

# بهبود روش طول قوس در تحلیل غیرخطی سازه‌ها

محمد رضایی پژند<sup>۱</sup> و محمد تاتار<sup>۲</sup>

## چکیده

نخست به بررسی روش طول قوس ثابت به عنوان یکی از شیوه‌های توانای تحلیل غیرخطی سازه‌ها پرداخته می‌شود. راهکار مزبور، دارای نرخ همگرایی درجه دوم می‌باشد. همچنین، رابطه‌سازی آن در دو فضای غیرهم بعد بار و تغییرمکان انجام پذیرفته است. این ویژگیها، سبب کاهش توانایی فن مزبور در تحلیل پاره‌ای از سازه‌ها خواهد شد. نویسنده‌گان برای افزودن به توانایی‌های آن، روش‌های نوینی را پیشنهاد می‌نمایند. این راهکارها، کوشش در زیاد کردن نرخ همگرایی و بهبود دادن. به کارایی فن طول قوس را دارند. در ادامه کار، با حل چند مثال شیوه‌های مزبور مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: روش طول قوس ثابت، مسیر ایستایی، تحلیل غیرخطی، نرخ همگرایی، سازه یک درجه آزادی، نمودار بار-تغییرمکان، روش بهبود یافته

## ۱- پیشگفتار

با تحلیل غیرخطی سازه‌ها می‌توان به تعیین بارهای کمانشی، واربی مقدار تغییرشکل‌های واقعی سازه در خلال بارگذاری، مقدار مقاومت پس کمانشی سازه و پاره‌ای از عاملهای دیگر دست یافت. برای رسیدن به تمامی هدفهای مزبور، نیاز به پیمودن مسیر ایستایی کامل سازه می‌باشد. این کار با یافتن نمودار بار-تغییرمکان انجام می‌پذیرد. برای این منظور، انواع روش‌های تحلیل غیرخطی به کار می‌روند. یکی از شیوه‌های معمول در تحلیل غیرخطی، فن نموی- تکراری نیوتون است. باید دانست، در این راهکار اندازه ضریب بار در هر گام بارگذاری ثابت می‌ماند<sup>[۱]</sup>. به همین سبب، شیوه مزبور قادر به گذر از نقطه حدی بار نمی‌باشد. از این رو،

<sup>۱</sup>- استاد، گروه عمران دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup>- کارشناسی ارشد سازه

زینکویچ روش نمو تغییرمکان را پیشنهاد نمود<sup>[۲]</sup>. در این راهکار، بجای ثابت نگه داشتن ضریب بار، مقدار یک درایه از بردار تغییرمکان ثابت می‌ماند.

این شیوه، برای گذر از نقطه حدی بار مناسب است. با وجود این، فن مزبور توانایی گذر از نقطه حدی تغییرمکان را ندارد. برای پاسخ دادن به این نیاز، روش طول قوس ثابت پیشنهاد شد<sup>[۳]</sup>. این فن، بجای ثابت پنداشتن سطح بار یا تغییرمکان، فاصله بین هر نقطه تکرار از نقطه تعادلی گام پیشین همواره ثابت فرض می‌گردد. از این رو، تکرارها بر روی مسیر دایره‌ای انجام می‌گیرند. تا در محل تلاقی با مسیر ایستایی همگرایی صورت پذیرد. باید دانست، در روش مزبور نرخ همگرایی از درجه دو می‌باشد. در راهکار دیگری، کار انجام شده توسط نمو بار و تغییرمکان، از آغاز هر گام بارگذاری تا پایان آن گام، برابر مقدار ثابتی خواهد بود. این کار، با دو روش کار خارجی ثابت و کار نموی صورت می‌پذیرد<sup>[۴] و [۵]</sup>.

خاطرنشان می‌نماید، در هر دو شیوه طول قوس ثابت و کار نموی، با نرخ همگرایی درجه دو، سطح بار و تغییرمکان تغییر می‌کنند. از این میان، روش طول قوس ثابت توانایی بیشتری در گذر از نقطه‌های حدی دارد. با این حال، در تحلیل پاره‌ای از سازه‌های پیچیده دچار واگرایی می‌شود. بر اساس پژوهش‌های پیشینیان، علتهای واگرایی و عدم توانایی روش مزبور را می‌توان در سه ویژگی جست. نخست، معادله‌های به کار رفته در روش طول قوس ثابت، برای سازه یک درجه آزادی و در دو فضای غیر هم بعد بار و تغییرمکان رابطه‌سازی شده‌اند. از سوی دیگر، در فرآیند شیوه مزبور نیاز به حل یک معادله درجه دوم می‌باشد. همچنین، فن طول قوس ثابت دارای نرخ همگرایی از درجه دو است. بنابراین، در پاره‌ای از مسئله‌ها، فرآیند تحلیل به کنندی صورت می‌گیرد و یا واگرایی می‌شود.

برای رفع مشکل نخست، راهکارهایی همانند طول قوس استوانه‌ای، بردار وضعیت با بعد کار و فن بیضوی پیشنهاد شده‌اند<sup>[۶] و [۷]</sup>. پاره‌ای از پژوهشگران، بر اساس روش طول قوس ثابت، شیوه‌هایی را به کار برده‌اند که در آنها تنها نیاز به حل یک معادله ساده خطی است. از این میان، می‌توان به فنهای صفحه قائم، صفحه قائم بهنگام و خطی سازگار ثابت اشاره نمود<sup>[۸] و [۹]</sup>. از سوی دیگر، فورد و استیمر با پیشنهاد راهکار جدیدی، معادله خطی دیگری به کار برده‌اند. با استفاده از این رابطه، معادله‌های درجه دوم در روش‌های طول قوس ثابت و استوانه‌ای به صورت خطی تقریب زده می‌شوند. همچنین، می‌توان فنهای صفحه قائم، قائم بهنگام و خطی سازگار ثابت را از آن استخراج کرد<sup>[۱۱]</sup>.

باید دانست، افزون بر شیوه‌های پیشنهادی فوق، پژوهشگران زیادی برای یک‌بعدی نمودن معادله‌های غیر هم بعد و حل معادله‌های درجه دوم، راهکارهای عمومی خوبی پیشنهاد داده‌اند. این روشها در بخش‌های بعدی می‌آیند. با به کار بستن این شیوه‌ها توسط فن طول قوس ثابت و بسیاری از روش‌های تحلیل غیرخطی، می‌توان

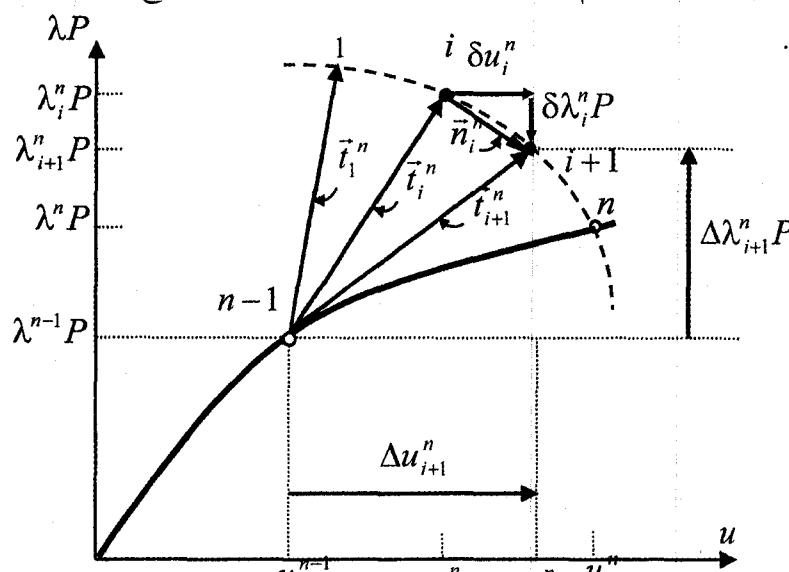
نتایج خوبی به دست آورد. از سوی دیگر، بیشتر فنهاي پیشنهادی نو، دارای نرخ همگرایی درجه دوم می‌باشند.  
از این رو، در تحلیل پاره‌های از مسئله‌های با رفتار پیچیده ناتوان خواهند بود.

