتنی بر روشهای غیر خطی باشند [۱۳].

با توجه به توضیحات بیان شده، کنترل حالت لغزشی مرتبه بالا برای حذف کامل وزوز پیشنهاد شده است [۱۴،۱۵]. در این روش، سوئیچینگ به مشتقات بالاتر سیگنال کنترل ورودی منتقل می شود [۳،۱۴،۱۵]. الگوریتمهای زیادی برای پیاده سازی کنترل حالت لغزشی مرتبه دو پیشنهاد شده است [۱۵،۱۶]. اما همانطور که بیان شد، وزوز فقط با حذف سوئیچینگ از سیگنال کنترل ورودی حذف نخواهد شد. به عنوان مثال، در مراجع [۱۷،۱۸] نشان داده شده است که امکان بروز وزوز در الگوریتم power-fractional (که در [۱۹] پیشنهاد شده است) و در الگوریتم super-twisting (که در [۱۵] پیشنهاد شده است) وجود دارد زیرا، در هر دو روش از بهره کنترل کننده نامحدود استفاده می شود [۱۷،۱۸]. بنابراین به وضوح دیده می شود برای حذف وزوز، پارامتر دیگری که باید در پیاده سازی کنترل کننده حالت لغزشی مورد

نظر قرار گیرد، کاهش بهره سوئیچینگ است. یک روش برای کاهش این بهره، استفاده از روشهای تطبیقی است. در این مقاله، روشی پیشنهاد شده است که در آن، کنترل حالت لغزشی مرتبه بالا با بهره سوئیچینگ تطبیقی قابل پیاده سازی است. در این روش بهره سوئیچینگ مطابق با شرایط سیستم افزایش و کاهش می یابد. بنابراین در روش پیشنهادی، عوامل ایجاد وزوز حذف شده اند. زیرا از طرفی، به دلیل استفاده از روش مرتبه بالا سیگنال کنترل ورودی بدون سوئیچینگ بوده و از طرف دیگر به دلیل تطبیقی، بهره سوئیچینگ بزرگ نخواهد بود. بنابراین، عواملی که باعث تحریک و نوسانی شدن دینامیکهای مدل نشده می شوند، وجود نخواهند داشت. خصوصیت دیگر روش پیشنهادی این است که بر خلاف روشهای دیگر، در این روش به کران بالای نامعینی های سیستم نیازی نیست. به علاوه همانطور که کنترل حالت لغزشی بهینه در [۲۰] بررسی شده است، در روش پیشنهادی، با انتخاب مناسب پارامترها، شرایط بهینه بودن نیز حصول خواهد شد.

سیستمهای آشوبی، غیر خطی و بسیار پیچیده بوده و رفتار آنها دارای خواص ویژه ای است. به عنوان مثال، پاسخ آنها به شدت وابسته به شرایط اولیه بوده و دارای تبدیل فوری ای با طیف فرکانسی بسیار گسترده هستند. به علاوه رفتارهای کسری از خود نشان می دهند [۲۱،۲۲]. با وجود این پیچیدگی ها، به دلیل اینکه پدیده های آشوبی به وفور در سیستمهای طبیعی مشاهده می شوند، الگوریتمهای زیادی برای کنترل و همزمان سازی آنها پیشنهاد شده اند. آشوب در پدیده های شیمیایی، مبدلهای قدرت، سیستمهای زیست-محیطی، پردازش اطلاعات، مخابرات امن و ... مشاهده می شود [۲۲]. پیچیدگی سیستمهای آشوبی، خاصیت تغییر ناپذیری کنترل حالت لغزشی و عملکرد مناسب این روش در صورت حذف اثر وزوز، انگیزه ای است برای کنترل این سیستمها با روش حالت لغزشی. در این مقاله، روش پیشنهادی، برای کنترل و همزمان سازی سیستم آشوبی دافینگ-هولمز (Duffing-Holmes) استفاده شده است [۲۳].

این مقاله بر این اساس سازماندهی شده است: در بخش دوم، صورت مساله کنترل کننده مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش سوم روش پیشنهادی ارائه شده و در بخش چهارم، بهره سوئیچینگ تطبیقی پیشنهادی بررسی می شود. در بخش پنجم، نحوه انتخاب پارامترها برای بهینه شدن روش پیشنهادی توضیح داده می شود. بخش ششم، به شبیه سازی روش پیشنهادی در بخشهای ۳، ۴ و ۵ اختصاص داده شده است. در نهایت در بخش هفتم، نتیجه گیری ارائه خواهد شد.

$$Y_d = [y_d, y_d^{(1)}, \dots, y_d^{(\rho-1)}]^T \quad (4)$$

$\rho \geq r$ بوده و در حالت کلی عناصر بردار سطری F متغیر با زمان می باشند.

$$F = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_\rho(t)] \quad (5)$$

تعریف: خروجی سیستم (۲) را در نظر گرفته و فرض کنید سیستم دارای فیدبک دینامیکی حلقه بسته ای به صورت ناپیوسته است. به علاوه با وجود این فیدبک ناپیوسته، توابع $h^{(i)}: R^n \times R^+ \rightarrow R: i = 0, 1, \dots, \rho-1$ پیوسته باشند. آنگاه

$$H^\rho = \{X | h(X, t) = \dot{h}(X, t) = \dots = h^{(\rho-1)}(X, t) = 0\} \quad (6)$$

مجموعه لغزشی مرتبه ρ نامیده می شود. این مجموعه غیر تهی بوده و به صورت فیلپوف (Filippov) و محلی یک مجموعه انتگرال پذیر است [۲۷]. اگر حالت‌های سیستم در مجموعه H^ρ قرار گیرند، آنگاه نسبت به خروجی h ، کنترل حالت لغزشی مرتبه ρ خواهیم داشت [۲۴، ۲۵]. در این حالت، با مشتق گیری از خروجی h به معادله زیر دست خواهیم یافت [۲۶].

$$y^{(\rho)} = \varphi(X, U, t) + \gamma(X, U, t)u^{(\rho-r)} \quad (7)$$

در این معادله $U = [u, \dot{u}, \dots, u^{(\rho-r-1)}]^T$ بوده و φ و γ توابع ناشناخته کراندار می باشند. این کرانها می توانند مشخص و یا نامشخص باشند. به علاوه فرض کنید $\gamma \neq 0: \forall t \geq 0$. به طور کلی، این فرضها محدود کننده نیستند [۲۴، ۲۵، ۲۰، ۱۵، ۱۴]. بنابراین، در کنترل حالت لغزشی مرتبه ρ ، سیگنال $u^{(\rho-r)}$ می تواند ناپیوسته باشد ولی زمان رسیدن به سطح لغزشی باید محدود باشد [۲۴-۲۶].

۳- طراحی کنترل کننده

ابتدا متغیرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$Y = [y, y^{(1)}, \dots, y^{(\rho-1)}]^T \quad (8)$$

$$e = y - y_d \quad (9)$$

$$E = [e, e^{(1)}, \dots, e^{(\rho-1)}]^T \quad (10)$$

۲- تشریح صورت مساله

کنترل حالت لغزشی دارای سه مرحله است: مرحله رسیدن به سطح (زمان لازم برای برخورد به سطح)، مرحله لغزش (زمان لازم برای لغزش بر روی یک سطح پایدار) و مرحله ماندگار (مبدا مختصات). به منظور حفظ خاصیت تغییر ناپذیری در مراحل لغزش و ماندگار و تضمین رسیدن به سطح در زمان محدود، استفاده از قانون رسیدن زیر الزامی است [۴]:

$$\dot{s} = -\eta \text{sign}(s) \quad (11)$$

در این معادله η عدد مثبتی است که به اندازه کافی بزرگ می باشد. واضح است که استفاده از این تابع علامت، سوئیچینگ با دامنه η تولید می کند. پارامتر η بهره سوئیچینگ نام دارد. بنابراین، برای حذف وزوز باید به دو عامل زیر توجه شود [۱۰]:

۱. حذف اثر سوئیچینگ حاصل از تابع علامت، از سیگنال کنترل ورودی.
۲. کاهش دامنه سوئیچینگ حاصل از تابع علامت، یعنی کاهش بهره سوئیچینگ η .

