رکوردها در توزیع بتای نوع اول

جعفر احمدی * و ناصررضا ارقامی †

چکیده

در این مقاله خواص توزیعی رکوردهای پایین در توزیع بتای نوع اول بحث شده است. برآورد پارامتر این توزیع برحسب رکوردها و همچنین پیشگوی sـامین رکورد بر اساس n رکورد اول داده شده است.$(s > n)$

۱ مقدمه

اخیراً تحقیقات دربارهٔ ویژگیهای متغیرهای تصادفی رکوردی (رکوردها) اهمیت خاصی پیدا کرده است. به طور کلی در یک دنباله از متغیرهای تصادفی مانند $\{X_n, n \geq ۱\}$ متغیرهایی که از متغیرهای ماقبل خود بزرگتر هستند رکوردهای بالا و متغیرهایی که از متغیرهای ماقبل خود کوچکتر هستند رکوردهای پایین نامیده می‌شوند.

تعیین توزیع رکوردها، همبستگی و استقلال شرطی و غیر شرطی آنها، برآورد پارامترهای توزیع اولیه بر اساس رکوردها و تشخیص توزیع اولیه بر اساس ویژگیهای توزیعی رکوردها از مواردی هستند که در مبحث رکوردهای دنباله‌های متغیرهای تصادفی اهمیت دارند.

اهمیت کاربردی رکوردها بیشتر به این خاطر است که در مشاهدات دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی بسیار اتفاق می‌افتد که تنها مقادیر رکوردی، ثبت شده یا انتقال می‌یابند و داده‌های اصلی در دسترس نیستند. محقق باید صرفاً با داشتن مقادیر رکوردی مشاهدات به استنباط دربارهٔ پارامترهای توزیع مشاهدات و پیش‌بینی زمان و مقدار رکورد بعدی اقدام نماید. برای مثال ممکن است بخواهیم میزان ارتفاع آب و زمان طغیان بعدی رودخانه‌ای را پیش‌بینی نماییم و برای این کار فقط به زمان و ارتفاع آب طغیانهای رکوردی قبلی دسترسی داشته باشیم.

به عنوان مثالی دیگر ممکن است بخواهیم زمان و شدت زلزلهٔ بعدی را در یک محل خاص بر اساس اطلاعاتی که از زلزله‌های مخرب قبلی داریم پیش‌بینی نماییم. مثلاً طراح یک سازه بخواهد بداند که در طول عمر مفید سازه‌ای که وی آن را طراحی کرده است، احتمال وقوع مثلاً زلزله‌ای شدیدتر یا مخربتر از آنچه درگذشته اتفاق افتاده چقدر است؟ به عبارت دیگر اگر سازه‌ای براساس شدیدترین زلزله در تاریخ منطقه مورد نظر محاسبه و طرح شود، احتمال تنزل کارایی آن در اثر بار زلزله در ۲۰ یا ۵۰ سال آینده چقدر است؟

در هواشناسی نیز رکوردها کاربرد دارند، به این صورت که اغلب پیش‌بینی متغیرهایی از قبیل رکورد میزان بارندگی (رکورد بالا یا پایین)، رکورد درجه حرارت (رکورد بالا یا پایین) و غیره در هواشناسی مطرح است.

این نظریه، عمدتاً در دو دهه اخیر رشد کرده و می‌توان به کمک آن پاسخی برای مسائل مذکور در بالا فراهم آورد. مزیت استفاده از این نظریه را می‌توان در عدم نیاز به مشاهدات غیر رکوردی، و سادگی و غیر تقریبی بودن برخی از نتایج آن دانست. ما ذیلاً مقدمات نظریه رکوردها را در مورد رکوردهای پایین به طور خلاصه بیان می‌کنیم. مسلماً تعاریف و نتایج مربوط به رکوردهای بالا به طور مشابه قابل حصول خواهند بود. مطالب مربوط به رکوردهای توزیع بتا که موضوع این مقاله است، در بخشهای ۳ تا ۵ ارائه شده است.