خطارنشان می‌نماید، افزون بر توانایی شیوه‌های تحلیل غیرخطی در تحلیل مسئله‌های مشکل، باید بتوان با کم کردن تعداد تکرارها زمان محاسبات را نیز کاهش داد. این امر، با بالا بردن نرخ همگرایی امکان پذیر خواهد بود.

نویسنده‌گان با آگاهی از این مشکلها، شیوه‌هایی را برای بهبود فن طول قوس پیشنهاد می‌نمایند. برای این منظور، نخست به تشریح فرآیند تحلیل با روش طول قوس ثابت پرداخته می‌شود. سپس، فنای پیشنهادی رابطه‌سازی می‌گردد. در راهکارهای مزبور، نیاز به حل یک معادله درجه دوم می‌باشد. به همین سبب، نحوه انتخاب ریشه درست تشریح خواهد شد. از سوی دیگر، برای یک بعدی نمودن این معادله‌ها، رابطه‌ای پیشنهاد می‌گردد. سرانجام، با حل چند مثال، توانایی شیوه‌های پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

## ۲- روش طول قوس ثابت

در روش طول قوس ثابت، فرآیند تحلیل به صورت شکل (۱) است. بر اساس شکل مذبور، اگر نقطه تعادلی ( $n-1$ ) در دست باشد، برای انجام تحلیل در گام  $n$  ام، نخست با فرض خطی بودن رفتار سازه، یک تحلیل خطی انجام می‌پذیرد. در نتیجه، نقطه ۱ به دست می‌آید. به این بخش از تحلیل «گام پیشگویی» گویند. از آنجایی که نقطه مذبور خارج از مسیر ایستایی است، بنابراین، نیاز به تعدادی تکرار تصحیح کننده برای بهبود پاسخ گام پیشگویی خواهد بود. با انجام هر تحلیل، یک نقطه به دست می‌آید. اگر نقطه‌های مذبور همواره دارای فاصله ثابتی از نقطه تعادلی ( $n-1$ ) باشند، در این صورت، مکان هندسی این نقطه‌ها بر روی قوسی از یک دایره قرار می‌گیرد و سرانجام در نقطه تعادلی  $n$ ، مسیر ایستایی را قطع می‌کند. این ویژگی را می‌توان در



شکل (۱) - روش طول قوس ثابت

مکان هندسی نقطه تکراری  $(i+1)$  با بردار  $\tilde{t}_{i+1}^n$  نمایش داده می‌شود. از سوی دیگر، با فرض اینکه نمودار دارای دو درجه آزادی  $\lambda P$  و  $u$ ، به ترتیب، در جهت محور بار و تغییر مکان می‌باشد، می‌توان برای بردار  $\tilde{t}_{i+1}^n$  رابطه‌ای به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{t}_{i+1}^n = \Delta u_{i+1}^n \vec{e}_1 + \Delta \lambda_{i+1}^n P \vec{e}_2 \quad (1)$$

در این معادله،  $\Delta u_{i+1}^n$  و  $\Delta \lambda_{i+1}^n$ ، به ترتیب، نشانگر تغییر مکان و ضریب بار نموی در نقطه تکراری  $(i+1)$  از گام  $n$  ام هستند. مقدارهای مذبور با رابطه‌های زیر بهنگام می‌شوند:

$$\Delta u_{i+1}^n = \Delta u_i^n + \delta u_i^n \quad (2)$$

$$\Delta \lambda_{i+1}^n = \Delta \lambda_i^n + \delta \lambda_i^n \quad (3)$$

در اینجا،  $\delta u_i^n$  و  $\delta \lambda_i^n$ ، به ترتیب، تغییر مکان و ضریب بار تصویح کننده در تکرار  $i$  ام از گام  $n$  خواهند بود. باید دانست، در هر تکرار تصویح کننده، نخست مقدار بار نامیزان معلوم  $\tilde{r}_i^n$  به اندازه  $r_i^n$  کاهش می‌یابد. سپس، مقدار تغییر مکان تصویح کننده  $\delta u_i^n$  پیدا می‌گردد. این کار با حل معادله زیر صورت می‌پذیرد:

$$K_i^n \delta u_i^n = r_i^n \quad (4)$$

در این رابطه،  $K_i^n$  ماتریس سختی مماسی حاصل از تغییر مکان به دست آمده در نقطه تکراری  $i$  خواهد بود. مقدار  $r_i^n$ ، بر اساس شکل (۲)، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r_i^n = \tilde{r}_i^n + \delta \lambda_i^n P \quad (5)$$

در این صورت، می‌توان مقدار  $\delta u_i^n$  را به صورت یک ترکیب خطی از  $\delta \lambda_i^n$ ، همانند رابطه زیر، نوشت:

$$\delta u_i^n = \delta u_i^{n'} + \delta \lambda_i^n \delta u_i^{n'} \quad (6)$$

در اینجا، مقدارهای  $\delta u_i^{n'}$  و  $\delta u_i^{n'}$ ، به ترتیب، در اثر بار نامیزان  $\tilde{r}_i^n$  و بار مبنای  $P$  ایجاد می‌شوند و از رابطه‌های زیر حساب می‌گردند:

$$K_i^n \delta u_i^{n'} = \tilde{r}_i^n \quad (7)$$

$$K_i^n \delta u_i^{n'} = P \quad (8)$$

از آنجایی که مقدارهای  $\tilde{r}_i^n$  و  $P$ ، در آغاز هر تکرار معلوم می‌باشند، بنابراین، می‌توان دستگاه معادله‌های (۷) و (۸) را حل نمود. از این رو، بر اساس رابطه (۶)، برای محاسبه  $\delta u_i^n$ ، تنها نیاز به تعیین مقدار  $\delta \lambda_i^n$  خواهد بود. در روش طول قوس ثابت، این کار با ثابت گرفتن اندازه بردار  $\tilde{t}_{i+1}^n$  و برابر پنداشتن آن با مقدار اولیه‌اش (اندازه بردار  $\tilde{t}_1^n$ ) همانند رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{t}_{i+1}^n T \tilde{t}_{i+1}^n = \tilde{t}_1^n T \tilde{t}_1^n \quad (9)$$

از سوی دیگر، با به کار بردن معادله (۱) در رابطه (۹)، نتیجه زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\Delta u_{i+1}^{n^T} \Delta u_{i+1}^n + (\Delta \lambda_{i+1}^n)^2 P^T P = (L_n)^2 \quad (10)$$

در این رابطه، مقدار  $(L_n)^2$ ، به عنوان طول قوس و برابر اندازه بردار  $\bar{t}_{i+1}^n$  در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری رابطه‌های (۲)، (۳) و (۶) در معادله (۱۰)، مقدار  $\delta \lambda_i^n$  از حل معادله درجه دوم زیر پیدا می‌گردد:

$$a(\delta \lambda_i^n)^2 + b(\delta \lambda_i^n) + c = 0 \quad (11)$$

$$a = \delta u_i'^n T \delta u_i'^n + P^T P \quad (12)$$

$$b = 2 (\Delta u_i^n + \delta u_i'^n)^T \delta u_i'^n + 2 \Delta \lambda_i^n P^T P \quad (13)$$

$$c = (\Delta u_i^n + \delta u_i'^n)^T (\Delta u_i^n + \delta u_i'^n) + (\Delta \lambda_i^n)^2 P^T P - (L_n)^2 \quad (14)$$

چگونگی یافتن ریشه دقیق این معادله در ادامه مقاله تشریح می‌گردد.