در این مقاله، روشی پیشنهاد می شود که هر دو خصوصیت فوق را داراست. برای داشتن هر دو خصوصیت، از ترکیب کنترل حالت لغزشی مرتبه بالا و بهره سوئیچینگ تطبیقی استفاده شده است. سیستم غیر خطی متغیر با زمان تک ورودی-تک خروجی غیر افین زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X, u, t) \\ y &= h(X, t) \end{aligned} \quad (12)$$

در این معادله u سیگنال کنترل ورودی بوده و $X = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ بردار حالت سیستم است. فرض بر این است که خروجی $h(X, t)$ هموار بوده و مشتقات آن تا مرتبه $(\rho-1)$ در دسترس است. به علاوه، درجه نسبی خروجی ρ نسبت به ورودی u ، یعنی r ، مشخص و ثابت است و دینامیکهای صفر مربوطه نیز پایدار می باشند [۲۴، ۲۵، ۲۶]. هدف از طراحی کنترل کننده این است که خروجی این سیستم و مشتقات آن تا مرتبه $(\rho-1)$ ، حالت‌های سیستم زیر را به عنوان یک سیستم مرجع دلخواه تعقیب نمایند.

$$y_d^{(\rho)} = F Y_d + v_d \quad (13)$$

که v_d سیگنال کنترل ورودی بوده و Y_d بردار حالت است.

$$\dot{s} = \sigma v - \sigma v_d + \sigma W - KE - \xi \quad (17)$$

بر مبنای این تعریفها روابط زیر را خواهیم داشت:

متغیر σ را می توان برای رسیدن به اهداف خاصی تعیین نمود، هر چند که در این مقاله انتخاب ما به صورت زیر است.

$$\sigma = 1 \quad (18)$$

بنابراین،

$$\dot{s} = v - v_d + W - KE - \xi \quad (19)$$

سیگنال کنترل ورودی $v(t)$ از دو قسمت تشکیل شده است. یک قسمت که کنترل معادل نام دارد، در مرحله لغزش یعنی هنگامی که حالتها ی خطا روی سطح باشند وارد عمل می شود. قسمت دوم به صورت ناپیوسته بوده و برای حذف اثر نامعینی W در این مرحله استفاده می شود [۴-۱]. بنابراین، قسمت اول یعنی v_{eq} ، از معادله $\dot{s} = 0$ و با شرط $W = 0$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$v_{eq} = KE + v_d + \xi \quad (20)$$

با قرار دادن v_{eq} در معادله (۱۹) و در حالت $W = 0$ ، معادله دینامیکی زیر را در مرحله لغزش خواهیم داشت:

$$e^{(\rho)} = FE + KE + \xi = (F + K)E + \xi \quad (21)$$

معادله (۲۱) بیانگر دینامیک خطای سیستم در مرحله لغزش است. بنابراین، بردار $K(t)$ و سیگنال $\xi(t)$ را باید طوری انتخاب نمود که این معادله پایدار باشد.

ابتدا فرض کنید $\xi(t) = 0$ باشد، اگر $K(t)$ را به صورت

زیر انتخاب نماییم:

$$\begin{aligned} k_i(t) &= m_i - a_i(t) : i = 1, 2, \dots, \rho \\ M &= [m_1, \dots, m_\rho] \\ K(t) &= M - F(t) \end{aligned} \quad (22)$$

آنگاه، سیستم خطی با ضرایب ثابت زیر را خواهیم داشت:

$$e^{(\rho)} = ME \quad (23)$$

این سیستم را می توان با انتخاب مناسب عناصر بردار سطری M پایدار نمود. توجه نمایید که در این حالت، پایداری معادله (۲۳) به صورت مجانبی است.

$$\begin{aligned} e^{(\rho)} &= y^{(\rho)} - y_d^{(\rho)} = \varphi + \gamma u^{(\rho-r)} - FY_d - v_d = \\ &= \varphi + \gamma u^{(\rho-r)} - FY_d - v_d + FY - FY + v - v + u^{(\rho-r)} - u^{(\rho-r)} = \\ &= FE + v - v_d + (\varphi + \gamma u^{(\rho-r)} - u^{(\rho-r)}) + (u^{(\rho-r)} - FY - v) \end{aligned} \quad (11)$$

اکنون فیدبک حالت خطی زیر را تعریف می نماییم:

$$u^{(\rho-r)} = FY + v \quad (12)$$

و با تعریف متغیر:

$$W = (\varphi + \gamma u^{(\rho-r)} - u^{(\rho-r)}) \quad (13)$$

به معادله زیر می رسم:

$$e^{(\rho)} = FE + v - v_d + W \quad (14)$$

که v سیگنال کنترل ورودی جدیدی است و آن را با روش کنترل حالت لغزشی بدست خواهیم آورد. به علاوه، نامعینی W در راستای ورودی v بوده و می توان اثر آن را با تعیین مناسب v حذف کرد. این نوع نامعینی را سازگار (matched) می نامند [۲۸].

حال، هدف از طراحی کنترل کننده این است که سیگنال ورودی $v(t)$ را طوری تعیین نماییم که حالتها ی سیستم (v) یعنی Y ، حالتها ی سیستم (3) یعنی Y_d را دنبال نمایند، و یا به عبارت دیگر، دینامیکهای خطای معادله (۱۴) به صفر همگرا شوند. برای رسیدن به این هدف، سطح لغزشی تناسبی-انتهگالی جدیدی به صورت زیر تعریف می نماییم:

$$s(t) = \sigma e^{(\rho-1)}(t) - \int_0^t ([\alpha F(\tau) + K(\tau)]E(\tau) + \xi(\tau)) d\tau \quad (15)$$

که بردار $K(t)$ و سیگنال $\xi(t)$ پارامترهای طراحی بوده و روش تعیین آنها را بیان خواهیم نمود. مشتق معادله سطح لغزشی به صورت زیر است.

$$\dot{s} = \sigma e^{(\rho)} - \alpha FE - KE - \xi \quad (16)$$

اکنون با استفاده از معادله (۱۴) خواهیم داشت:

$$V(t) = \frac{1}{2} S_e^2 \quad (۲۹)$$

مشتق $V(t)$ نسبت به زمان برابر است با:

$$\dot{V} = S_e \dot{S}_e = -\eta_e |S_e| \quad (۳۰)$$

این مشتق معین-منفی است. با انتگرال گیری از معادله (۳۰)، معادله (۲۵) ثابت خواهد شد (به اثبات قضیه ۲ مراجعه نمایید).

قسمت دوم سیگنال کنترل ورودی $v(t)$ ناپیوسته بوده که هم اثر نامعینی W را در مرحله لغزش حذف کرده و دینامیک سیستم را تغییر ناپذیر می کند، و هم در مرحله رسیدن، حالت‌های خطا را در زمان محدود t_r به سمت سطح لغزشی سوق می دهد.

بنابراین، سیگنال کنترل ورودی تطبیقی زیر پیشنهاد می شود که هم شامل کنترل معادل است و هم شامل تابع ناپیوسته علامت می باشد.

$$v(t) = KE + v_d + \xi - (q_1 + 1)\beta \text{sign}(s) \quad (۳۱)$$

که $(q_1 + 1)\beta$ بهره سوئیچینگ بوده و $q_1 > 0$ پارامتر ثابت طراحی است. قسمت تطبیقی بهره سوئیچینگ است که در شرط زیر صادق است:

$$\beta(t) > 0: \forall t \quad (۳۲)$$

در بخش بعدی، روش جدیدی برای محاسبه $\beta(t)$ پیشنهاد می شود. اکنون گزاره زیر را که در اثبات قضایای ۱ و ۲ استفاده می شود در نظر بگیرید.

