معرفی کرانهایی برای واریانس بر اساس تعمیم نابرابری هامرسلی—چپمن—رابینز و مقایسه آنها با کران باتاچاریا

سمیرا نایبان *، عبدالحمید رضایی رکن آبادی، غلامرضا محتشمی برزادران

گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

مسئله تقریب یا پیدا کردن کرانی برای واریانس برآوردگر نااریب تابعی از پارامتر، از جمله مسائل مهمی است که در اکثر زمینه های آماری با آن مواجه هستیم. چرا که در بسیاری از مواقع، به دلیل پیچیدگی برآوردگر نمی توان واریانس آن را در قالب یک رابطه صریح بیان کرد. در این مقاله ضمن معرفی کران کرامر—رائو و کران باتاچاریا[۱] به عنوان تعمیمی از آن، به بررسی بیشتر کران هامرسلی—چپمن—رابینز[۲] و دو فرم تعمیم یافته ی آن می پردازیم. کشیرساگار[۳](۲۰۰۰) و کُیکه[۴] (۲۰۰۲) دو فرم تعمیم یافته از کران هامرسلی—چپمن—رابینز ارائه دادند که از کران باتاچاریا به واریانس برآوردگر نزدیکتر است. همچنین با محاسبه ی کران های معرفی شده در توزیع های نرمال، یکنواخت و نمایی به بررسی و مقایسه ی آنها پرداخته ایم.

واژه‌های کلیدی: کران کرامر—رائو، کران باتاچاریا، کران هامرسلی—چپمن—رابینز، کران کشیرساگار، کران کُیکه.

۱ مقدمه

یکی از مسائل مهم در نظریه برآورد، کران پایین برای واریانس برآوردگر می باشد زیرا این موضوع اطلاعاتی در مورد دقت و صحت برآوردگر به ما می دهد. همان طور که می دانیم در استنباط آماری نابرابری کرامر—رائو یک کران پایین برای واریانس برآوردگرهای نااریب ارائه می دهد؛ اما این نابرابری تنها بیان می کند که تحت شرایط خاصی، واریانس هر برآوردگر نمی تواند از یک کمیت مشخص کمتر باشد و اینکه به چه میزان این واریانس بیشتر از این کمیت است، مورد توجه قرار نمی دهد.

در این مقاله ابتدا ماتریس باتاچاریا و کران باتاچاریا را که تعمیمی از کران کرامر—رائو می باشد را معرفی می کنیم و سپس نابرابری هامرسلی—چپمن—رابینز و دو فرم توسعه یافته ی آن را که به ترتیب کران های بهتری از کرامر—رائو و

[۱] Bhattacharyya bound
[۲] Hammersley-Chapman-Robbins
[۳] Kshirsagar
[۴] Koike

باتاچاریا می باشند را مورد بررسی بیشتر قرار می دهیم. همچنین در ادامه با ارائه مثال هایی به محاسبه و مقایسه این کرانها می پردازیم.

۲ کران باتاچاریا

باتاچاریا[5](۱۹۴۶،۱۹۴۷) یک فرم تعمیم یافته از نابرابری کرامر–رائو بدست آورد که مرتبط با ماتریس باتاچاریا است. ماتریس باتاچاریا همان ماتریس کواریانس بردار تصادفی

$$\left(\frac{f^{(1)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \frac{f^{(2)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \dots, \frac{f^{(k)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right)$$

است که در آن $f^{(k)}(X|\theta)$ مشتق k ام تابع چگالی احتمال $f(X|\theta)$ نسبت به θ (پارامتر توزیع) و k، مرتبه ماتریس می باشد و برای مقدار $k=1$ این ماتریس تبدیل به اطلاع فیشر می شود. بر اساس این ماتریس، نابرابری باتاچاریا به صورت زیر بیان می شود.

تعریف ۱ اگر $T(X)$ برآوردگر ناریب از تابع $\tau(\theta)$ باشد و شرایط نظم برقرار باشد داریم:

$$Var_\theta(T(X)) \geq \xi_\theta^t J^{-1} \xi_\theta$$

که در آن :

۱) t نشان دهنده ترانهاده می باشد و $\xi_\theta = (\tau^{(1)}(\theta), \tau^{(2)}(\theta), \dots, \tau^{(k)}(\theta))^t$

۲) $\tau^{(j)}(\theta) = \frac{\partial^j E_\theta(T(X))}{\partial \theta^j}$ که در آن $j = 1, 2, \dots, k$.