### ۳- روش‌های پیشنهادی

همانگونه که پیش از این اشاره شد، روش طول قوس ثابت و پاره‌ای از فنهای بهبود یافته آن، بر اساس نمودار بار-تغییرمکان سازه یک درجه آزادی به دست آمده‌اند. در نتیجه، دو بردار بار و تغییرمکان مستقل از یکدیگر فرض شده‌اند. از سوی دیگر، نرخ همگرایی در بیشتر این شیوه‌ها از درجه دوم است. این دو ویژگی باعث کاهش توانایی فنهای مزبور در پیمودن کامل مسیر ایستایی پاره‌ای از مسئله‌ها می‌شود. برای رفع این مشکلها، در ادامه مقاله چند شیوه پیشنهاد می‌گردد.

#### ۱-۳- ثابت پنداشتن اندازه بردار $\bar{t}_{i+1}^n$

یادآوری می‌کند، در روش طول قوس ثابت و با توجه به شکل (۲)، نقطه ۱ به عنوان پاسخ گام پیشگویی به دست می‌آید. نویسنده‌گان برای بالا بردن نرخ همگرایی فن طول قوس ثابت، راهکار دیگری را پیشنهاد می‌کنند. در این شیوه، برای رسیدن به همگرایی، می‌توان بردار وضعیت  $\bar{t}_{i+1}^n$  را به شکلی در نظر گرفت که نقطه‌های تکرار همواره بر روی نقطه  $a$  قرار گیرند. در این صورت، برای سازه یک درجه آزادی، تحلیل در نخستین تکرار تصحیح‌کننده همگرا می‌شود. و نقطه  $a$  به عنوان نقطه تعادلی  $n$  پذیرفته می‌گردد. این امر، با تحلیل مثال بخش‌های (۱-۶) و (۶-۲) به خوبی اثبات شده است. از این رو، روش مزبور در حالت یک بعدی دارای همگرایی بینهایت خواهد بود.

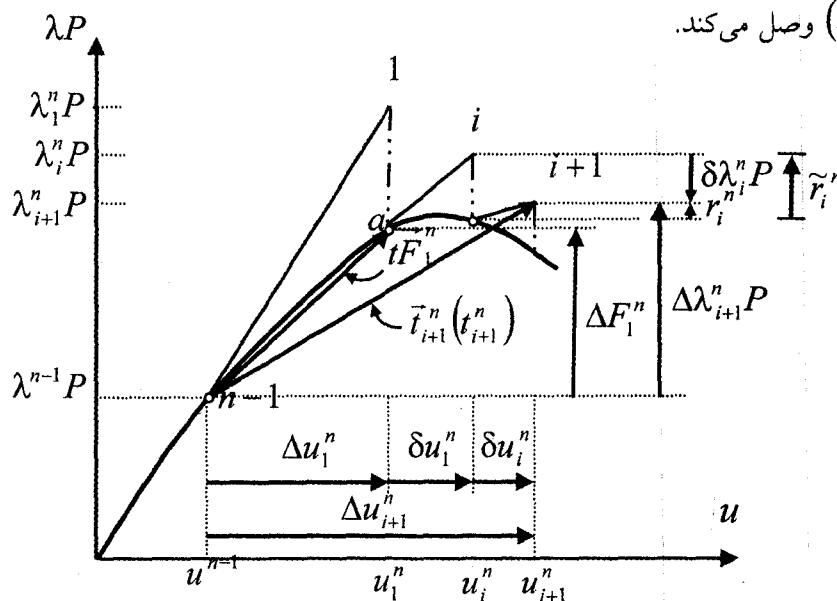
با توجه به تعریف و با فرض بردار  $\bar{tF}_1^n$ ، به عنوان بردار وضعیت نقطه  $a$ ، معادله شرط زیر نتیجه خواهد شد:

$$\bar{t}_{i+1}^n T \bar{t}_{i+1}^n = \bar{tF}_1^n T \bar{tF}_1^n \quad (15)$$

این شیوه، مشابه روش بخش (۲) می‌باشد و همان معادله (۱۰) را دارد. تنها تفاوت آن، در یافتن مقدار ثابت خواهد بود. از سوی دیگر، نرخ همگرایی در این فن بینهایت می‌باشد. از سوی دیگر، راهکار بخش (۲) دارای نرخ همگرایی درجه دوم است. در روش پیشنهادی، اندازه ثابت  $(L_n)^2$ ، برابر طول بردار  $\vec{tF}_1^n$  فرض می‌گردد:

$$(L_n)^2 = \vec{tF}_1^n T \vec{tF}_1^n \quad (16)$$

آشکار است، بر اساس شکل (۲)، طول وتری است که نقطه تعادلی  $(n-1)$  را به نخستین نقطه ایستایی گام پیشگویی (a) وصل می‌کند.



شکل (۲)- بردار  $\vec{tF}_1^n$

با بهره‌جویی از شکل (۲)، برای بردار  $\vec{tF}_1^n$  معادله زیر پیدا می‌گردد:

$$\vec{tF}_1^n = \Delta u_1^n \vec{e}_1 + \Delta F_1^n \vec{e}_2 \quad (17)$$

در نتیجه، مقدار ثابت  $(L_n)^2$  به شکل زیر در می‌آید:

$$(L_n)^2 = \Delta u_1^n T \Delta u_1^n + \Delta F_1^n T \Delta F_1^n \quad (18)$$

در اینجا،  $\Delta F_1^n$  نمو نیروی داخلی در راستای محور  $P$  است که به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\Delta F_1^n = (\Delta \lambda_1^n - g_1^n) P \quad (19)$$

$$g_1^n = \frac{\tilde{r}_1^n T P}{P^T P} \quad (20)$$

خاطرنشان می‌نماید، برقراری معادله (۱۰) با توجه به رابطه (۱۶)، همان صفر شدن همزمان عاملهای بار نامیزان  $r_i^n$  و تغییر مکان تصحیح کننده  $\delta u_i^n$  در هر تکرار تصحیح کننده خواهد بود. یادآوری می‌کند، معادله این

فن، همان شکل رابطه (۱۰) را دارد. بنابراین، با جایگزین کردن رابطه (۱۶) در معادله درجه دوم (۱۱)، مقدار  $\delta\lambda_i^n$  محاسبه می‌گردد.