*) جعفر احمدی، دانشجوی دورهٔ دکترای آمار دانشگاه فردوسی مشهد
†) دکتر ناصررضا ارقامی، دانشیار گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

۲ تعاریف و نمادها

فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع از توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند.
X_k را یک رکورد پایین گوییم، هرگاه $X_k < \min(X_1, \ldots, X_{k-1})$. بنابراین X_1 یک رکورد است و شمارهٔ سریال jامین رکورد پایین را با L_j نشان می‌دهیم، که به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_1 = 1,\ L_j = \min\{k|X_k < X_{L_{j-1}}\},\ j \geq 2 \qquad (1)$$

L_j، زمان jـامین رکورد پایین نامیده می‌شود و jـامین رکورد پایین را با X_{L_j} نشان می‌دهیم.

مثال زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید یک نمونه به حجم $n = 9$ با مقادیر زیر داشته باشیم

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
۲۴	۲۷	۱۴	۱۰	۱۳	۱۸	۷	۴	۱۹

در اینجا رکوردهای پایین به ترتیب ۲۴، ۱۴، ۱۰، ۷ و ۴ هستند و

$$X_{L_1} = 24,\ X_{L_2} = 14,\ X_{L_3} = 10,\ X_{L_4} = 7\ X_{L_5} = 4$$

و زمان رکوردهای پایین عبارت‌اند از

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3 \quad L_3 = 4 \quad L_4 = 7 \quad L_5 = 9$$

چون زمان رکورد پایین برای دنبالهٔ $\{X_n, n \geq 1\}$ و $\{F(X_n), n \geq 1\}$ یکی است و $F(X)$ دارای توزیع یکنواخت دربازهٔ $(0, 1)$ است، توزیع زمان رکوردها به F (توزیع مشاهدات) بستگی ندارد. توجه داشته باشیم که زمان jـامین رکورد یک متغیر تصادفی است در نتیجه توزیع X_{L_j} به j و توزیع اولیه جامعه به (F) بستگی خواهد داشت. این موضوع را در بخشهای زیر خواهیم دید.

۱.۲ توزیع رکوردهای پایین

خواص زیادی از دنبالهٔ رکوردهای پایین را می‌توان با استفاده از تبدیل زیر به صورتهای ساده‌تری بیان کرد:

$$H(x) = -\ln F(x) \quad , \quad h(x) = -H'(x)$$

۱.۱.۲ توزیع حاشیه‌ای

اگر تابع توزیع و تابع چگالی X_{L_n} را به ترتیب با F_n و f_n نشان دهیم آنگاه

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(H(v))^{n-1}}{(n-1)!} dF(v), \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$f_n(x) = \frac{(H(x))^{n-1}}{(n-1)!} f(x), \qquad -\infty < x < +\infty \quad (2)$$

برای اولین و دومین رکورد پایین داریم

$$F_1(x) = P(X_{L_1} \leq x) = P(X_1 \leq x) = F(x)$$

$$f_1(x) = f(x), \qquad -\infty < x < +\infty$$

برای به دست آوردن توزیع X_{L_2} به دلیل تصادفی بودن L_2 از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$$F_2(x) = P(X_{L_2} \leq x) = \sum_{i=2}^{+\infty} P(X_{L_2} \leq x, L_2 = i)$$

برای اینکه دومین رکورد پایین نمونه iـام باشد، باید X_i اولین مشاهده‌ای باشد که کوچکتر از X_1 است. در نتیجه

$$F_2(x) = \sum_{i=2}^{+\infty} P(X_i \leq x, X_2 > X_1, \ldots, X_{i-1} > X_1, X_i < X_1)$$

با استفاده مجدد از قانون احتمال کل،

$$F_2(x) = \sum_{i=2}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{v}^{+\infty} (\bar{F}(u))^{i-2} dF(u) dF(v)$$

با تعویض ترتیب انتگرالگیری و مجموعیابی،

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{v}^{+\infty} \sum_{i=2}^{+\infty} (\bar{F}(u))^{i-2} dF(u) dF(v)$$

که در آن $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$.