۳) J^{-1} معکوس ماتریس باتاچاریا می باشد که در آن :

$$J_{rs} = Cov\left(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \frac{f^{(s)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right), \quad r, s = 1, 2, \dots, k$$

و $E_\theta(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}) = 0$.

در این تحقیق کران های باتاچاریا را با نماد $B_k(\theta)$ نشان می دهیم. لذا بر اساس نابرابری باتاچاریا برای مقادیر مختلف k (مرتبه ماتریس) می توان کرانهای مختلفی را برای واریانس آماره پیدا کرد. به ازای مقدار $k=1$ این نابرابری به کران کرامر–رائو تبدیل می شود. و هر چه مرتبه ماتریس (k) افزایش یابد و تابع $\tau(\theta)$ نیز مشتق پذیر از آن مرتبه باشد، کران باتاچاریا به واریانس آماره نزدیک تر می شود. یا به عبارتی برای $k \geq 1$ و $\theta \in \Theta$، $B_{k+1}(\theta) \geq B_k(\theta)$.

علاوه براین، در این زمینه، نویسندگان زیادی از جمله شنباگ [6](۱۹۷۲،۱۹۷۹)، بلیت و رائو[7](۱۹۷۴) و محتشمی[8] (۲۰۰۱،۲۰۰۶) مقالات قابل توجهی ارائه داده اند.

آکاهیرا[9] و همکاران (۱۹۸۶) کران باتاچاریا را برای حالتی که شرایط نظم برقرار نباشد گسترش داد.

خراشادیزاده[10] و محتشمی (۲۰۰۷) فرم کلی کران باتاچاریا را در خانواده توزیع های نمایی طبیعی با تابع های واریانس درجه ۲ و ۳ از θ را بدست آوردند و بکمک شبیه سازی و محاسبات عددی نشان دادند که کران باتاچاریا به عنوان تقریب واریانس آماره، بهتر از کران پایین کرامر–رائو می باشد.

محتشمی و همکاران (۲۰۱۰) به محاسبه، شبیه سازی و مقایسه ی کران های باتاچاریا در توزیع گاوسی وارون برای توابع مختلفی از پارامتر مجهول پرداختند.

[5] Bhattacharyya
[6] Shanbhag
[7] Blight and Rao
[8] Mohtashami
[9] Akahira
[10] Khorashadizadeh

۳ کران کشیرساگار و کران هامرسلی—چپمن—رابینز

یکی دیگر از نابرابری هایی که برای واریانس یک آماره معرفی شده است و نیاز به شرایط نظم ندارد و همچنین از کران کرامر—رائو نیز بهتر می باشد نابرابری هامرسلی—چپمن—رابینز است که مستقلاً توسط هامرسلی (۱۹۵۰) و چپمن و رابینز (۱۹۵۱) به صورت زیر معرفی شد.

تعریف ۲ اگر $T(X)$ برآوردگر نااریب از تابع $\tau(\theta)$ باشد داریم:

$$Var_\theta(T(X)) \geq \sup_\phi \frac{[\tau(\phi)-\tau(\theta)]^{۲}}{E\left(\frac{f(X|\phi)-f(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right)^{۲}} \qquad (۱)$$

که در آن سوپریموم روی تمام مجموعه $\phi \in \Theta$ با $g(\theta) \neq g(\phi)$ و $S(\phi) \subset S(\theta)$ است.

در این تحقیق کران هامرسلی—چپمن—رابینز را با نماد $H(\theta)$ نمایش می دهیم. چپمن و رابینز (۱۹۵۱) و سن و قوش [11] (۱۹۷۶) نشان دادند که همواره $H(\theta) \geq B_{۱}(\theta)$.