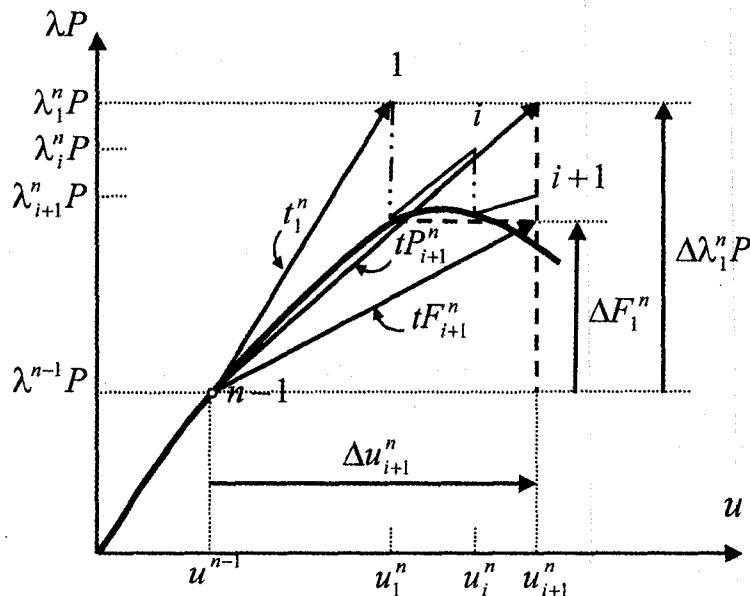
### ۲-۳- ثابت پنداشتن اندازه طول $tP_{i+1}^n$

در روش طول قوس ثابت، بردار  $\vec{t}_{i+1}^n$ ، در فضای یک بعدی، با رابطه (۱) نوشته شد. در این رابطه، بار  $P$  و تغییرمکان  $u$ ، در دو جهت مستقل از هم ( $\vec{e}_1$  و  $\vec{e}_2$ ) فرض گردیده‌اند. باید دانست، در سازه‌های با  $n$  درجه آزادی، هر دو عامل بار و تغییرمکان در امتداد تمامی درجات آزادی می‌توانند دارای مقدار باشند. بنابراین، نمی‌توان بردار بار و تغییرمکان را در دو جهت مستقل از هم فرض نمود. در اینجا، نویسنده‌گان بردار مزبور را در فضای چند بعدی به عنوان بردار طول نموی معرفی می‌کنند. در این صورت، بر اساس شکل (۲)، رابطه زیر برای آن برقرار می‌گردد:

$$t_{i+1}^n = \Delta u_{i+1}^n + \Delta \lambda_{i+1}^n P \quad (21)$$

در این رابطه،  $t_{i+1}^n$ ، نشانگر بردار طول نموی،  $\Delta \lambda_{i+1}^n P$  و  $\Delta u_{i+1}^n$ ، به ترتیب، نشانگر بردارهای تغییرمکان و بار نمای در سازه‌های چند درجه آزادی هستند. آشکار است، در بردار  $t_{i+1}^n$ ، هر دو عامل بار و تغییرمکان متغیر می‌باشند. باید دانست، در پاره‌ای از طولها، تنها متغیر تغییرمکان تصحیح کننده  $\delta u_i^n$  وارد می‌شود. در این صورت، با ثابت نگه داشتن مقدار آن در خلال تکرارها، مقدار تغییرمکان  $\delta u_i^n$  صفر می‌گردد. از میان اینها، یکی طول  $tP_{i+1}^n$  می‌باشد. بر اساس شکل (۳)، طول مزبور به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$tP_{i+1}^n = \Delta u_{i+1}^n + \Delta \lambda_i^n P \quad (22)$$



شکل (۳)- بردارهای  $tP_{i+1}^n$  و  $tF_{i+1}^n$

با ثابت نگه داشتن طول  $tP_{i+1}^n$  برابر مقدار آن در گام پیشگویی و استفاده از رابطه (۲۲)، معادله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\Delta u_{i+1}^n + \Delta \lambda_i^n P)^T (\Delta u_{i+1}^n + \Delta \lambda_i^n P) = (L_n)^2 \quad (23)$$

مقدار ثابت  $(L_n)^2$  با رابطه زیر مشخص می‌گردد:

$$(L_n)^2 = (\Delta u_1^n + \Delta \lambda_1^n P)^T (\Delta u_1^n + \Delta \lambda_1^n P) \quad (24)$$

با استفاده از رابطه‌های لازم، معادله درجه دوم زیر نتیجه خواهد شد:

$$a(\delta \lambda_i^n)^2 + b(\delta \lambda_i^n) + c = 0 \quad (25)$$

$$a = \delta u_i'^n T \delta u_i'^n \quad (26)$$

$$b = \delta u_i'^n T (\Delta u_i^n + \Delta u_i''^n + \Delta \lambda_i^n P) \quad (27)$$

$$c = (\Delta u_i^n + \Delta u_i''^n + \Delta \lambda_i^n P)^T (\Delta u_i^n + \Delta u_i''^n + \Delta \lambda_i^n P) - (L_n)^2 \quad (28)$$

از این رابطه‌ها، مقدار  $\delta \lambda_i^n$  محاسبه می‌شود. همانند فن پیشین و مطابق شکل (۳)، معادله (۲۳) هنگامی برقرار می‌گردد که نقطه تعادلی  $n$  بر روی نقطه  $a$  قرار گیرد. بنابراین، شیوه مزبور دارای همگرایی بینهایت است.

### ۳-۳-۳- ثابت نمودن مقدار طول $tF_{i+1}^n$

شکل (۳)، طول  $tF_{i+1}^n$  را نشان می‌دهد. این طول، تنها به تغییر مکان تصحیح‌کننده وابسته است. در واقع، می‌توان برای این عامل رابطه زیر را نوشت:

$$tF_{i+1}^n = \Delta u_{i+1}^n + \Delta F_1^n \quad (29)$$

با ثابت پنداشتن طول  $tF_{i+1}^n$  برابر مقدار آن در گام پیشگویی و استفاده از رابطه (۲۹)، معادله زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$(\Delta u_{i+1}^n + \Delta F_1^n)^T (\Delta u_{i+1}^n + \Delta F_1^n) = (L_n)^2 \quad (30)$$

از سوی دیگر، اندازه  $(L_n)^2$  برابر مقدار زیر است:

$$(L_n)^2 = tF_1^n T tF_1^n \quad (31)$$

سرانجام، بر اساس رابطه‌های (۲)، (۶) و (۳۰)، معادله درجه دوم زیر برای محاسبه  $\delta \lambda_i^n$  به دست می‌آید:

$$a(\delta \lambda_i^n)^2 + b(\delta \lambda_i^n) + c = 0 \quad (32)$$

$$a = \delta u_i'^n T \delta u_i'^n \quad (33)$$

$$b = 2\delta u_i'^n T (\Delta u_i^n + \Delta u_i''^n + \Delta F_1^n) \quad (34)$$

$$c = (\Delta u_i^n + \delta u_i^{n+} + \Delta F_1^n)^T (\Delta u_i^n + \delta u_i^{n+} + \Delta F_1^n) - (L_n)^2 \quad (35)$$

خاطرنشان می‌کند، نرخ همگرایی در این راهکار نیز بینهایت خواهد بود.

#### ۴- انتخاب ریشه درست

در راهکارهای مورد بحث، برای محاسبه ضریب بار نموی  $\delta\lambda^n$  در تکرارهای تصحیح‌کننده، نیاز به حل یک معادله درجه دوم می‌باشد. تعیین ریشه‌های معادله مزبور، به صورت زیر، وابسته به علامت میان

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad : \Delta = b^2 - 4ac$$

۱- اگر  $\Delta < 0$  باشد، معادله دارای ریشه موهومی است. این ویژگی نشانگر گذر از نقطه حدی می‌باشد. بنابراین، می‌توان علامت ضریب بار نموی را عوض کرد و با حل دوباره معادله، ضریب مزبور را به دست آورد.