۲.۱.۲ توزیع توأم n رکورد اول

اگر چگالی توأم $X_{L_1}, \ldots, X_{L_n}$ را با $f_{1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n)$ نشان دهیم آنگاه

$$f_{1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n-1} h(x_i) f(x_n),$$

$$-\infty < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < +\infty \quad (3)$$

برای مثال تابع چگالی توأم دو رکورد اول را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F_{1,2}(x_1, x_2) &= P(X_{L_1} \leq x_1, X_{L_2} \leq x_2) \\ &= \sum_{i=2}^{+\infty} P(X_1 \leq x_1, X_{L_2} \leq x_2, L_2 = i) \\ &= \sum_{i=2}^{+\infty} (X_1 \leq x_1, X_i \leq x_2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&X_2 > x_1, \ldots, X_{i-1} > x_1, X_i < x_1) \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{v}^{x_1} (1 - F(u))^{i-2} dF(u) dF(v) \\
&= \int_{-\infty}^{x_2} \int_{v}^{x_1} \frac{dF(u)}{F(u)} dF(v),\ x_2 < x_1 \\
f_{1,2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{1,2}(x_1, x_2) = h(x_1) f(x_2), \\
&- \infty < x_2 < x_1 < +\infty
\end{aligned}
$$

۳.۱.۲ تابع چگالی توأم X_{L_p}، X_{L_q} $(q > p)$

با استفاده از تابع چگالی توأم q رکورد پایین اول تابع چگالی توأم pـامین و qـامین رکورد را به دست می‌آوریم

$$
f_{p,q}(x_p, x_q) = \int_{x_q}^{x_{q-2}} \int_{x_q}^{x_{q-3}} \cdots \int_{x_q}^{x_p} \int_{x_p}^{+\infty} \int_{x_{p-1}}^{+\infty} \cdots \int_{x_3}^{+\infty} \int_{x_2}^{+\infty} f_{1,\ldots,q}(x_1, \ldots, x_q) dx_1 \ldots dx_{p-1} dx_{p+1} \ldots dx_{q-1}
$$

که بعد از ساده کردن داریم

$$
f_{p,q}(x_p, x_q) = \frac{(H(x_p))^{p-1}}{\Gamma(p)} h(x_p) \frac{(H(x_q) - H(x_p))^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} f(x_q), \quad x_q < x_p \qquad (۴)
$$

سرانجام، تابع چگالی شرطی X_{L_q} به شرط $X_{L_p} = x_p$ $(p < q)$ عبارت است از

$$
f_{q|p}(x_q | x_p) = \frac{(H(x_q) - H(x_p))^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} \cdot \frac{f(x_q)}{F(x_p)}, \quad x_q < x_p \qquad (۵)
$$

با استفاده از (۴) و (۵) واضح است که رکوردها دارای خاصیت زنجیر مارکف‌اند. روابط مشابه (۲)، (۳)، (۴) و (۵) برای رکوردهای بالا در [۲] داده شده است.

تحقیقات مربوط به نظریهٔ رکوردها اکنون پیشرفت زیادی کرده است و ویژگیهای آنها وقتی که توزیع اولیه جامعه، نمایی و نرمال و ... هستند، به تفصیل مورد بررسی محققین قبلی قرار گرفته است. در این مقاله ما ویژگیهای توزیع بتای نوع اول را در ارتباط با رکوردها تعیین و نحوه برآورد پارامتر توزیع فوق را بر اساس رکوردها معرفی و ویژگیهای برآوردها و پیش‌بینی رکوردهای بعدی را بر اساس n رکورد اول مشخص می‌کنیم.

فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع از توزیع زیر باشد

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{\theta}, & 0 < x < 1 \qquad \theta > 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \qquad (۶)
$$

در این صورت گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع بتای نوع اول است و از نماد $X \sim BI$ برای نشان دادن آن استفاده می‌کنیم. در این مجموعه هر جا صحبت از توزیع بتاست، مراد توزیع بتای نوع اول است مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

۳ خواص توزیعی رکوردها از توزیع بتا

۱) هرگاه $\{X_n, n \geq 1\}$ دارای توزیع بتا باشد، آنگاه طبق (۲) و (۳) داریم

$$
f_n(x) = \frac{\theta^n \left(\ln(\frac{1}{x})\right)^{n-1}}{(n-1)!} x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1 \qquad (۷)
$$

$$
f_{1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n) = \theta^n x_n^{\theta-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{-1}
$$
$$
0 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < 1 \qquad (۸)
$$

۲) فرض کنید Y_1، ...، Y_n متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع و دارای توزیع نمایی با میانگین مثبت $\frac{1}{\theta}$ باشند آنگاه

$$
X_{L_n} \overset{D}{\sim} \exp\left(-\sum_{1}^{n} Y_i\right), \quad n \geq 1
$$

که نماد $\overset{D}{\sim}$ به معنای همتوزیعی است.

۳) اگر نسبت متوالی رکوردها را در نظر بگیریم $V_n = \frac{X_{L_{n+1}}}{X_{L_n}}$، آنگاه دنباله $\{V_n, n \geq 1\}$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع از توزیع بتاست. به طور کلی هرگاه قرار دهیم

$$
V_{n,m} = X_{L_n} / X_{L_m}, \quad (n > m)
$$

آنگاه متغیرهای تصادفی $V_{n,m}$ و $V_{k,m}$ مستقل از هم‌اند.

۴) $X_{L_n} | X_{L_m} = x_m \overset{D}{\sim} x_m \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-m} Y_i\right)$ $(n > m)$

۵) گشتاورها و حاصلضرب گشتاورها. از خاصیت ۲ نتیجه می‌گیریم که $X_{L_n}^r \overset{D}{\sim} \exp\left(-r \sum_{1}^{n} Y_i\right), n \geq 1$، در این صورت

$$
E\left(X_{L_n}^r\right) = \left(\frac{\theta}{\theta + r}\right)^n, \quad r \geq 1
$$

$$
\mathrm{Var}(X_{L_n}) \left(\frac{\theta}{\theta + 2}\right)^n - \left(\frac{\theta}{\theta + 1}\right)^{2n}
$$

همچنین از خاصیت ۱ داریم

$$X_{L_m}^{r} X_{L_n}^{s} \overset{D}{\sim} \exp\left(-(r+s)\sum_{1}^{n} Y_i\right)\exp\left(-s\sum_{i=m+1}^{n} Y_i\right)$$

$$n > m$$

در این صورت

$$E(X_{L_m}^{r} X_{L_n}^{s}) = \left(\frac{\theta}{\theta+r+s}\right)^{m}\left(\frac{\theta}{\theta+s}\right)^{n-m},$$

$$s, r \geq 1$$

۶) تابع خطر رکوردها نسبت به n نزولی است. با استفاده از (۲) داریم

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{(H(x))^{n-1}}{\Gamma(n)} dF(x) \\
&= 1 - F(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-\ln F(x))^k}{k!} \\
r_n(x) &= \frac{f_n(x)}{1-F_n(x)} = \frac{h(x)(H(x))^{n-1}}{(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(H(x))^k}{k!}} \\
&= \frac{(\theta\ln(\frac{1}{x}))^{n-1}\frac{\theta x^{\theta-1}}{\Gamma(n)}}{x^{\theta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\theta\ln(\frac{1}{x}))^k}{k!}} \\
&= r_{n-1}\frac{\theta\ln(\frac{1}{x})/(n-1)\left[\sum_{k=0}^{n-2}(\theta\ln(\frac{1}{x}))^k/k!\right]}{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\theta\ln(\frac{1}{x}))^k}{k!}}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$r_2(x) = r(x)\frac{\theta\ln(\frac{1}{x})}{1+\theta\ln(\frac{1}{x})} \Longrightarrow r_n(x) \leq r_{n-1}(x)$$

۴ استنباط بر اساس رکوردها

۱.۴ X_{L_n} برای مجموعه رکوردها آماره‌ای بسنده است

$$\begin{aligned}
f_{1,\ldots,n|n}(x_1,\ldots,x_n|X_{L_n}=x_n) &= \frac{f_{1,\ldots,n}(x_1,\ldots,x_n)}{f_n(x)} \\
&= \frac{(n-1)!}{(\ln(\frac{1}{x_n}))^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} x_i}
\end{aligned}$$

که به پارامتر بستگی ندارد.