سن و قوش (۱۹۷۶) شرایطی که این نابرابری به برابری تبدیل می شود را مورد بررسی قرار دادند و همچنین کران هامرسلی—چپمن—رابینز را با کران های باتاچاریا مقایسه کردند و شرایط کافی برای اینکه که کدام یک از دیگری بهتر است را بیان کردند.

آکاهیرا و اُهیاچی [12] (۲۰۰۷) کران هامرسلی—چپمن—رابینز را از دیدگاه بیزی مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند.

اخیراً، کشیرساگار(۲۰۰۰) یک کران توسعه یافته از نابرابری هامرسلی—چپمن—رابینز بدست آورد که این نابرابری نیاز به شرایط نظم ندارد و همچنین از نابرابری باتاچاریا نیز بهتر می باشد. او این نابرابری را به صورت زیر معرفی کرد:

تعریف ۳ فرض کنید برای $r = ۱, ۲, ..., k$ قرار دهیم

$$\psi_r = \frac{f(x|\phi_r)-f(x|\theta)}{f(x|\theta)},$$

آنگاه نابرابری کشیرساگار بیان می کند که :

$$Var_\theta(T(X)) \geq \sup_\phi \lambda_\theta^t \Sigma^{-۱} \lambda_\theta, \qquad (۲)$$

که در آن :

۱) t نشان دهنده ترانهاده می باشد و $\lambda_\theta = (\tau(\phi_{۱})-\tau(\theta), \ldots, \tau(\phi_k)-\tau(\theta))^t$.

۲) $\Sigma^{-۱}$ وارون ماتریس با عناصر زیر می باشد :

$$\Sigma_{rs} = Cov(\psi_r, \psi_s), \qquad r, s = ۱, \ldots, k.$$

۳) سوپریموم روی تمام مجموعه $\phi_i \in \Theta$ $(i = ۱, \ldots, k)$ با شرط $S(\phi_k) \subset S(\phi_{k-۱}) \subset \ldots \subset S(\phi_{۱}) \subset S(\theta)$ گرفته می شود.

در این تحقیق کران های کشیرساگار را با نماد $K_k(\theta)$ نشان می دهیم. همان طور که می بینید برای $k = ۱$، $K_{۱}(\theta) = H(\theta)$ و بنابراین $K_{۱}(\theta) \geq B_{۱}(\theta)$.

[11] Sen and Ghosh

[12] Ohyauchi

کشیرساگار (۲۰۰۰) نشان داد که برای $\theta \in \Theta$ و $(k \geq ۱)$ $K_k(\theta) \geq B_k(\theta)$.

قین و نایاک[۱۳] (۲۰۰۸) با استفاده از نابرابری کشیرساگار کران هایی برای میانگین مربعات خطای پیش بینی[۱۴] بدست آوردند و با کرانهای بدست آمده از نابرابری باتاچاریا مقایسه کردند.

۱.۳ تعمیم دیگری از نابرابری هامرسلی—چپمن—رابینز

کُیکه[۱۵] (۲۰۰۲) تعمیم دیگری از نابرابری هامرسلی—چپمن—رابینز که شبیه نابرابری کشیرساگار و مرتبط با نابرابری باتاچاریا است، به فرم زیر ارائه داد:

تعریف ۴ اگر $T(X)$ برآوردگر ناریب از تابع $\tau(\theta)$ باشد داریم:

$$Var_\theta(T(X)) \geq \sup_{\delta\in\Delta} g_\theta^t V^{-۱} g_\theta \tag{۳}$$

که در آن :

۱) t نشان دهنده ترانهاده می باشد و $g_\theta = (G_۱, \ldots, G_k)^t$ و

$$G_i = \left(\frac{-۱}{\delta}\right)^i \sum_{j=۰}^{i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} (-۱)^j \tau(\theta + j\delta) \longrightarrow \tau^{(i)}(\theta), \quad (i = ۱, \ldots, k)$$

وقتی $\delta \to ۰$ که $\tau^{(i)}(\theta)$ مشتق iام $\tau(\theta)$ نسبت به θ می باشد.