۲- اگر  $\Delta = 0$  باشد، آنگاه، تنها یک ریشه قابل قبول خواهد بود.

۳- اگر  $\Delta > 0$  شود، دو ریشه به دست می‌آید. در این حالت، تنها یکی از آنها باید انتخاب گردد. برای انتخاب ریشه درست، نخست باید زاویه بین بردار تغییرمکان نموی تا تکرار پیشین  $(\Delta u_i^n)$ ، با هر یک از بردارهای تغییرمکان نموی حاصل از دو ریشه را محاسبه نمود. مقدار این زاویه، با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\cos \theta_j = \frac{\Delta u_i^n{}^T \Delta u_{i+1,j}^n}{|\Delta u_i^n| |\Delta u_{i+1,j}^n|} \quad j = 1, 2 \quad (1-4)$$

در این رابطه،  $\theta$  نشانگر ریشه انتخابی است. در این میان، هر یک که دارای زاویه مثبت باشد، به عنوان پاسخ معادله پذیرفته می‌شود. در صورتی که هر دو مثبت باشند ( $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ )، ضریب بار نموی وابسته به ریشه‌ای انتخاب می‌شود که به پاسخ خطی  $c/b$  نزدیکتر باشد.

#### ۵- بدون بعد کردن معادله‌ها

عاملهای معادله‌های فنایی پیشین، دارای بعدهای یکسانی نمی‌باشند. در آنها، ترکیبی از بعدهای بار، تغییرمکان و یا کار وارد شده‌اند. این ویژگی، سبب بروز مشکلهای عددی در تحلیل پارهای از مسئله‌ها می‌گردد. بنابراین، لازم است که این معادله‌ها به فضای بعدی یکسانی انتقال یابند. یادآوری می‌کند، پس از پیشنهاد رابطه طول قوس (۱۰) توسط کریسفیلد، پژوهشگران زیادی برای یک بعدی نمودن معادله مزبور تلاش نموده‌اند. از این میان، می‌توان کولار، کمل، برگان و راسبی را نام برد [۱۲ و ۱۳ و ۱۴]. باید دانست، در این شیوه‌ها، معادله شرط

تنها از ترکیب خطی اندازه بردار بار و تغییر مکان تشکیل می‌یابد. از سوی دیگر، در فنهای تحلیلی پیشنهادی، ترکیب‌های متفاوتی وجود دارد. بنابراین، لازم است که فن یک بعدی نمودن، مستقل از نوع رابطه دنبال شود. باید آگاه بود، در سال ۱۹۹۳، تعدادی از پژوهشگران رابطه‌ای را پیشنهاد نمودند که در آن بردارهای با مولفه‌های بار و تغییر مکان به فضایی با بعد کار انتقال می‌یافت [۷]. در نتیجه، با به کار بردن رابطه مزبور، تنها مولفه‌هایی از بردار تغییر مکان وارد تحلیل می‌گردند که در راستای بار خارجی باشند. این ویژگی موجب کاهش توانمندی فنها می‌شود. در این مقاله، نویسندها با حذف بعد کار از این رابطه، آن را به صورت بدون بعد زیر به کار می‌برند:

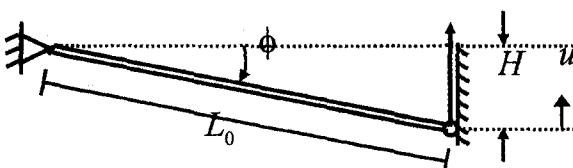
$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{i+1}^n \\ \Delta \lambda_{i+1}^n P \\ \Delta F_{i+1}^n \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \{\Delta_j u_{i+1}^n\} \\ \{\Delta \lambda_{i+1}^n P_j\} \\ \{\Delta_j F_{i+1}^n\} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \{\Delta_j u_{i+1}^n / \Delta_j u_1^n\} \\ \{\Delta \lambda_{i+1}^n P_j / \Delta \lambda_1^n P_j\} \\ \{\Delta_j F_{i+1}^n / \Delta \lambda_1^n P_j\} \end{Bmatrix} \quad (۳۶)$$

## ۶- مثالها

برای بررسی توانایی فنها پیشنهادی، نیاز به تحلیل چند مسأله غیرخطی می‌باشد. بر همین اساس، در این بخش به تحلیل یک خرپای مستوی و دو خرپای فضایی با رفتار غیرخطی هندسی پرداخته می‌شود. دو مثال نخست، دارای رفتاری با شاخه بازگشت بار هستند. مثال سوم، با رفتاری پیچیده‌تر، افزون بر شاخه بازگشت بار، دارای شاخه بازگشت تغییر مکان نیز خواهد بود. شایان توجه است، برای انجام تحلیل در گامهای پیشگویی هر گام بارگذاری، از نمو اندازه تغییر مکان (طول قوس استوانه‌ای) بهره‌جویی می‌گردد. برای محاسبه نمو مزبور در هر گام، رابطه خودکار زیر به کار می‌رود:

$$|\Delta u_1^n| = \pm |\Delta u_1^{n-1}| \left( \frac{J_D}{J_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۳۷)$$

در اینجا،  $|\Delta u_1^n|$  و  $|\Delta u_1^{n-1}|$ ، به ترتیب، اندازه بردار تغییر مکان نموی در گامهای پیشگویی از نموهای  $n$  و  $(n-1)$  ام هستند. همچنین،  $J_{n-1}$  تعداد تکرارهای گام  $(n-1)$  و  $J_D$  تعداد تکرارهای است که به وسیله تحلیلگر تعیین می‌شود. یادآوری می‌کند، دو مثال نخست دارای تعداد درجه‌های آزادی کمی می‌باشند. از این رو، برای جلوگیری از افزایش بیش از حد مقدار  $|\Delta u_1^n|$ ، اندازه بیشینه آن در مثالهای یکم و دوم، به ترتیب، به مقدارهای  $(1.5 * |\Delta u_1^1|)$  و  $(|\Delta u_1^1|)$  محدود می‌گردد.



شکل (۴)- میله استوانه‌ای خیزدار

### ۱-۶- میله استوانه‌ای خیزدار

سازه شکل (۴)، از یک میله استوانه‌ای دو سر مفصل با یک درجه آزادی تشکیل می‌شود [۱۵]. مشخصه‌های این سازه به صورت:  $E = 10^7 \text{ lb/in}^2 (6.9 * 10^4 \text{ N/mm}^2)$ ,  $A = 1 \text{ in}^2 (633.524 \text{ mm}^2)$ ,  $L_0 \cos \phi = 100 \text{ in} (2517 \text{ mm})$  و  $H = 1 \text{ in} (25.17 \text{ mm})$  فرض می‌گردند. در اینجا،  $A$ ,  $E$ ,  $L_0$  و  $\phi$  به ترتیب، سطح مقطع، ضریب کشسانی مواد و طول نخستین هر عضو، و  $H$ ، جست خرپا می‌باشد. زاویه  $\phi$  در شکل