گزاره: فرض کنید نامعینی $W(X, U, u^{(\rho-r)})$ کراندار باشد یعنی نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|W(X, U, u^{(\rho-r)}, t)| \leq \Omega(X, U, u^{(\rho-r)}, t) < \infty \quad (۳۳)$$

در حالت کلی این فرض محدود کننده نیست [۱، ۲، ۳، ۱۵، ۲۴، ۲۶].
تذکره ۱: برخلاف روشهای دیگر مواجهه با نامعینی [۱-۱۰] در روش پیشنهادی، فقط وجود این کران الزامی است و دانستن کران Ω لازم نیست (به تذکره ۲ مراجعه نمایید).

۴- رویکرد تطبیقی بهره سوئیچینگ

یک روش تطبیقی برای محاسبه $\beta(t)$ به صورت زیر است [۳۰]:

اکنون حالت $\xi(t) \neq 0$ را در نظر بگیرید. واضح است که $\xi(t)$ را می توان به عنوان ورودی برای سیستم (۲۱) در نظر گرفته و آن را طوری محاسبه نمود که همانند کنترل حالت لغزشی پایانه ای (Terminal) [۱۹، ۲۹]، حالت‌های خطا بر روی سطح لغزشی در زمان محدود به صفر همگرا شوند. فرض کنید t_r زمان محدود برخورد حالت‌های خطا به سطح لغزشی باشد. یعنی فاصله زمانی $0 \leq t \leq t_r$ مرحله رسیدن و فاصله زمانی $t_r \leq t$ مرحله لغزش باشد. بنابراین برای $t_r \leq t$ حالت‌های خطا بر روی سطح لغزش (۱۵) بوده و در دینامیک (۲۱) صدق می کنند. ثابت می شود که اگر $\xi(t)$ به صورت زیر انتخاب شود:

$$\xi(t) = -(F+K)E + [1, C^T]E + \eta_e \text{sign}([C^T, 1]E) - e \quad (۲۴)$$

آنگاه حالت‌های خطا، در زمان محدود $t_e + t_r$ صفر خواهند شد که:

$$t_e = \frac{|[C^T, 1]E(0)|}{\eta_e} \quad (۲۵)$$

$\eta_e > 0$ بوده و $C = [c_1, c_2, \dots, c_{\rho-1}]^T$ طوری انتخاب می شود که $S_e = [C^T, 1]E$ یعنی چند جمله ای زیر پایدار باشد.

$$S_e = e^{(\rho-1)} + c_{\rho-1}e^{(\rho-2)} + \dots + c_2\dot{e} + c_1e \quad (۲۶)$$

در این حالت بردار K را می توان به هر صورت، از جمله با مقادیر صفر انتخاب نمود. برای اثبات این مطلب، ابتدا مشتق S_e را محاسبه نموده و از معادله (۲۱) استفاده می نمایم.

$$\dot{S}_e = (F+K)E + \xi + c_{\rho-1}e^{(\rho-1)} + \dots + c_2\dot{e} + c_1\dot{e} \quad (۲۷)$$

حال با جایگذاری $\xi(t)$ از معادله (۲۴) داریم:

$$\dot{S}_e = -\eta_e \text{sign}(S_e) \quad (۲۸)$$

اکنون تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

کنید که β_0 اختیاری بوده و هر مقداری را می توان برای آن در نظر گرفت. انتگرال معادله (۳۵) به صورت زیر است:

$$\beta(t) = \Omega(t) + \beta_0 - \Omega_0 + q_2 \int_0^t (|s(\tau)| - \psi) d\tau \quad (۳۷)$$

لم ۱: اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$\beta_0 - \Omega_0 > \varepsilon_0 \quad (۳۸)$$

آنگاه، در صورت محاسبه β از معادلات (۳۵) و (۳۶) خواهیم داشت:

$$\beta - \Omega \geq \varepsilon_0 : \forall t > 0 \quad (۳۹)$$

اثبات: با تعریف متغیر θ به صورت $\theta = \beta - \Omega$ خواهیم داشت $\theta(0) = \theta_0 = \beta_0 - \Omega_0$. آنگاه با در نظر گرفتن معادلات (۳۶) و (۳۷):

$$\theta(t) = \theta_0 + q_2 \int_0^t |s(\tau)| d\tau - \frac{q_2 \varepsilon_1}{2} \int_0^t (\text{sign}(\theta - \varepsilon_0) + 1) d\tau \quad (۴۰)$$

سمت راست معادله بالا، شامل مجموع چند تابع پیوسته است. بنابراین، $\theta(t)$ تابعی پیوسته خواهد بود، به طوری که $\theta_0 > \varepsilon_0$ است (فرض (۳۸)). قبل از اینکه $\theta(t)$ از ε_0 کوچکتر شود، باید مقدار آن در زمانی مانند t_1 برابر ε_0 شود به طوری که:

$$\theta(t) > \varepsilon_0 : \forall t \in [0, t_1] \quad (۴۱)$$

و به علاوه:

$$t_1 \geq \frac{2(\theta_0 - \varepsilon_0)}{q_2 \varepsilon_1} \quad (۴۲)$$

در $t = t_1$ خواهیم داشت $\theta = \varepsilon_0$ یعنی:

$$\varepsilon_0 = \theta_0 + q_2 \int_0^{t_1} |s(\tau)| d\tau - \frac{q_2 \varepsilon_1 t_1}{2} \quad (۴۳)$$

حال فرض کنید زمانی مانند t_2 وجود دارد به طوری که:

$$\theta(t) < \varepsilon_0 : \forall t \in (t_1, t_2) \quad (۴۴)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\Omega} + q_2 |s|, \beta(0) = \beta_0, \Omega(0) = \Omega_0 \quad (۳۴)$$

که $q_2 > 0$ پارامتر ثابت طراحی بوده و β_0 و $\Omega_0 = \Omega(X(0), U(0), u^{(\rho-r)}(0), 0)$ به ترتیب مقادیر ثابت شرایط اولیه β و Ω می باشند. توجه کنید که β_0 اختیاری بوده و هر مقداری را می توان برای آن در نظر گرفت. همانطور که از این معادله مشخص است، پارامتر تطبیقی β و به دنبال آن بهره سوئیچینگ افزایش می یابد به طوری که حالت‌های خطا به سمت سطح سوئیچینگ سوق داده شوند. اما این روش، سه ایراد اساسی دارد که عبارتند از:

۱. هنگامی که حالت‌های اولیه خطا از سطح لغزشی فاصله زیادی دارند، بهره سوئیچینگ به سرعت افزایش می یابد. این افزایش، به دلیل بزرگ بودن $|s(0)|$ است نه به خاطر نامعینی های موجود در سیستم. این عامل سبب بزرگ شدن بهره سوئیچینگ به مقداری بیش از حد نیاز می شود.

۲. سوئیچینگ اطراف سطح و نویز اندازه گیری، مانع صفر شدن کامل

$|s(t)|$ برای $t_r \leq t$ می شود. بنابراین، افزایش پارامتر تطبیقی β

همچنان ادامه می یابد. سرعت افزایش به مقدار q_2 وابسته است.

۳. قانون تطبیقی (۳۴) فقط قادر است بهره سوئیچینگ را افزایش دهد، یعنی بر طبق این قانون تحت هیچ شرایطی β کاهش نمی یابد. بنابراین، اگر شرایط طوری تغییر نماید که سیستم حلقه بسته با بهره کوچکتری نیز پایدار باشد، قانون تطبیقی (۳۴) نمی تواند خودش را با این شرایط تطبیق دهد.