۲) $V^{-۱}$ وارون ماتریسی با عناصر زیر می باشد:

$$V_{ij} = E_\theta(\Psi_i \Psi_j), \qquad i, j = ۱, \ldots, k,$$

که $\Psi_i = \left(\frac{-۱}{\delta}\right)^i \sum_{j=۰}^{i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} (-۱)^j \frac{f(x|\theta+j\delta)}{f(x|\theta)}$.

۳) سوپریموم روی مجموعه $\Delta = \{\delta : S(\theta + i\delta) \subset S(\theta), |V| \neq ۰, i = ۱, \ldots, k\}$ قرار دارد.

کران های این نابرابری جدید که ما آن را نابرابری کُیکه می نامیم را در این تحقیق با نماد $D_k(\theta)$ نشان می دهیم.

نکته ۱ کُیکه (۲۰۰۲) نشان داد که، در نابرابری کشیرساگار به فرم (۲) اگر $\phi_i = \theta + i\delta$، $(i = ۱, \ldots, k)$، آنگاه دو نابرابری (۲) و (۳) معادل هستند. همچنین او نشان داد که با فرض برقراری شرایط نظم همواره برای $k \geq ۱$،

$$B_k(\theta) \leq D_k(\theta) \leq K_k(\theta).$$

۴ مقایسه کران های واریانس یک آماره در توزیع نرمال

فرض کنید $X_۱, X_۲$ دو نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\theta^۲$ باشد. بنابراین تابع چگالی توأم $(X_۱, X_۲)$ به صورت زیر است:

$$f(x_۱, x_۲|\theta) = (۲\pi\theta^۲)^{-۱} \exp\left(-\frac{x_۱^۲ + x_۲^۲}{۲\theta^۲}\right).$$

[۱۳] Qin and Nayak

[۱۴] Mean Square Error of Prediction

[۱۵] Koike

همان طور که می دانیم $S^۲ = \frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{۲}$ آماره بسنده کامل برای θ است. براحتی می توان نشان داد که $T(X_۱, X_۲) = \frac{۲S}{\sqrt{\pi}}$، برآوردگر UMVU برای θ است. با کمی محاسبات می توان دید که،

$$Var_\theta(T(X_۱, X_۲)) = [۴/\pi - ۱]\theta^۲ \approx ۰.۲۷۳۲\theta^۲.$$

حال می خواهیم مقدار این واریانس را به کمک کران های کرامر—رائو، باتاچاریا، هامرسلی—چپمن—رابینز، کشیرساگار و کُیکه تقریب و باهم مقایسه کنیم.

با محاسبه مستقیم کران های باتاچاریا از مرتبه ۱ و ۲ داریم:

$$B_۱(\theta) = ۰.۲۵\theta^۲, \quad B_۲(\theta) = \frac{۱۷\theta^۲}{۶۴} \approx ۰.۲۶۵۶\theta^۲.$$

با در نظر گرفتن $\phi_i = \theta + i\delta$ $(i = ۱, \ldots, k)$ و با توجه به نکته ۱، کران های کشیرساگار و کُیکه با هم معادلند. در این مثال کُیکه (۲۰۰۲) نشان داد که:

$$H(\theta) = K_۱(\theta) = D_۱(\theta) \approx ۰.۲۶۹۸\theta^۲ > B_۲(\theta).$$

۵ مقایسه کران های واریانس یک آماره در توزیع یکنواخت

فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(۰, \theta)$ باشد. کُیکه (۲۰۰۲) برای دو تابع $\tau(\theta) = \theta$ و $\tau(\theta) = \theta^۲$ کران های کشیرساگار و کُیکه را محاسبه و مقایسه کرد:

• با فرض $\tau(\theta) = \theta$ می دانیم $T(X) = ۲X$ برآوردگر UMVU برای θ با واریانس $\frac{\theta^۲}{۳} \approx ۰.۳۳۳\theta^۲$ است. از طرفی،

$$\frac{[\tau(\theta+\delta) - \tau(\theta)]^۲}{E\left(\frac{f(X|\theta+\delta) - f(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right)^۲} = -\delta(\theta+\delta), \qquad -\theta < \delta < ۰,$$