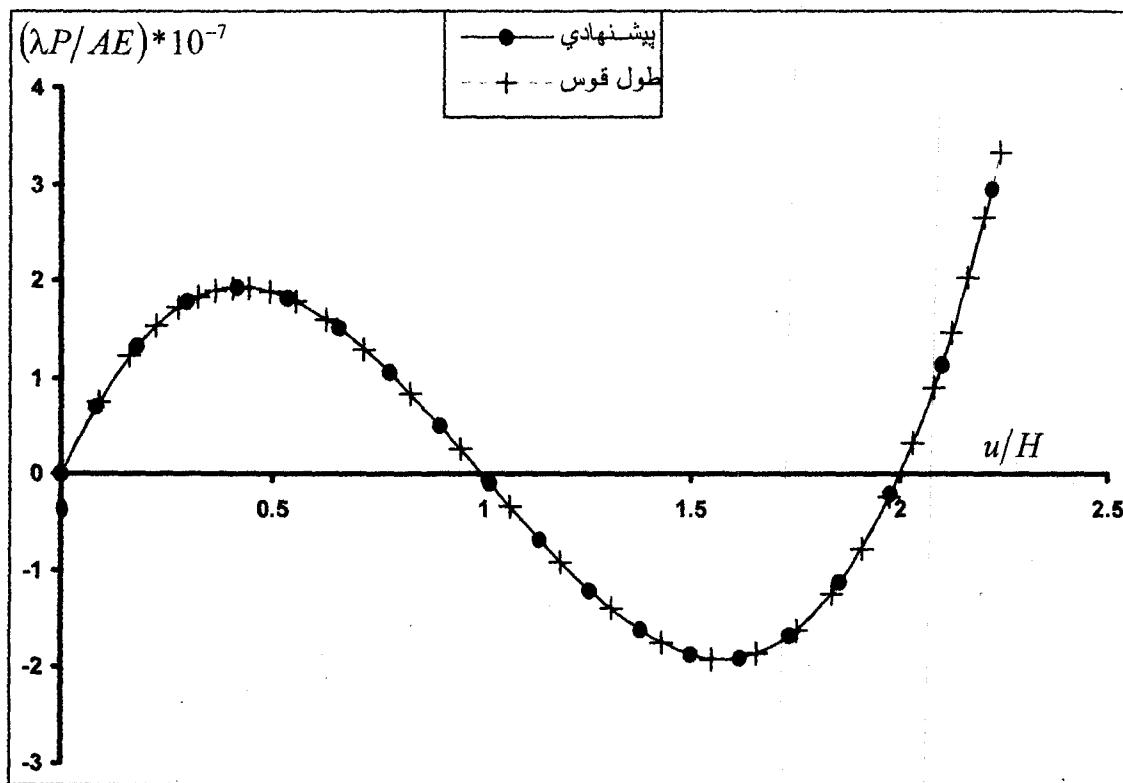
(۴) مشخص است. برای انجام تحلیل، اندازه‌های بردار بار مبدأ ( $P$ ), ضریب بار نموی در نخستین گام بارگذاری ( $\Delta \lambda_1^1$ ), ضریب بار بیشینه ( $\lambda_{\max}$ ), تعداد تکرارهای لازم ( $J_D$ ), تعداد تکرار بیشینه ( $J_{\max}$ ) و مقدار خطای مجاز ( $\epsilon_C$ ), به ترتیب، برابر با:  $4.45N$ ,  $0.8, 1 \text{ lb}$ ,  $3, 4, 5$  و  $10^{-5}$  اختیار می‌شوند. معیار خطای بر اساس نسبت درایه‌های بردار تغییر مکان نامیزان بر کل می‌باشد.

بر اساس جدول (۱)، تمامی روش‌های پیشنهادی توانایی تحلیل سازه‌ها را با کمترین تعداد تکرار در هر نمو دارند. در واقع، هر نمو با دو تکرار انجام می‌پذیرد. یکی از تکرارها همان تحلیل در گام پیشگویی است. بنابراین، برای تصحیح پاسخ گام پیشگویی تنها به یک تکرار نیاز می‌باشد. این ویژگی، نشانگر مرتبه همگرایی بینهایت فنهای پیشنهادی خواهد بود.

شیوه‌های مزبور، دارای ۱۹ نمو و ۳۸ تکرار هستند. بر خلاف آن، روش طول قوس ثابت با داشتن نرخ همگرایی درجه دوم، به ۴۵ نمو و ۱۵۰ تکرار نیاز دارد. این نتیجه، نشانگر تأثیر زیاد نرخ همگرایی در هزینه تحلیل است. مسیر ایستایی طی شده با این فنا را می‌توان در شکل (۵) دید. با توجه به جدول (۱)، راهکار فورد و استیمر دارای تعداد نمو و تکرار بیشتری نسبت به فن طول قوس ثابت می‌باشد. علت را می‌توان در تقریب سطح تکرار روش طول قوس ثابت به صورت خطی دانست. باید افزود، نمودار پاسخ میله استوانه‌ای خیزدار در شکل (۵)، دارای شاخه بازگشت بار در طول مسیر ایستایی می‌باشد.

جدول (۱)- تعداد نمو و تکرار در تحلیل میله استوانه‌ای خیزدار

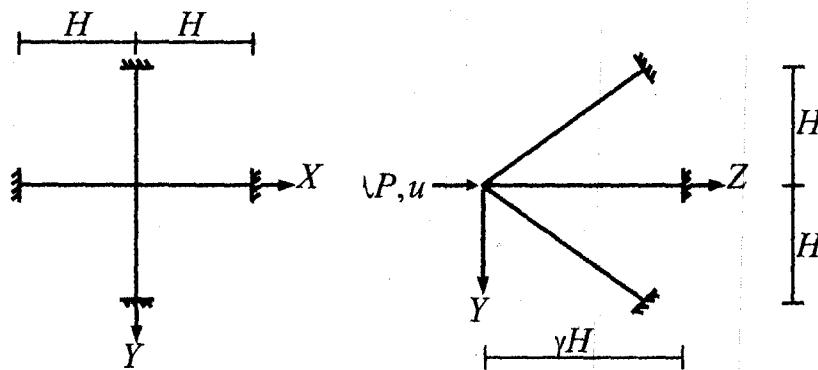
روش	تعداد نمو	تعداد تکرار
تمامی شیوه‌های پیشنهادی	۱۹	۳۸
طول قوس ثابت	۴۵	۱۵۰
فورد و استیمر	۵۴	۲۱۱



شکل (۵)- نمودار بار- تغییر مکان میله استوانه‌ای خیزدار

## ۶-۲- خرپای فضایی ۴ عضوی

این سازه دارای شمار کمی درجه‌های آزادی و با ویژگی شاخه بازگشت بار در مسیر ایستایی می‌باشد. مسئله مزبور، برای بررسی پایداری و بارهای کمانشی نیز به کار رفته است [۱۶ و ۱۷].