البته این آماره برای مجموعهٔ کامل نمونه بسنده نیست، لذا هرگاه فرض کنیم نمونه‌ای به حجم n از جامعه فوق داشته باشیم، آنگاه طبق تعریف X_{L_n} همان اولین آماره مرتب است در حالی که می‌دانیم آماره $T = \prod_{i=1}^{n} X_i$ برای نمونه بسنده مینیمال است و اولین آمارهٔ مرتب تابعی یک به یک از T نیست.

بنابراین می‌توانیم استنباط را بر اساس X_{L_n} انجام دهیم.

۲.۴ برآورد درستنمایی ماکسیمم

با در نظر گرفتن n رکورد اول و با استفاده از (۳)، برآورد درستنمایی ماکسیمم θ را به دست می‌آوریم، توجه داشته باشیم که در اینجا مشاهدات برحسب n رکورد اول‌اند.

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta-1)\ln(x_n) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta) = \frac{n}{\theta} + \ln(x_n) = 0$$

بنابراین اگر برآورد درستنمایی θ را با $\hat{\theta}$ نشان دهیم، آنگاه

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\left[\ln\left(\frac{1}{X_{L_n}}\right)\right]}$$

با استفاده از نتیجه ۳ـ۲ داریم

$$E(\hat{\Theta})E\left[\frac{n}{\ln(\frac{1}{X_{L_n}})}\right] = E(\frac{n}{Y}) = \frac{n}{n-1}\theta, \qquad n > 1$$

که در آن $Y \sim \Gamma(n,\theta)$

$$\mathrm{Var}(\hat{\Theta}) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\theta^2$$

۳.۴ برآورد نااریب

یک برآورد نااریب θ عبارت است از

$$\tilde{\theta} = \frac{n-1}{(\ln(X_{L_n})^{-1})}, \ \mathrm{Var}(\tilde{\theta}) = \frac{1}{n-2}\theta^2, \ n > 2$$

۴.۴ برآورد بر اساس گشتاور رکوردها

فرض کنید n رکورد اول داده شده باشند، چون

$$\begin{aligned}
E(X_{L_k}) &= \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^k, \\
E\left(\sum_{i=1}^{n} X_{L_i}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^i \\
&= \theta\left[1-\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^n\right] = \theta(1-E(X_{L_n}))
\end{aligned}$$

اگر برآورد بر اساس گشتاور رکوردها برای θ را با $\bar{\theta}$ نشان دهیم آنگاه

$$\bar{\theta} = \frac{\sum_{1}^{n} X_{L_i}}{(1-X_{L_n})}$$

۵.۴ برآورد بیزی

فرض کنید توزیع پیشین گاما را برای θ در نظر بگیریم

$$\Theta \overset{D}{\sim} \Gamma(\alpha,\beta), \qquad f(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\beta\theta), \qquad \theta > 0$$

آنگاه با استفاده از (۲) داریم

$$X_{L_n}|\Theta \sim f_n(x) = \frac{\theta^n \left(\ln(\frac{1}{x})\right)^{n-1} x^{\theta-1}}{(n-1)!}$$

اگر تابع زیان را نیز میانگین مربعات خطا در نظر بگیریم، آنگاه

$$\prod(\theta|x) = \frac{\prod(\theta) f_n(x|\theta)}{\int_0^{+\infty} \prod(t) f_n(x|t)dt} = \frac{\theta^{\alpha+n-1}(e^{-\beta}x)^{0}}{\int_0^{+\infty} t^{\alpha+n-1}(e^{-\beta}x)^t dt},$$