با توجه به اینکه سوپریموم مقدار فوق در $\delta = -\theta/۲$ رخ می دهد، داریم:

$$H(\theta) = K_۱(\theta) = \frac{\theta^۲}{۴} = ۰.۲۵\theta^۲.$$

با قرار دادن $\phi_i = \theta + \delta_i$ $(i = ۱, ۲; \delta_۱ \neq \delta_۲)$ در (۲) برای $k = ۲$ داریم:

$$\lambda_\theta^t \Sigma^{-۱} \lambda_\theta = \frac{۱}{\theta}\delta_۱(\theta+\delta_۲)(\theta+\delta_۱-\delta_۲), \qquad -\theta < \delta_۲ < \delta_۱ < ۰,$$

بنابراین،

$$K_۲(\theta) = \sup_\psi \lambda_\theta^t \Sigma^{-۱} \lambda_\theta = \frac{۸}{۲۷}\theta^۳ \approx ۰.۲۶۹\theta^۳.$$

همچنین بطور مشابه در نابرابری کُیکه داریم:

$$g_\theta^t V^{-۱} g_\theta = \frac{-۲\delta(\theta+\delta)^۲}{\theta}, \qquad -\theta/۲ < \delta < ۰,$$

پس،

$$D_{۲}(\theta) = \sup_{\delta} g_{\theta}^{t} V^{-۱} g_{\theta} = \frac{۸}{۲۷}\theta^{۳} \approx ۰.۲۶۹\theta^{۳}.$$

همانطور که ملاحظه شد در این حالت $K_{۲}(\theta) = D_{۲}(\theta) > H(\theta)$.

• اگر $\tau(\theta) = \theta^{۲}$ آنگاه $T(X) = ۳X^{۲}$ برآوردگر UMVU برای $\theta^{۲}$ با واریانس $۰.۸\theta^{۴}$ است. همچنین داریم:

$$\frac{[\tau(\theta+\delta) - \tau(\theta)]^{۲}}{E\left(\frac{f(X|\theta+\delta) - f(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right)^{۲}} = -(۲\theta + \delta)^{۲}(\theta+\delta)\delta, \qquad -\theta < \delta < ۰,$$

لذا،

$$H(\theta) = K_{۱}(\theta) \approx ۰.۶۲۰\theta^{۴}.$$

همانند قسمت قبل با قرار دادن $\phi_i = \theta + \delta_i$ $(i = ۱, ۲; \delta_{۱} \neq \delta_{۲})$ در (۲) برای $k = ۲$ داریم:

$$\lambda_{\theta}^{t} \Sigma^{-۱} \lambda_{\theta} = \frac{۱}{\theta}\delta_{۱}(\theta - \delta_{۲})(-\delta_{۱}^{۳} - \delta_{۱}^{۲} - \delta_{۱}^{۲}\delta_{۲} + \delta_{۱}\delta_{۲}^{۲} + \delta_{۱}\delta_{۲}\theta + \delta_{۱}\theta^{۲} + \theta^{۳} + \delta_{۲}^{۳} + \delta_{۲}^{۲}\theta + \delta_{۲}\theta^{۲}),$$

که در آن $-\theta < \delta_{۲} < \delta_{۱} < ۰$. بنابراین :

$$K_{۲}(\theta) = \sup_{-\theta < \delta_{۲} < \delta_{۱} < ۰} \lambda_{\theta}^{t} \Sigma^{-۱} \lambda_{\theta} \approx ۰.۷۲۳\theta^{۴}.$$

از طرفی به طور مشابه در نابرابری کُیکه نیز می توان نشان داد:

$$g_{\theta}^{t} V^{-۱} g_{\theta} = \frac{-۲\delta(\theta+\delta)^{۲}(۹\delta^{۲} + ۸\theta\delta + ۴\theta^{۲})}{\theta}, \qquad -\theta/۲ < \delta < ۰,$$

و سپس :

$$D_{۲}(\theta) = \sup_{\delta} g_{\theta}^{t} V^{-۱} g_{\theta} \approx ۰.۷۲۱\theta^{۴}.$$