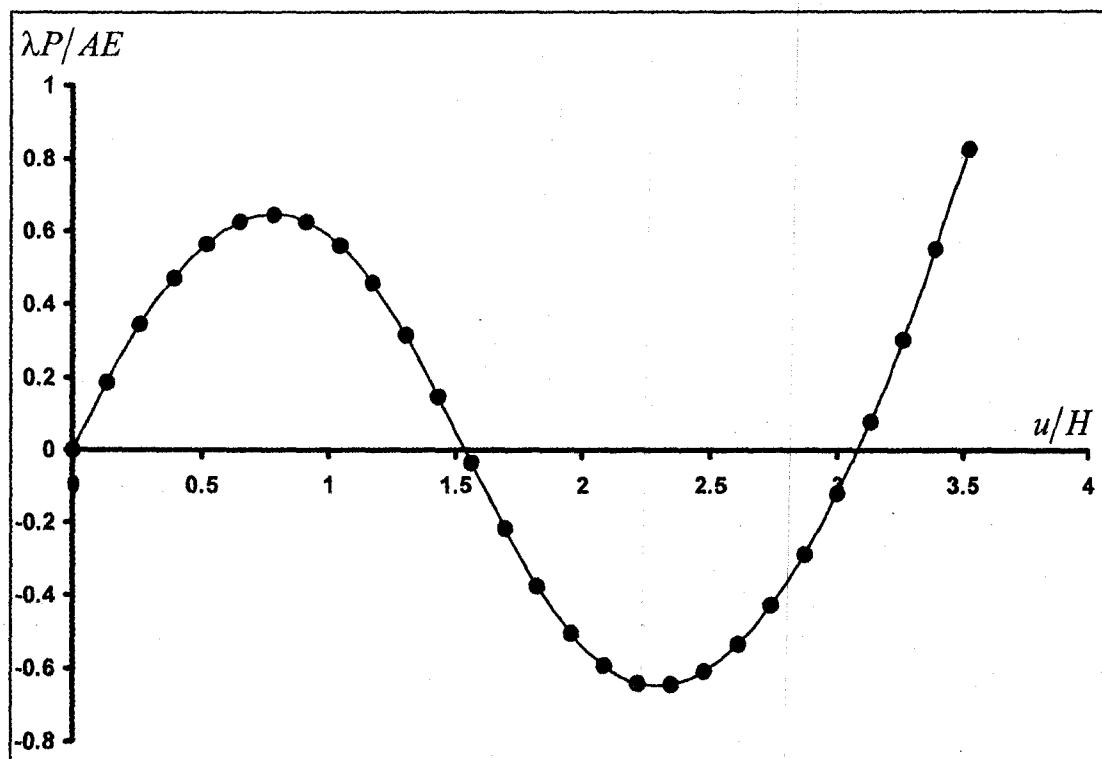
شکل (۶)- خرپای فضایی ۴ عضوی

مشخصه‌های سازه معلوم و اعداد بدون بعد می‌باشند. عاملهای مزبور برابر با:  $H = 100$ ,  $E = 100$ ,  $A = 1$ ,  $J_D = 2$ ,  $\lambda_{\max} = 0.9$ ,  $\Delta\lambda_1^1 = 0.2$ ,  $P = 100$  و  $\gamma = \sqrt{2.375}$  هستند. برای انجام تحلیل، مقدارهای:  $\epsilon_C = 10^{-4}$  و  $J_{\max} = 10$  فرض می‌گردند.

بر اساس نتایج های جدول (۲)، فنهای طول قوس ثابت، فورد و استیمر و ثابت نمودن مقدار طول  $tF_{i+1}^n$ ، در پیمودن مسیر ایستایی سازه در شکل (۷) شکست می خورند و به پاسخ همگرا نمی شوند. شیوه های مزبور، در گذر از شاخه بازگشت بار به تعداد تکرار زیادی نیاز خواهند داشت. علت این ویژگی را می توان، به ترتیب، در نرخ همگرایی پایین و زیاد بودن مقدار نیروهای نامیزان دانست. اینها، سبب واگرایی تحلیل می گردند. برخلاف دو روش مزبور، دو راهکار پیشنهادی (۱-۳) و (۲-۳)، با تعداد تکرار یکسان، پاسخ مسئله را به دست می دهند.

جدول (۲)- تعداد نمو و تکرار در تحلیل خرپای فضایی ۴ عضوی

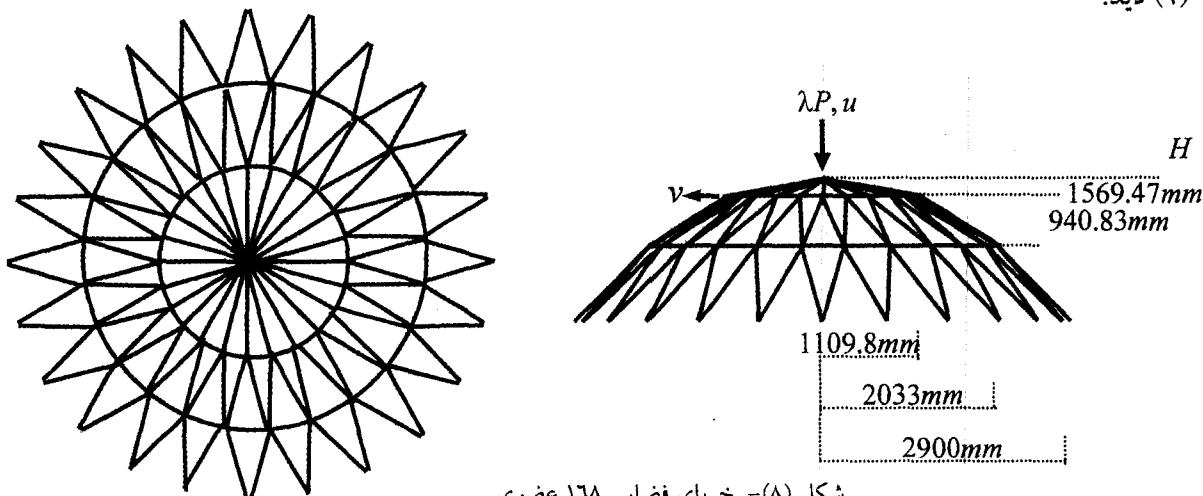
تعداد تکرار	تعداد نمو	روش
۵۴	۲۷	ثابت پنداشتن اندازه بردار $\bar{t}_{i+1}^n$ (۱-۳)
۵۴	۲۷	ثابت پنداشتن اندازه طول $tP_{i+1}^n$ (۲-۳)
-	-	ثابت نمودن مقدار طول $tF_{i+1}^n$ (۳-۳)
-	-	طول قوس ثابت
-	-	فورد و استیمر



شکل (۷)- نمودار بار- تغییر مکان خرپای فضایی ۴ عضوی

## ۳-۶- خرپای فضایی ۱۶۸ عضوی

سازه شکل (۸)، دارای ۱۶۸ عضو و ۱۴۷ درجه آزادی می‌باشد [۱۸]. این خرپا، تعداد درجه آزادی فراوانی دارد. همچنین، نویسنده‌گان به سازه اجازه تغییر مکان زیادی را می‌دهند. با این کار، مسیر ایستایی آن، افزون بر شاخه بازگشت بار، دارای رفتار پیچیده بازگشت تغییر مکان نیز خواهد بود. رفتار مزبور را می‌توان در شکل (۹) دید.