با توجه به $e^{-\beta}x = e^{-\gamma}$، داریم

$$\prod(\theta|x) = \frac{\gamma^{\alpha+n}\theta^{\alpha+n-1}e^{-\gamma\theta}}{\Gamma(\alpha+n)}, \quad \theta > 0$$

$$E(\Theta|X) = \frac{\alpha+n}{\gamma} = \frac{\alpha+n}{\beta-\ln(x_n)}$$

اگر برآورد بیزی θ را با Θ^* نشان دهیم، داریم

$$\Theta^* = \frac{\alpha+n}{\beta-\ln(X_{L_n})}$$

با در نظر گرفتن n رکورد اول نیز همین جواب را خواهیم داشت.

۶.۴ برآورد فاصله‌ای

با استفاده از (۷) مشاهده می‌کنیم $-2\theta\ln(X_{L_n})$ یک کمیت محوری است. زیرا

$$T = -2\theta\ln(X_{L_n}) \Longrightarrow x = e^{-\frac{t}{2\theta}} \Longrightarrow |J| = \frac{1}{2\theta}\exp(-\frac{t}{2\theta})$$

$$g(t) = f_n(\exp(-\frac{t}{2\theta}))|J| = \frac{t^{n-1}\Gamma}{\Gamma(n)2^n}\exp(-\frac{t}{2}), \quad t > 0$$

بنابراین $T = -2\theta\ln X_{L_n} \sim \chi^2(2n)$. در نتیجه با αی داده شده داریم

$$1-\alpha = P(a<T<b) = P(a < -2\theta\ln(X_{L_n}) < b)$$

$$= P\left[\frac{a}{-2\ln(X_{L_n})} < \theta < \frac{b}{-2\ln(X_{L_n})}\right]$$

بنابراین یک برآورد فاصله $(1-\alpha)\%$ برای θ عبارت است از

$$\left[\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{-2\ln(X_{L_n})}, \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{-2\ln(X_{L_n})}\right]$$

۵ پیشگوی X_{L_s}

فرض کنید n رکورد اول داده شده باشند. آنگاه پیشگوی کمترین مربعات X_{L_s}، $(s > n)$ را به دست می‌آوریم. چون رکوردها دارای خاصیت زنجیر مارکف‌اند، بنابراین با استفاده از نتیجه ۳ـ۴ داریم

$$\begin{aligned} E(X_{L_s}|X_{L_1}, X_{L_2}, \dots, X_{L_n}) &= E(X_{L_s}|X_{L_n}) \\ &= X_{L_n}E\left(\exp(-\sum_{i=1}^{s-m} Y_i)\right) \\ &= \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{s-n} X_{L_n} \end{aligned}$$

و اگر پیشگوی X_{L_s} را با $\hat{X}_{L_s}$ نشان دهیم آنگاه

$$\hat{X}_{L_s} = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{s-n} X_{L_n}$$

۱) اگر θ معلوم باشد

$$E(\hat{X}_{L_s}) = (\frac{\theta}{1+\theta})^{s-n}E(X_{L_n}) = E(X_{L_s})$$

$$\mathrm{Var}(\hat{X}_{L_s}) = (\frac{\theta}{1+\theta})^{2(s-n)}\mathrm{Var}(X_{L_n}) = \frac{1}{\theta}(\frac{\theta}{1+\theta})^{2s}$$

۲) اگر θ مجهول باشد، از برآورد آن استفاده می‌کنیم. در این صورت با جایگزین کردن $\hat{\theta}$ به جای θ داریم

$$\hat{X}_{L_s} = \left(\frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}}\right)^{s-n} X_{L_n}$$

مراجع

[1] Ahsanullah, M., (1992) Record Values of Independent and Identically Distributed Continuous Random Variables. *Pak. j. Stat,* 8(2), A, 9-34.

[2] Ahsanullah, M., (1994) Record of Generalized Extereme Value Distribution. *Pak. j. Stat,* 10(1), A, 147-170.