همانطور که می بینید در این حالت برای تمام $\theta \in \Theta$،

$$K_{۲}(\theta) > D_{۲}(\theta) > H(\theta).$$

۶ مقایسه کران های باتاچاریا در برآورد واریانس برآوردگر تابع قابلیت اعتماد

یکی از مسائل مهمی که در قابلیت اعتماد وجود دارد مسئله برآورد تابع قابلیت اعتماد از یک مجموعه داده مستقل می باشد. در توزیع نمایی با میانگین θ، نویسندگان زیادی نشان داده اند که بهترین برآوردگر نااریب برای $\tau(\theta) = e^{-a/\theta}$ (تابع قابلیت اعتماد) به صورت زیر است:

$$\hat{\tau} = (۱ - \frac{a}{n\bar{x}})^{+}$$

که در آن $a^{+} = min(۰, a)$.

λ	$n = 4$	B_1	B_2	B_3	B_4	$n = 8$	B_1	B_2	B_3	B_4
۰/۵		۲۲/۹۹	۲۸/۱۷	۲۹/۵۱	۲۹/۸۷		۱۱/۵۰	۱۲/۹۳	۱۳/۱۶	۱۳/۱۸
۱		۳۳/۸۳	۳۷/۲۲	۳۷/۴۱	۳۷/۴۱		۱۶/۹۲	۱۷/۸۶	۱۷/۸۹	۱۷/۸۹
۲		۱۸/۳۲	۱۸/۳۲	۱۸/۷۲	۱۸/۹۶		۹/۱۶	۹/۱۶	۹/۲۳	۹/۲۵
۴		۱/۳۴	۱/۸۸	۱/۹۱	۱/۹۳		۰/۶۷	۰/۸۲	۰/۸۳	۰/۸۳
λ	$n = 16$	B_1	B_2	B_3	B_4	$n = 32$	B_1	B_2	B_3	B_4
۰/۵		۵/۷۵	۶/۱۳	۶/۱۶	۶/۱۷		۲/۸۷۴	۲/۹۷۲	۲/۹۷۶	۲/۹۷۶
۱		۸/۴۶	۸/۷۱	۸/۷۱	۸/۷۱		۴/۲۲۹	۴/۲۹۳	۴/۲۹۴	۴/۲۹۴
۲		۴/۵۸	۴/۵۸	۴/۵۹	۴/۵۹		۲/۲۸۹	۲/۲۸۹	۲/۲۹۰	۲/۲۹۰
۴		۰/۳۴	۰/۳۸	۰/۳۸	۰/۳۸		۰/۱۶۷	۰/۱۷۷	۰/۱۷۸	۰/۱۷۸

جدول ۱: کرانهای باتاچاریا برای واریانس برآوردگر تابع قابلیت اعتماد در توزیع نمایی (مقادیر در ۱۰۰۰ ضرب شده اند)

زاکس و ایون[۱۶] (۱۹۶۶) توانسته اند واریانس برآوردگر فوق را محاسبه کنند؛ اما فرمول آن بسیار پیچیده است که محاسبه آن حتی برای مقادیر کوچک n بسیار مشکل است. در حالی که با استفاده از کران های باتاچاریا به راحتی می توان واریانس برآوردگر فوق را تقریب زد. خراشادیزاده و محتشمی (۲۰۰۷) نشان دادند که می توان واریانس این برآوردگر را با استفاده از فرمول زیر تقریب کرد:

$$Var(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{2i}(n-1)!}{i!(n+i-1)!} \tau^{(i)}(\theta)^2$$

در جدول ۱ چهار کران اول باتاچاریا را برای مقادیر مختلف n و $\lambda = a/\theta$ محاسبه کرده ایم. دو نکته مهمی که از این مثال و جدول آن می توان دید این است که:

- برای اکثر مقادیر مختلف پارامتر کران های باتاچاریا حتی برای حجم نمونه های پایین به سرعت به مقدار واقعی واریانس آماره میل می کنند.
- کران کرامر—رائو، B_1، حتی برای حجم نمونه های بزرگ یک مقدار ناکافی برای مقدار واقعی واریانس آماره می باشد بنابراین یک نیاز واقعی به کران بهتری از کران کرامر—رائو داریم.