بنابر توضیحات بیان شده، ارایه روشی تطبیقی که توانایی کاهش و افزایش بهره سوئیچینگ را بر طبق شرایط سیستم داشته باشد ضروری به نظر می رسد. روش پیشنهادی در این قسمت، این توانایی را داشته و در عین حال، ایرادهای ذکر شده در بالا را نیز ندارد. در روش پیشنهادی پارامتر $\beta(t)$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\dot{\beta} = \dot{\Omega} + q_2 (|s| - \psi(\beta)), \beta(0) = \beta_0, \Omega(0) = \Omega_0 \quad (۳۵)$$

که در آن:

$$\psi(\beta) = \frac{\varepsilon_1}{2} (\text{sign}(\beta - \Omega - \varepsilon_0) + 1) \geq 0 \quad (۳۶)$$

ثابت‌های $\varepsilon_0 > 0$ و $\varepsilon_1 > 0$ ، $q_2 > 0$ پارامترهای طراحی می باشند. $\Omega_0 = \Omega(X(0), U(0), u^{(\rho-r)}(0), 0)$ و β_0 به ترتیب مقادیر ثابت و کراندار شرایط اولیه β و Ω می باشند. توجه

$$\dot{V} \leq -q_1 \beta |s| + \psi(\Omega - \beta) \quad (53)$$

بنابراین:

و با استفاده از لم ۱:

$$\dot{V} \leq -q_1 \beta |s| \quad (54)$$

اکنون، متغیر $\omega(t) = q_1 \beta |s(t)|$ را تعریف می کنیم.

$$\dot{V} \leq -\omega(t) \leq 0 \quad (55)$$

انتگرال معادله بالا بین صفر و t به معادله زیر منجر خواهد شد:

$$0 \leq \int_0^t \omega(\tau) d\tau \leq \int_0^t \omega(\tau) d\tau + V(t) \leq V(0) \quad (56)$$

این رابطه در حالت حدی و هنگامی که $t \rightarrow \infty$ نیز برقرار می باشد. یعنی، در این حالت نیز انتگرال بالا موجود بوده و کوچکتر- مساوی $V(0)$ است و چون $V(0)$ مثبت و محدود است، بر مبنای لم باربالات (Barbalat's lemma) [۲، ۳۱] داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_1 \beta |s(t)| = 0 \quad (57)$$

اما چون q_1 و $\beta(t)$ بزرگتر از صفر می باشند، معادله (۵۷)

فقط در صورتی می تواند برقرار باشد که $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$.

در قضیه ۱ رسیدن به سطح لغزشی به صورت مجانبی اثبات شد. اما در کنترل حالت لغزشی، برای داشتن خاصیت تغییر ناپذیری، رسیدن به سطح لغزشی باید در زمان محدودی رخ دهد. قضیه ۲ نشان می دهد که این زمان محدود است.

قضیه ۲: دینامیک خطای (۱۴) را به همراه سیگنال کنترل ورودی تطبیقی (۳۱)، (۳۵) و (۳۶) در نظر بگیرید. آنگاه مسیرهای خطا، در زمان محدود t_f به سطح لغزشی (۱۵) همگرا خواهند شد اگر β_0 طوری انتخاب شود که شرط (۳۸) برقرار باشد. به علاوه t_f در شرط زیر صدق می کند:

$$t_f \leq \frac{|y^{(\rho-1)}(0) - y_d^{(\rho-1)}(0)|}{\varepsilon_0} \quad (58)$$

اثبات: تابع لیاپانوف موجود در معادله (۴۹) را در نظر بگیرید. مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$\theta(t) = \theta_0 + q_2 \int_0^t |s(\tau)| d\tau + q_2 \int_{t_1}^t |s(\tau)| d\tau - \frac{q_2 \varepsilon_1 t_1}{2} \quad (45)$$

اکنون، با استفاده از معادله (۴۳) به رابطه زیر می رسیم.

$$\theta(t) = \varepsilon_0 + q_2 \int_{t_1}^t |s(\tau)| d\tau \quad (46)$$

و چون $q_2 \int_{t_1}^t |s(\tau)| d\tau \geq 0: \forall t \in (t_1, t_2)$ ، بنابراین:

$$\theta(t) \geq \varepsilon_0: \forall t \in (t_1, t_2) \quad (47)$$

این معادله با فرض موجود در معادله (۴۴) در تناقض است. بنابراین، با استفاده از برهان خلف داریم:

$$\theta(t) \geq \varepsilon_0: \forall t \quad (48)$$

قضیه ۱: دینامیک خطای (۱۴) را به همراه سیگنال کنترل ورودی تطبیقی (۳۱)، (۳۵) و (۳۶) در نظر بگیرید. آنگاه مسیرهای خطا، به سطح لغزشی (۱۵) همگرا خواهند شد اگر شرط (۳۸) برقرار باشد. اثبات: تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t) = \frac{1}{2} (s^2 + q_2^{-1} (\Omega - \beta)^2) \quad (49)$$

مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$\dot{V} = s\dot{s} + q_2^{-1} (\Omega - \beta)(\dot{\Omega} - \dot{\beta}) = s(v - v_d + W - KE - \xi) + q_2^{-1} (\Omega - \beta)(\dot{\Omega} - \dot{\beta}) \quad (50)$$

حال با استفاده از معادلات (۳۱) و (۳۵) و جایگذاری در معادله (۵۰) داریم:

$$\dot{V} = s(W - (q_1 + 1)\beta \text{sign}(s)) + q_2^{-1} (\Omega - \beta)(-q_2(|s| - \psi)) \quad (51)$$

و یا:

$$\dot{V} \leq \Omega |s| - (q_1 + 1)\beta |s| - (\Omega - \beta)(|s| - \psi) \quad (52)$$

بنابراین،

$$t_f \leq \frac{s(0)}{\varepsilon} \quad (68)$$

حالت دوم: فرض کنید $s < 0$ باشد، با استفاده از معادله (۶۴) به

نامساوی زیر می رسم:

$$\dot{s} \geq \varepsilon_0 \quad (69)$$

محاسبه انتگرال دو سمت این نامساوی بین $t = 0$ و $t = t_f$ به

رابطه زیر منجر خواهد شد:

$$-s(0) \geq \varepsilon_0 t_f \quad (70)$$

بنابراین:

$$t_f \leq \frac{-s(0)}{\varepsilon_0} \quad (71)$$

به طور کلی، با استفاده از معادلات (۶۸) و (۷۱) می توان نامساوی

زیر را نوشت:

$$t_f \leq \frac{|s(0)|}{\varepsilon_0} \quad (72)$$

و با دقت در معادلات (۱۵) و (۱۸):

$$s(0) = \alpha e^{(\rho-1)}(0) = y^{(\rho-1)}(0) - y_d^{(\rho-1)}(0) \quad (73)$$

تذکره ۲: اگر فرض کنیم Ω عدد مثبت ثابتی است که به اندازه

کافی بزرگ می باشد، آنگاه $\dot{\Omega} = 0$ بوده و خواهیم داشت:

$$\dot{\beta} = q_2(|s| - \psi) \quad (74)$$

و:

$$\psi(\beta) = \frac{\varepsilon_1}{2} (\text{sign}(\beta - \varepsilon_0) + 1) \geq 0 \quad (75)$$

در این حالت، متغیر $\theta = \beta - \Omega$ را می توان به عنوان یک

تخمین زنده برای کران نامشخص Ω در نظر گرفت، که به رابطه

$$\dot{\theta} = \dot{\beta} - \dot{\Omega} = \dot{\beta} = q_2(|s| - \psi)$$

$$\beta(t) = \beta_0 + q_2 \int_0^t (|s(\tau)| - \psi) d\tau \quad (76)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} + q_2^{-1}(\Omega - \beta)(\dot{\Omega} - \dot{\beta}) = \\ &= s\dot{s} + q_2^{-1}(\Omega - \beta)(-q_2(|s| - \psi)) \\ &= s\dot{s} - (\Omega - \beta)|s| + \psi(\Omega - \beta) \end{aligned} \quad (59)$$

با استفاده از معادله (۵۳) داریم:

$$s\dot{s} - (\Omega - \beta)|s| + \psi(\Omega - \beta) \leq -q_1\beta|s| + \psi(\Omega - \beta) \quad (60)$$

بنابراین،

$$s\dot{s} - (\Omega - \beta)|s| \leq -q_1\beta|s| \quad (61)$$

و یا:

$$s\dot{s} \leq -(\beta - \Omega + q_1\beta)|s| \leq -(\beta - \Omega)|s| \quad (62)$$