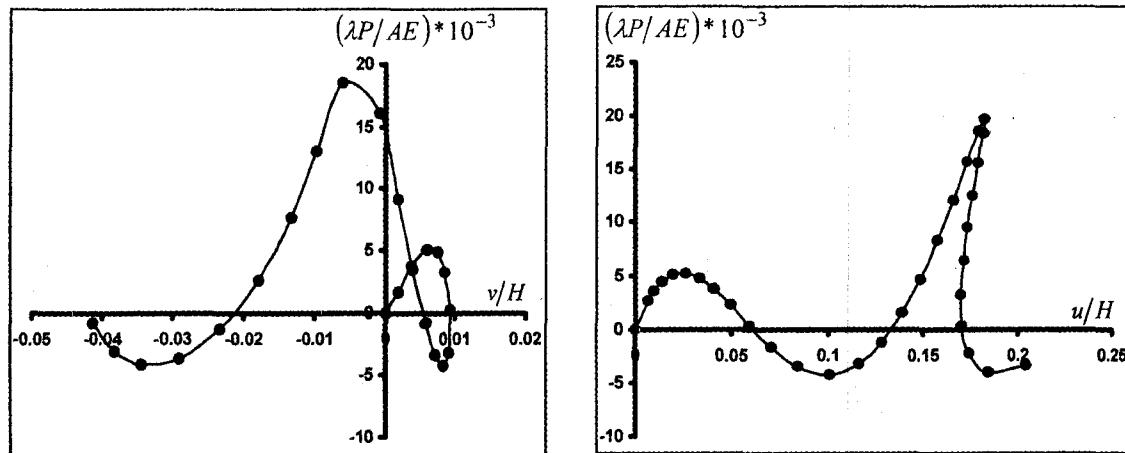
شکل (۸)- خرپای فضایی ۱۶۸ عضوی

مشخصه‌های سازه شکل (۸) به صورت:  $H = 1790.22 \text{ mm}$ ,  $E = 10^3 \text{ N/mm}^2$ ,  $A = 100 \text{ mm}^2$ ,  $J_D = 6$ ,  $\lambda_{\max} = 2$ ,  $\Delta\lambda_1^1 = 0.25$ ,  $P = 1000 \text{ N}$ ,  $J_{\max} = 20$  و  $\epsilon = 10^{-4}$  انتخاب می‌شوند.

نتیجه‌های تحلیل جدول (۳)، نشانگر موفقیت هر دو شیوه (۱-۳) و (۲-۳) در تحلیل این سازه می‌باشد. راهکارهای مزبور، نتیجه‌های یکسانی را به دست می‌دهند. نمودار بار- تغییر مکان این روشها، برای دو درجه آزادی  $u$  و  $v$  در شکل (۹) به نمایش در آمده است. نمودارهای مزبور، رفتار پیچیده‌ای را برای این خرپای فضایی نشان می‌دهند. این ویژگی، نمایانگر توانایی خوب فهای (۱-۳) و (۲-۳) می‌باشد. باید دانست، استفاده از رابطه بدون بعد (۳۶) در این شیوه‌ها، سبب بهبود فرآیند تحلیل آنها می‌شود.

جدول (۳)- تعداد نمو و تکرار در تحلیل خرپای فضایی ۱۶۸ عضوی

تعداد تکرار	تعداد نمو	روش
۱۰۶	۲۰	ثبت پنداشتن اندازه بردار $\vec{t}_{i+1}^n$ (۱-۳)
۱۰۶	۲۰	ثبت پنداشتن اندازه طول $tP_{i+1}^n$ (۲-۳)

۲- نمودار برای تغییرمکان  $v$ ۱- نمودار برای تغییرمکان  $u$ 

شکل (۹)- نمودار بار- تغییرمکان خربای فضایی ۱۶۸ عضوی

## ۷- نتیجه‌گیری

با بررسی روش‌های پیشنهادی و نیز فن طول قوس ثابت، پاره‌ای از نکته‌ها آشکار گردیدند. با توجه به نتیجه‌های مقاله، بی بعد نمودن معادله‌های به کار رفته در هر یک از شیوه‌های تحلیلی، سبب بهبود همگرایی در آنها خواهد شد. لیکن، باعث برتری این شیوه‌ها نسبت به یکدیگر نمی‌گردد. همچنین، با توجه به نتایج تحلیل، حل معادله درجه دوم در روش‌های پیشنهادی اشکالی در تحلیل مسائل‌ها به وجود نیاورده است. از سوی دیگر، خطی‌سازی فن طول قوس ثابت توسط فورد و استیمر، سبب بهبود همگرایی در این راهکار نمی‌گردد. بنابراین، بی بعد کردن و خطی‌نمودن معادله‌های درجه دوم ویژگی‌های اصلی در بهبود شیوه‌های تحلیل غیرخطی در مسائل‌های پیچیده نمی‌باشد.

از میان راهکارهای پیشنهادی، فن‌های (۱-۳) و (۲-۳)، با بهبود نرخ همگرایی روش طول قوس ثابت، بهترین نتیجه‌ها را در دسترس قرار می‌دهند. یادآوری می‌کند، در شیوه (۲-۳)، بردارهای بار و تغییرمکان مستقل فرض نشده‌اند. با این حال، دارای برتری نسبت به فن (۱-۳)، با فرض بردارهای بار و تغییرمکان در دو جهت مستقل، نمی‌باشد. بنابراین، بیشترین کاستی فن طول قوس ثابت در داشتن نرخ همگرایی پایین خواهد بود.

## ۸- منابع و مراجع :

- 1-Chen,W.F. and Lui,E.M., 1991, "Stability design of steel frames",Crc Press.
- 2-Zinkiewicz,O.C.,1971,"Incremental displacement in non-Linear analysis," Int.J. Numer.Meth.Eng.,Vol.3,pp.587-592.
- 3-Riks,E., 1979,"An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems,"Int.Solid.Struct.,Vol.15,pp.529-551.

- 4-Powell,G. and Simons,J., 1981,"Improved iteration strategy for nonlinear structures," Int.J.Numer.Meth.Eng., Vol.17,pp.1455-1467.
- 5-Chen,H., 1993,"Work-increment-control method for nonlinear analysis," Int.J.Numer. Meth.Eng., Vol.36,pp.909-930.
- 6-Crisfield,M.A., 1981,"A fast incremental/ iterative solution procedur that handles 'snap-through'," Comput.Struct.,Vol3,pp.55-62.
- 7-Lin,T.W., Yang,Y.B. and Shiao,H.T., 1993,"A work weighted state vector control method for geometrically nonlinear analysis," Comput. Struct., Vol. 46, No.4, pp.689-694.
- 8-Krishnamoorthy,C.S., Ramesh,G. and Dinesh,K.U., 1996,"Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques," Finit. Elem. Anal. Design.,Vol.22, pp.109-142.
- 9-Hinton,E., Owen,D.R.J. and Taylor,C.,Recent, 1982, "Advances in nonlinear computational mechanics", Pinneridge Press Limited Swansea,U.K..
- 10-Schweizerhof,K.H. and Wiggers,K.H., 1986, "Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis," Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.59, pp.261-279.
- 11-Ford,B.W.R. and Stiemer,S.F., 1987,"Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis,"Comput.Struct.,Vol.27, pp.625-630.
- 12-Kolar,R. and Kamel,H.A., 1985,"On some efficient solution algoritms for nonlinear finite element analysis," Finit.Elem.Meth.Non.Prob.,pp.425-445.
- 13-Bergan,P.G., 1980,"Solution algoritm for nonlinear structural problems," Comput. Struct., Vol.12,pp.497-509.
- 14-Rasby,S.N.A., 1991,"Solution techniques in nonlinear structural analysis," Comput.Struct.,Vol.40,No.4,pp.985-993.
- 15-Crisfield,M.A., 1991, "Non-linear finite element analysis of solids and structures", J. Willy & Sons,New York.
- 16-Nishino,F., Hartono,W., Fujiwara,O. and Karasudhi,P., 1987, "A study of the stability and behavior at the critical point by the taylor," Struc. Eng./ Earth. Eng., Vol.4,No.1,pp.1-9.
- 17-Casciaro,R., Salerno,G. and Lanzo,A.D., 1992, "Finite element asymptotic analysis of slender elastic structures: A simple approch," Int.J.Numer.Meth.Eng.,Vol.35, pp.1397-1426.
- 18-Papadrakakis,M. and Pantazopoulos,G., 1993, "A survey of quasi-newton with reduced storage," Int.J.Numer.Meth.Eng.,Vol.36,pp.1573-1596.