همان طور که می بینید محاسبه کران های باتاچاریا با هر حجم نمونه و هر مرتبه ی با استفاده از رایانه براحتی قابل انجام است. اما محاسبه کرانهای کشیرساگار حتی برای حجم نمونه یک و $k = 1$ بسیار مشکل می باشد.

۷ نتیجه گیری

در این مقاله ضمن معرفی مشهورترین کران ها برای واریانس یک آماره از جمله کران باتاچاریا و کران کشیرساگار با ذکر چند مثال نحوه محاسبه این کران ها را بیان نمودیم. اگر چه کران کشیرساگار از کران باتاچاریا بهتر است اما محاسبه آن

[۱۶] Zacks and Even

در اکثر مواقع بسیار دشوار است و به این دلیل استفاده از کران باتاچاریا بیشتر رواج دارد، مخصوصاً هنگامیکه توزیع مورد نظر از خانواده نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه ۲ از پارامتر باشد که درا ین صورت ماتریس باتاچاریا قطری شده و کران باتاچاریا بسیار راحت قابل محاسبه است.

مراجع

[1] Akahira, M., Puri, M. K. and Takeuchi, K. (1986). Bhattacharyya bound of variance of unbiased estimators in nonregular cases. *Ann. Inst. Statist. Math.* **38**, Part A, 35-44.

[2] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2007). A Bayesian view of the Hammersley-Chapman-Robbins-type inequality. *Statistics*, **41**: 2, 137 - 144.

[3] Bhattacharrya, A. (1946). On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhya*, Series A,**8**, 1-14.

[4] Bhattacharrya, A. (1947). On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation II. *Sankhya*, Series A, **8**, 201-218.

[5] Blight, B.J.N and Rao, R.V.(1974). The convergence of Bhattacharyya bounds. *Biometrika*, **61**, 1, 137-142.

[6] Chapman, D. G., Robbins, H. (1951). Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Ann. Math. Statist.* **22**: 581-586.

[7] Hammersley, J. M. (1950). On estimating restricted parameters. *J. Roy. Statist. Soc. B.*, **12**: 192-240.

[8] Khorashadizadeh, M. and Mohtashami Borzadaran, G. R. (2007). The structure of Bhattacharyya matrix in natural exponential family and its role in approximating the variance of a statistics. *J. Statist. Res. Iran,* **4**, 135-137.

[9] Mohtashami Borzadaran, G. R. (2001). Results related to the Bhattacharyya Matrices. *Sankhya*, Series A, **63**, Pt. 1, pp. 113-117.

[10] Mohtashami Borzadaran, G. R. (2006). A note via diagonality of the 2×2 Bhattacharyya matrices. *J. Math. Sciences and Informatics,* **1**, No. 2, pp. 73-78.

[11] Mohtashami Borzadaran, G. R., Rezaei Roknabadi, A. H. and Khorashadizadeh, M. (2010). A view on Bhattacharyya bounds for inverse Gaussian distributions. *Metrika, Online.(DOI 10.1007/s00184-009-0245-4).*

[12] Koike, K. (2002). On the inequality of Kshirsagar. *Communications in Statistics - Theory and Methods,***31**: 1617-1627.

[13] Kshirsagar, A. M. (2000). An extention of the Chapman-Robbins inequality. *J. Indian Statist. Assoc.*, **38**, 355-362.

[14] Qin, M. and Nayak, T. K. (2008). Kshirsagar-Type Lower Bounds for Mean Squared Error of Prediction. *Communications in Statistics - Theory and Methods,* **37**: 6, 861 - 872.

[15] Sen, P. K., Ghosh, B. K. (1976). Comparison of some bounds in estimation theory. *Ann. Statist.***4**: 755-765.

[16] Shanbhag, D. N. (1972). Some characterizations based on the Bhattacharyya Matrix. *Journal of Applied Probability,* **9**, 580-587.

[17] Shanbhag, D. N. (1979). Diagonality of the Bhattacharyya Matrix as a characterization. *Theory of Probability and its Applications,* **24**, 430-433.

[18] Zacks, S. and Even, M. (1966). The efficiencies in small samples of the maximum likelihood and best unbiased estimators of reliability functions. *J. Am. Statist. Assoc.* **61**, 316, 1033-51.