و با استفاده از لم ۱ خواهیم داشت:

$$-(\beta - \Omega) \leq -\varepsilon_0 \quad (63)$$

با استفاده از معادلات (۶۲) و (۶۳):

$$s\dot{s} \leq -\varepsilon_0|s| \quad (64)$$

فرض کنید t_f زمان رسیدن به سطح لغزشی باشد یعنی

$$s(t_f) = 0 \text{ و } \beta_0 \text{ در شرط (۳۸) صدق نماید، آنگاه:}$$

$$\varepsilon_0 > 0 \quad (65)$$

اکنون، دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت اول: فرض کنید $s > 0$ باشد، با استفاده از معادله (۶۴) به

نامساوی زیر می رسم:

$$\dot{s} \leq -\varepsilon_0 \quad (66)$$

محاسبه انتگرال دو سمت این نامساوی بین $t = 0$ و $t = t_f$ به

رابطه زیر منجر خواهد شد:

$$-s(0) \leq -\varepsilon_0 t_f \quad (67)$$

لم ۲: فرض کنید Q ماتریس نیمه معین-مثبتی با ابعاد مناسب بوده و R عدد ثابت مثبتی باشد. اگر M در معادله (۲۲) و ξ در سطح لغزشی (۱۵) به صورت زیر انتخاب شوند:

$$M = -R^{-1} A_{12}^T P, \xi = 0 \quad (۷۸)$$

آنگاه، تابع معیار زیر بهینه بوده و کمینه خواهد شد:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [E^T Q E + e^{(\rho)} \text{Re}^{(\rho)}] dt \quad (۷۹)$$

به عبارت دیگر، سطح لغزشی (۱۵) سطحی بهینه خواهد بود. به علاوه، دینامیکهای صفر سیستم پایدار می باشند. ماتریس مربعی معین-مثبت P از معادله ریکاتی زیر بدست می آید:

$$P A_{11} + A_{11}^T P + Q - P A_{12} R^{-1} A_{12}^T P = 0 \quad (۸۰)$$

اثبات: فرض کنید $\sigma = 1$ (معادله (۱۸))، با جایگذاری $K = M - F = -R^{-1} A_{12}^T P - F$ (معادله (۲۲)) و $\xi = 0$ در سطح لغزشی (۱۵)، داریم:

$$s(t) = e^{(\rho-1)} + \int_{t_0}^t (R^{-1} A_{12}^T P) E(\tau) d\tau \quad (۸۱)$$

بر روی سطح لغزشی (یعنی برای $t_f \leq t$) $s(t) = 0$ بوده و بنابراین،

$$e^{(\rho-1)}(t) = - \int_{t_0}^t (R^{-1} A_{12}^T P) E(\tau) d\tau \quad (۸۲)$$

واضح است که مشتق این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$e^{(\rho)} = -R^{-1} A_{12}^T P E \quad (۸۳)$$

بر اساس مباحث کنترل بهینه [۳۲]، معادله (۸۳) معیار (۷۹) را کمینه می کند. دینامیکهای صفر سطح لغزشی از معادله $\dot{s} = 0$ و یا همان معادله (۸۳)، و جایگذاری نتیجه آن در قسمت اول معادله (۷۶) به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\dot{E}(t) = (A_{11} - A_{12} R^{-1} A_{12}^T P) E(t) \quad (۸۴)$$

خواهد بود. به علاوه، برای برقراری شرط (۳۲) باید داشته باشیم: $\beta_0 > \varepsilon_0 > 0$. در این حالت، Ω فقط برای اثبات قضایای ۱ و ۲ استفاده می شود و نقشی در کنترل کننده نخواهد داشت. به علاوه معادلات (۷۴) و (۷۵) نقش تخمین زنده کران Ω را خواهند داشت.

روش پیشنهادی دارای مزایای زیر است:

۱. هنگامی که حالت‌های اولیه خطا از سطح لغزشی فاصله زیادی دارند، بهره سوئیچینگ به سرعت افزایش می یابد. این افزایش بهره، حالت‌های خطا را به سمت سطح سوئیچینگ سوق می دهد. اما هنگامی که این فاصله از ε_1 کوچکتر شود، بهره سوئیچینگ دوباره شروع به کاهش می کند.
۲. سوئیچینگ اطراف سطح و نویز اندازه گیری، بر پارامتر تطبیقی β تاثیری نخواهند داشت به شرطی که پارامتر ثابت ε_1 خیلی کوچک انتخاب نشود.
۳. قانون تطبیقی پیشنهادی قادر است با تغییر شرایط سیستم، دوباره بهره سوئیچینگ β را افزایش دهد.

۵- طراحی کنترل کننده بهینه

در این قسمت، پارامترهای سطح لغزشی را طوری تعیین می کنیم که در افق نامحدود (Infinite Horizon)، سطح لغزشی (۱۵) بهینه باشد. ابتدا معادله (۱۴) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= A_{11} E(t) + A_{12} e^{(\rho)}(t) \\ e^{(\rho)}(t) &= F E(t) + v(t) - v_d(t) + W \end{aligned} \quad (۷۶)$$

در این معادله ماتریسهای A_{11} و A_{12} که با ابعاد مناسب انتخاب می شوند به صورت زیر خواهند بود.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۷۷)$$

دقت نمایید که زوج (A_{11}, A_{12}) کنترل پذیر می باشد.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -p_1 x_1(t) - p_2 x_2(t) - x_1^3(t) + q \cos(\omega t) + u(t)$$

(۸۷)

برای اطمینان از وجود آشوب در غیاب سیگنال کنترل ورودی، پارامترهای p_1, p_2, q, ω_1 و شرایط اولیه سیستم به این صورت انتخاب شده اند: $p_1 = -1, p_2 = 0.25, q = 0.3, \omega_1 = 1$ و $X(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T = [1, 2.5]^T$ توجه نمایید که این پارامترها در شبیه سازی مدل خود سیستم استفاده می شوند نه در پیاده سازی کنترل کننده پیشنهادی. زیرا، فرض ما بر این است که کران Ω عدد ثابت بزرگی است. بنابراین، چون $\dot{\Omega} = 0$ است، به تخمین این پارامترها و یا دانستن آنها برای پیاده سازی کنترل کننده نیازی نیست. به عبارت دیگر، کنترل کننده مستقل از مدل سیستم است. خروجی مورد نظر در این حالت $y(t) = x_1(t)$ است. واضح است که درجه نسبی این خروجی نسبت به ورودی $u(t)$ برابر ۲ است ($r = 2$). بنابراین، برای حذف سوئیچینگ سیگنال کنترل ورودی، کنترل حالت لغزشی مرتبه ۳ استفاده می شود ($\rho = 3$):

$$y^{(3)} = \varphi(X, u) + \gamma(X, u)\dot{u} \quad (۸۸)$$

و:

$$X = [x_1, x_2]^T \quad (۸۹)$$

هدف این است که حالت‌های سیستم (۸۸)، یعنی خروجی و دو مشتق اول آن، حالت‌های سیستم خطی $y_d^{(3)} = F Y_d + v_d$ را در حالت بهینه تعقیب نمایند. که در این معادله $Y_d = [y_d, y_d^{(1)}, y_d^{(2)}]^T$ بوده و v_d به صورت زیر انتخاب شده است:

$$v_d = -1.21 \times \sin(1.1t) \quad (۹۰)$$

مقادیر وزنی معیار بهینه نیز به صورت زیر می باشند.

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, R = 5 \quad (۹۱)$$

با استفاده از قضیه LQR [۳۲] این سیستم پایدار است. دقت نمایید

که ثابت‌های m_i یعنی عناصر بردار $M = -R^{-1} A_{12}^T P$ را می توان به صورت زیر نیز بدست آورد.

$$m_i = -\frac{P_{\rho i}}{R} : i = 1, 2, \dots, \rho \quad (۸۵)$$

که ثابت‌های $P_{\rho i} : i = 1, 2, \dots, \rho$ عناصر سطر آخر ماتریس P می باشند.

تذکره ۳: واضح است که نامعینی W قسمتی از $e^{(\rho)}$ است (قسمت دوم معادله (۷۶)). بنابراین، افزودن $e^{(\rho)}$ به معیار (۷۹)، به کاهش اثر W بر عملکرد سیستم حلقه بسته کمک می کند. دو تذکره زیر برای تمام مباحث این مقاله (بهینه و غیر بهینه) صادق بوده و درست می باشند.

تذکره ۴: در روش پیشنهادی، حالت تکین که در مرجع [۳۳] مورد بحث قرار گرفته است، اتفاق نخواهد افتاد.

تذکره ۵: برای داشتن خاصیت تغییر ناپذیری در مرحله رسیدن به سطح و همچنین کاهش دامنه سیگنال کنترل ورودی در لحظه اولیه [۳۴، ۳۵] می توان از سطح لغزشی زیر استفاده نمود (در عمل، به علت وجود محدود کننده در سیگنال‌های ورودی به محرک‌های سیستم، بزرگ بودن دامنه سیگنال کنترل ورودی در لحظه اولیه، می تواند باعث ناپایداری سیستم حلقه بسته شود [۳۴]):

$$s(t) = \alpha e^{(\rho-1)t} - \int_0^t (\alpha F(\tau) + K(\tau)E(\tau) + \xi(\tau)) d\tau - h(t) \quad (۸۶)$$

که $h(t) = \alpha e^{(\rho-1)t} e^{-\alpha t}$ بوده و $\alpha \gg 0$ می باشد. دقت نمایید که در این حالت $s(0) = 0$ است. اثبات پایداری سیستم در این حالت نیز، با کمی تغییر همانند اثبات قضایای بیان شده می باشد.

۶- نتایج شبیه سازی

در این قسمت، روش پیشنهادی به سیستم آشوبی دافینگ-هولمز (Duffing-Holmes)، توصیف شده در [۲۳] اعمال خواهد شد. این سیستم با معادلات زیر توصیف می شود:

- و همچنین:
۳. محاسبه K با استفاده از معادله (۲۲).
 ۴. محاسبه سطح لغزشی با استفاده از معادله (۱۵).
 ۵. انتخاب $\varepsilon_0, \varepsilon_1, q_1$ و q_2 .
 ۶. محاسبه بهره سوئیچینگ β با استفاده از معادلات (۳۵) و (۳۶).
 ۷. محاسبه v با کمک معادله (۳۱).
 ۸. محاسبه $u^{(\rho-r)}$ با استفاده از معادله (۱۲).
 ۹. محاسبه u با انتگرال گیری عددی از $u^{(\rho-r)}$.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش جدید برای طراحی کنترل حالت لغزشی مرتبه بالای سیستمهای غیر خطی، بر مبنای تکنیکهای کنترل ساختار متغیر ارائه شده است. برای طراحی کنترل کننده پیشنهادی، به دانستن کران بالای نامعینی های سیستم نیازی نیست (تذکرات ۱ و ۲). اما، به هر حال، استفاده از این کران در پیاده سازی کنترل کننده، در صورتی که محافظه کارانه انتخاب نشود، رفتار و عملکرد سیستم را بهبود می بخشد. کنترل کننده پیشنهادی، مهمترین خصوصیات کنترل حالت لغزشی یعنی تغییر ناپذیری و سادگی طراحی را نیز دارا می باشد. روش پیشنهادی برای همزمان سازی سیستمهای آشوبی استفاده شده است که نتایج این شبیه سازیها، بهبود عملکرد سیستم را نشان می دهد.

مراجع

- [1] Young K. D., Utkin V. I. and Ozguner U., 1999, "A control engineer's guide to sliding mode control", *IEEE Transaction on Control System*, 7, 3, 328-342.
- [2] Slotine J.-J. E. and Li W., *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall, 1991.
- [3] Perruquetti W. and Pierre-Barbot J., *Sliding mode control in engineering*, Marcel Dekker, 2002.
- [4] Gao W. and Hung J. C., 1993, "Variable structure control of nonlinear systems: a new approach", *IEEE Transaction on Industrial Electronic*, 40, 1, 45-55.
- [5] Su J.-P. and Wang C.-C., 2002, "Complementary sliding control of non-linear systems", *International Journal of Control*, 75, 5, 360-368.
- [6] Bartolini G. and Pydynowski P., 1996, "An improved, chattering free, V.S.C. scheme for uncertain dynamical systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 41, 8, 1220-1226.

$$\xi = 0$$

$$k_i = 0 : i = 0, 1, 2, 3 \quad (92)$$

با استفاده از معادلات (۱۲) و (۱۳):

$$\dot{u} = FY + v \quad (93)$$

بنابراین نامعینی W به صورت زیر است:

$$W = (\varphi + \gamma \dot{u} - \ddot{u}) \quad (94)$$

همانطور که بیان شد برای پیاده سازی کنترل کننده پیشنهادی، به داشتن کران این نامعینی یعنی Ω نیازی نداریم. به علاوه شبیه سازیها با پارامترهای زیر انجام شده اند:

$$\beta(0) = 1, q_1 = 1.3, q_2 = 0.5, \varepsilon_0 = 0.3, \varepsilon_1 = 0.3 \quad (95)$$

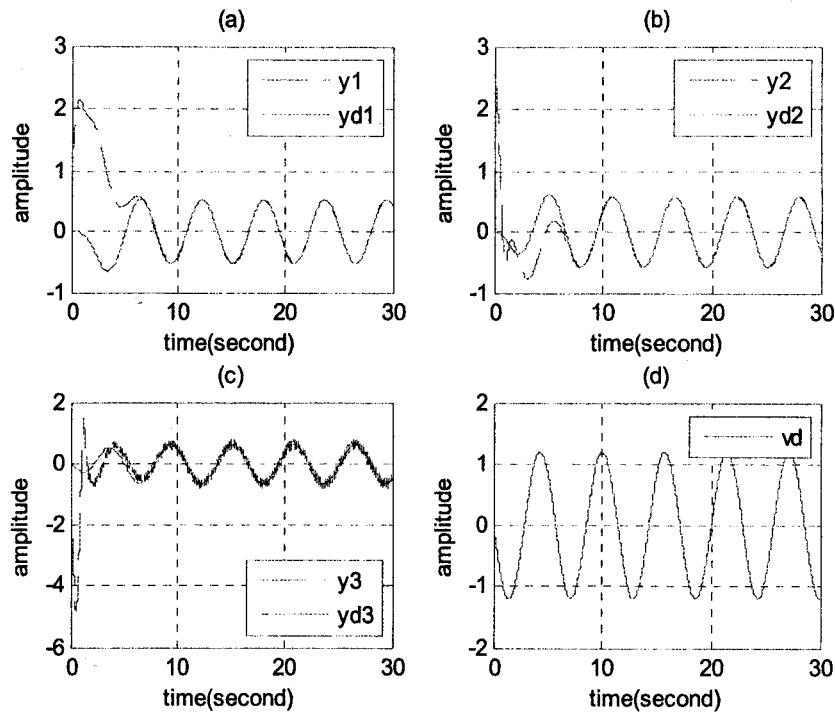
مثال ۱: شکلهای (۱)، (۲) و (۳) نتایج شبیه سازی را بر مبنای معادله (۳۴) [۳۰] نشان می دهند. با دقت در شکل (b.۲) دیده می شود که در ابتدا بهره سوئیچینگ افزایش یافته و حالتیهای خطا به سمت سطح لغزشی همگرا می شوند. اما به علت سوئیچینگ اطراف سطح لغزش، این افزایش همچنان ادامه می یابد که می تواند باعث ناپایداری سیستم حلقه بسته شود. همچنین از شکلهای (a.۲) و (d.۲) (سطح لغزشی و سیگنال کنترل ورودی) دیده می شود که دامنه سوئیچینگ در حال افزایش است.

مثال ۲: شکلهای (۴)، (۵) و (۶) نتایج شبیه سازی را بر مبنای روش پیشنهادی در معادلات (۳۵) و (۳۶) نشان می دهند. از شکل (b.۵) دیده می شود که بهره سوئیچینگ در ابتدا افزایش یافته و حالتیهای خطا به سمت سطح لغزشی سوق داده می شوند. اما به محض نزدیک شدن حالتیهای خطا به سطح لغزش، این بهره کاهش می یابد. در عین حال، سیگنال کنترل ورودی در شکل (d.۵) بدون سوئیچینگ است.

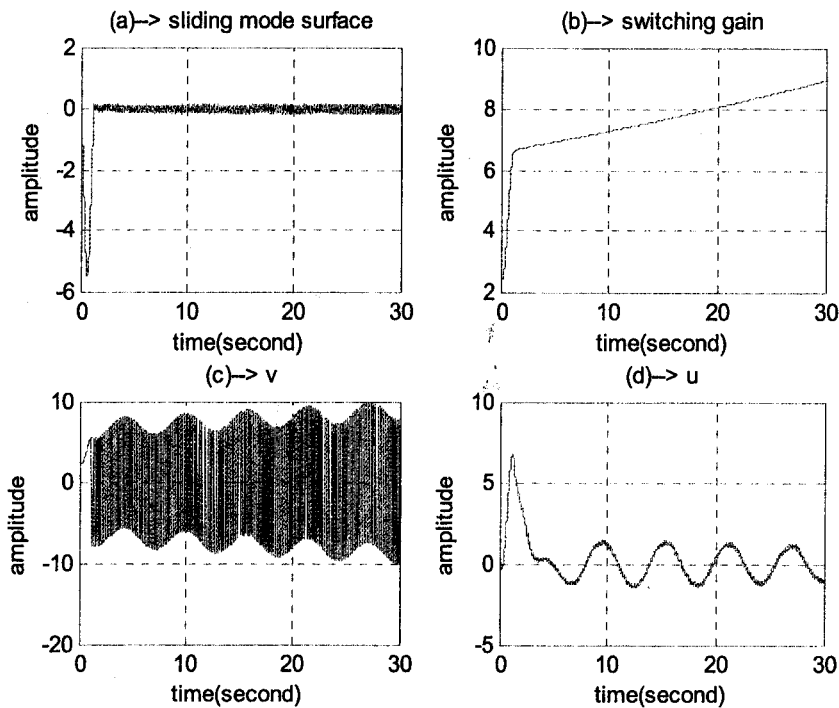
شبیه سازیها با نرم افزار مطلب و با زمان نمونه برداری ۰.۰۱ انجام شده اند. الگوریتم محاسبه سیگنال کنترل ورودی u به صورت زیر می باشد:

۱. محاسبه سیگنالهای خطا با استفاده از معادلات (۹) و (۱۰).
۲. انتخاب M و ξ برای پایداری معادله (۲۱). در حالت بهینه، M و ξ را می توان با استفاده از معادله (۷۸) محاسبه نمود.

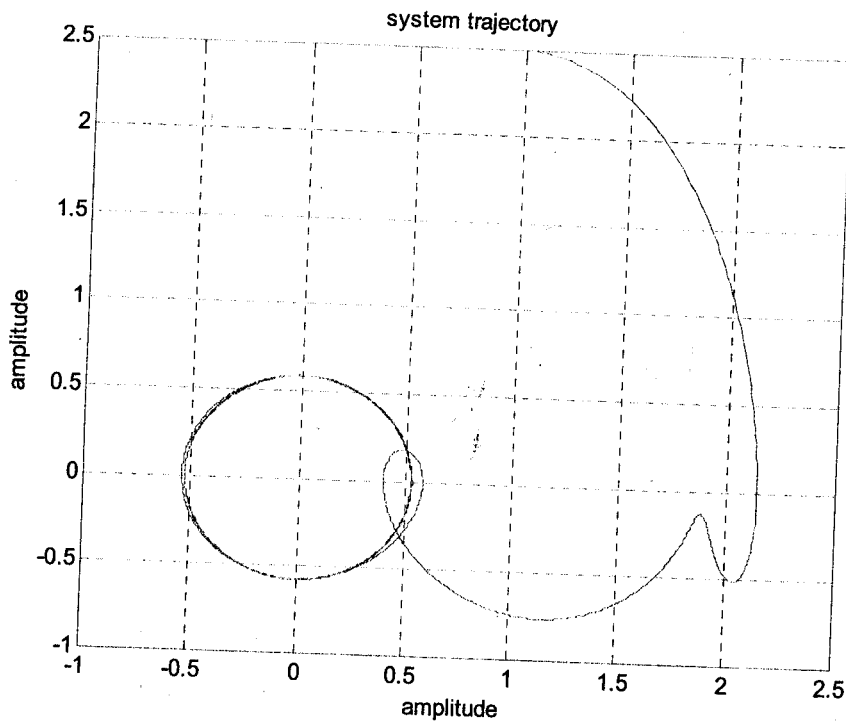
- [21] Gue'gan D., 2009, "Chaos in economics and finance", *Annual Reviews in Control*, 33, 89-93.
- [22] Fradkov A. L. and Evans R. J., 2005, "Control of chaos: Methods and applications in engineering", *Annual Reviews in Control*, 29, 33-56.
- [23] Sifakis M. K. and Elliott S. J., 2000, "Strategies for the control of chaos in a Duffing-Holmes oscillator", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14, 6, 987-1002.
- [24] Levant A., 2001, "Universal SISO sliding-mode controllers with finite time convergence", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 49, 1447-1451.
- [25] Levant A., 2003, "Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control", *International Journal of Control*, 76, 924-941.
- [26] Levant A., 2005, "Homogeneity approach to high-order sliding mode design", *Automatica*, 41, 823-830.
- [27] Filippov A. F., *Differential equations with discontinuous right-hand side*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [28] Edwards C. and Spurgeon S., *Sliding mode control: theory and applications*, Taylor and Francis, 1998.
- [29] Zhihong M. and Glumineau X. H. Y., 1997, "Terminal sliding mode control of MIMO linear systems", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 44, 11, 1065-1070.
- [30] Yan J.-J., Hung M.-L., Chiang T.-Y. and Yang Y.-S., 2006, "Robust synchronization of chaotic systems via adaptive sliding mode control", *Physics Letters A*, 356, 220-225.
- [31] Khalil H. K., *Nonlinear systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1996.
- [32] Kirk D. E., *Optimal control theory: an introduction*, Prentice-hall, 2004.
- [33] Hirschorn R. M., 2001, "Singular sliding-mode control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 46, 2, 469-472.
- [34] Cavallo A., De Maria G. and Nistri P., 1999, "Robust control design with integral action and limited rate control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 44, 8, 1569-1572.
- [35] Cavallo A. and Natale C., 2003, "Output feedback control based on a high-order sliding manifold approach", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48, 3, 469-472.
- [7] Bartolini G., Ferrara A., Usai E. and Utkin V. I., 2000, "On multi-input chattering-free second-order sliding mode control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45, 9, 1711-1717.
- [8] Asada H. and Slotine J.-J. E., *Robot analysis and control*, John Wiley, 1986.
- [9] Chen M.-S., Hwang Y.-R. and Tomizuka M., 2002, "A state-dependent boundary layer design for sliding mode control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 47, 10, 1677-1681.
- [10] Lee H. and Utkin V.-I., 2007, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems", *Annual Reviews in Control*, 31, 179-188.
- [11] Kaynak O., Erbatur K. and Ertugrul R., 2001, "The fusion of computationally intelligent methodologies and sliding-mode control- a survey", *IEEE Transaction on Industrial Electronic*, 48, 1, 4-17.
- [12] Yildiz Y., Sabanovic A. and Abidi K., 2007, "Sliding-Mode Neuro-Controller for Uncertain Systems", *IEEE Transaction on Industrial Electronic*, 54, 3, 1676-1685.
- [13] Tanaka K. and Wang H. O., *Fuzzy control systems design and analysis*, John Wiley, 2001.
- [14] Emelyanov S. V., Korovin S. K. and Levant A., 1993, "Higher-order sliding modes in control systems", *Differential Equations*, 29, 1627-1647.
- [15] Levant A., 1993, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control", *International Journal of Control*, 58, 1247-1263.
- [16] Bartolini G., Ferrara A. and Usai E., 1998, "Chattering avoidance by second-order sliding mode control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 43, 2, 241-246.
- [17] Boiko I. and Fridman L., 2005, "Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 50, 9, 1442-1446.
- [18] Boiko I., Fridman L. and Iriarte R., 1994, "Analysis of chattering in continuous sliding mode control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39, 12, 2465-2469.
- [19] Man Z., Poplinsky A. P. and Wu H. R., 2005, "A robust terminal sliding-mode control scheme for rigid robot manipulators", *American Control Conference*, Portland, USA, 2439-2444.
- [20] Laghrouche S., Plestan F. and Glumineau A., 2003, "Higher order sliding mode control based on optimal linear quadratic control", *European Control Conference*.



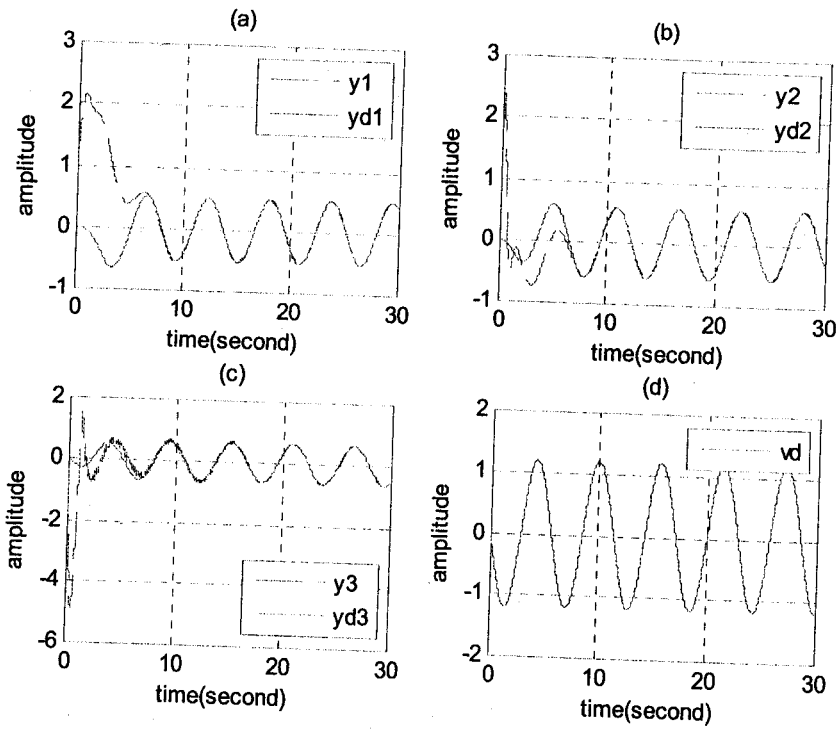
شکل ۱: سیگنالهای مرجع و تعقیب آنها توسط دو خروجی اول سیستم در مثال ۱:
 (a) خروجی سیستم، (b) مشتق اول خروجی سیستم، (c) مشتق دوم خروجی سیستم، (d) سیگنال کنترل ورودی سیستم مرجع



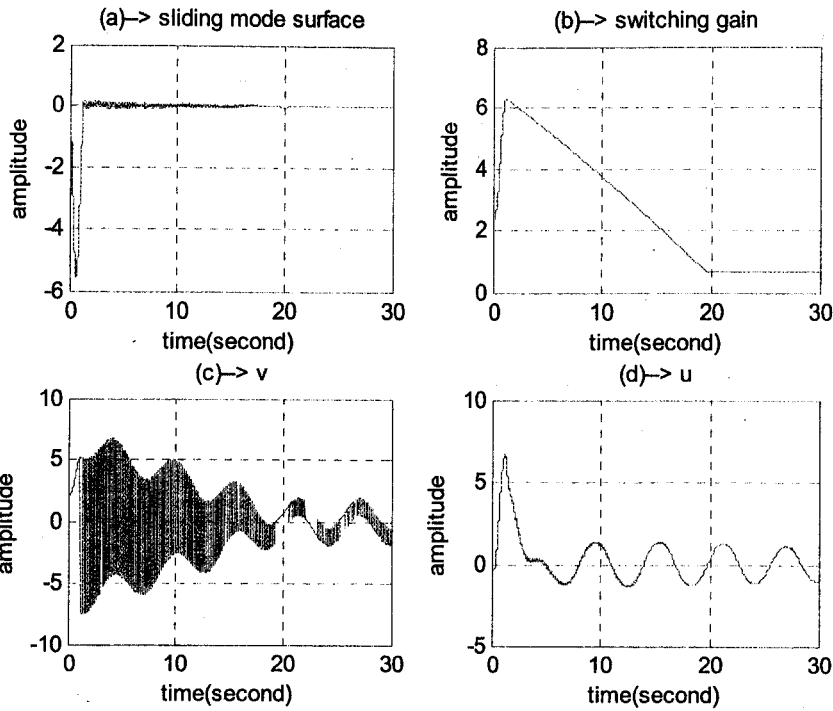
شکل ۲: (a) سطح لغزشی، (b) بهره سوئیچینگ، (c) سیگنال کنترل ورودی فیدبک حالت، (d) سیگنال کنترل ورودی سیستم، در مثال ۱



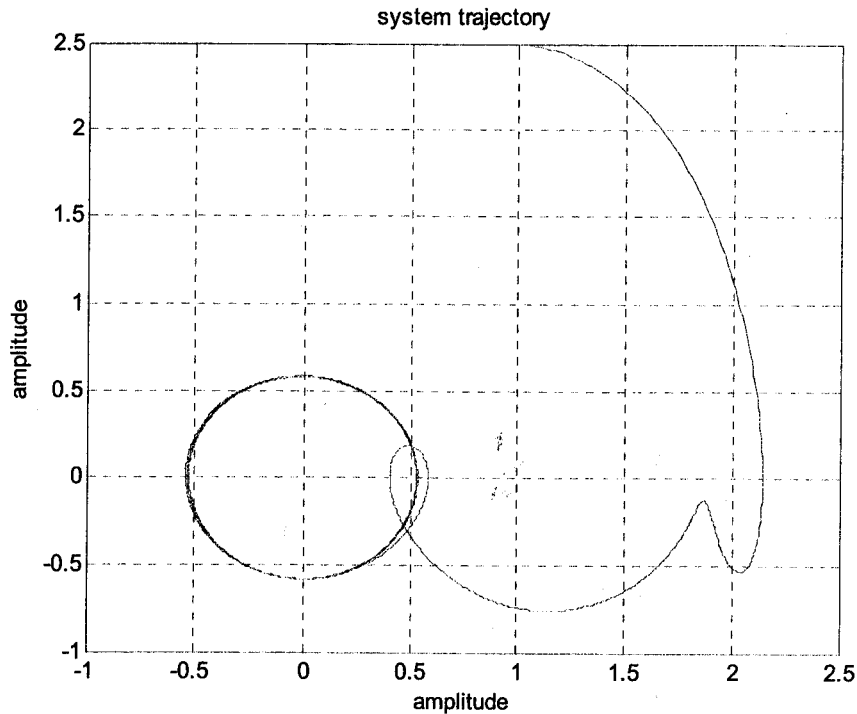
شکل ۳: مسیرهای حالت خروجی سیستم، $y_1 = y$ بر حسب $y_2 = \dot{y}$ ، در مثال ۱



شکل ۴: سیگنالهای مرجع و تعقیب آنها توسط دو خروجی اول سیستم در مثال ۲:
 (a) خروجی سیستم، (b) مشتق اول خروجی سیستم، (c) مشتق دوم خروجی سیستم، (d) سیگنال کنترل ورودی سیستم مرجع



شکل ۵: (a) سطح لغزشی، (b) بهره سوئیچینگ، (c) سیگنال کنترل ورودی فیدبک حالت، (d) سیگنال کنترل ورودی سیستم، در مثال ۲



شکل ۶: مسیرهای حالت خروجی سیستم، $y_1 = y$ بر حسب $y_2 = \dot{y}$ ، در مثال ۲