

به دست آوردن تابعهای شکل هرمیتی در اجزای محدود

محمد رضایی پزند^{۱*}، محمدحسن فرشچی^۲

۱- استاد گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

* مشهد، صندوق پستی ۱۱۱۱-۹۱۷۷۵

mrpajand@yahoo.com

(دریافت مقاله: تیر ۱۳۸۲، پذیرش مقاله: شهریور ۱۳۸۴)

چکیده- در این مقاله روشهای گوناگون یافتن تابعهای شکل هرمیتی مورد توجه قرار می گیرند. همچنین، از ناتوانایی آنها در آفرینش اجزای با درجه های آزادی مورد نیاز یاد می شود. سپس روش اجزای «هم مرتبه» برای محاسبه تابعهای درونیاب هرمیتی پیشنهاد می گردد. در ادامه، تابعهای شکل چند جزء با این روش پیدا و به نظر خوانندگان می رسند. تاکید می شود، راهکار پیشنهادی کلی و نظامدار است و نیازی به حدس تابعها ندارد.

کلید واژگان: جزء خمشی، تابع شکل، اجزای هرمیتی، جزء هم مرتبه، تابع میدان، سازگاری

ویژگیهای مشابهی نیز برای تابعهای دو و سه بعدی وجود دارند. با در دسترس بودن تابعهای شکل هرمیتی، تغییر مکان درون جزء (ϕ) را به مقدارهای گرهی $(\phi_i^{(k)})$ می توان ارتباط داد.

$$\phi = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^Q H_{ki}^{(Q)} \phi_i^{(k)} \quad (3)$$

باید آگاه بود که یافتن تابعهای شکل اجزای هرمیتی، نسبت به نوع ناهرمیتی، دشوارتر است. به همین سبب، روشهای تعیین این تابعهای شکل به طور محدود گسترش یافته اند. افزون بر این، شیوه های موجود توانایی محاسبه تابعهای جزء با درجه های آزادی دلخواه را ندارند. در این میان، برخی پژوهشگران از فرضهای ساده کننده بهره می جویند. شایان توجه است، وارد کردن شرطهای مزبور از کارایی جزء می کاهد. همچنین، این روشها نمی توانند سازگاری زیادی را، به ویژه در اجزای خمشی، فراهم کنند. از اجزای هرمیتی در مسأله های مستوی و خمشی بهره جویی می شود. برای نمونه، می توان از اجزای درجه بالای مستوی و خمشی که توسط سن گوپتا و داس گوپتا

۱- مقدمه

درجه های آزادی در اجزای هرمیتی از تابع میدان و مشتقهای آن تشکیل می گردند. در حالت کلی، تابعهای شکل اجزای مزبور با نماد $H_{ki}^{(Q)}$ مشخص می شوند. در اینجا، Q بیشینه درجه مشتق تابع میدان در درجه های آزادی است. زیر نویس k ، بین صفر تا Q می باشد و مرتبه مشتق را در درجه آزادی وابسته نشان می دهد. محل گرهی را که درجه آزادی به آن نسبت داده می شود با i مشخص می کنند. به طور کلی، تابعهای شکل هرمیتی ویژگی زیر را دارند:

$$\frac{d^r H_{ki}^{(Q)}(x_p)}{dx^r} = \delta_{ip} \delta_{kr} \quad i, p = 1, 2, \dots, m$$
$$k, r = 0, 1, \dots, Q \quad (1)$$

در این رابطه، m شمار گره های جزء و δ_{st} دلتای کرونکر است که با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\delta_{st} = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases} \quad (2)$$

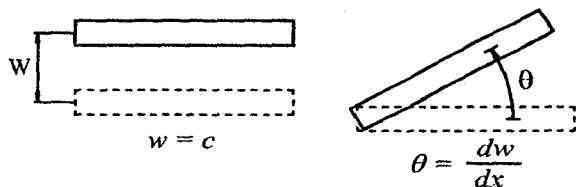
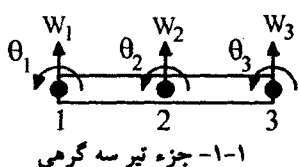
یکسانی را ارائه دهند. این حرکت نباید در درون جزء هیچ نوع تنش ایجاد کند. می توان نشان داد، شرط مزبور در صورتی برقرار است که مجموع تابعهای شکل درجه-های آزادی انتقالی، برابر یک باشد.

۲-۲- حرکت دورانی جسم سخت

هر جزء محدود، باید حالت حرکت دورانی جسم سخت را ارائه دهد. در این حالت، جزء به گونه ای دوران می یابد که نخست، هیچیک از نقطه های آن نسبت به یکدیگر دوران ندارند و دوم، حرکت جسم سخت انتقالی در کل جزء به وجود نمی آید. این گونه حرکت نباید هیچ نوع تنش را در داخل جزء ایجاد کند. با انتخاب مناسب مقدار درجه های آزادی و استفاده از تابعهای شکل، برقراری شرط مزبور را می توان آزمود. یادآوری می کند، با مجموع حاصلضرب تابعهای شکل در تغییر مکانهای گرهی برابر با حرکت جسم سخت، باید به تابع میدان حرکت جسم سخت رسید.

۲-۳- حالت کرنش ثابت

تابع تغییر مکان باید توانایی برقراری حالت کرنش ثابت غیرصفر را داشته باشد. بنابراین، تابع میدان مسأله های خمشی دست کم باید از درجه دو باشد. برای نمونه، شکل ۱-۱ حالت های حرکت جسم سخت و کرنش ثابت را برای جزء تیر سه گرهی یک بعدی نشان می دهد.



معرفی شده اند، نام برد [۱،۲]. با وجود این، بیشترین کاربرد اجزای هرمیتی در مسأله های خمشی است. بنابراین در این مقاله از اجزای مزبور، بیشتر سخن به میان می آید. در ادامه بحث، نیازها و راهکارهای موجود برای یافتن تابعهای شکل هرمیتی بررسی می شوند. پس از آن، یک روش نظامدار برای حساب کردن تابعهای درونیاب پیشنهاد می شود.

۲- شرطهای سازگاری و کامل بودن

پیوستگی در مسأله های خمشی از نوع C^1 است. در این پیوستگی، درجه های آزادی باید بتوانند افزون بر تابع میدان در روی پهلوی جزء، شیب آن را نیز در راستای عمود بر پهلو، به گونه یکتایی تعریف کنند. در حقیقت، دلیل اصلی وجود درجه های آزادی از گونه مشتق تابع میدان، امکان ایجاد پیوستگی C^1 در جزء محدود است. خاطرنشان می شود که برپا کردن جزء های با پیوستگی C^1 دشوارتر از جزء های با پیوستگی C^0 است. به بیان دیگر، حدس جمله های تابع میدانی که بتواند شرطهای پیوستگی C^1 را برآورد، آسان نیستند. از این رو بسیاری از اجزای موجود، در مرزهای خود سازگاری کامل ندارند. با وجود این، چنانچه اجزای مزبور بتوانند در آزمونهای عددی، مانند آزمون وصله، نتیجه های مناسبی را به دست دهند، مورد استفاده قرار می گیرند.

اینک، شرط کامل بودن تابع میدان در مسأله خمشی مورد بحث قرار می گیرد. به طور معمول، هندسه اجزای خمشی نسبت به تغییر مکان، به وسیله تابعهای ساده تری تعریف می شوند. بنابراین شرط کامل بودن در این اجزا به صورت زیر خلاصه می شود [۳]:

۲-۱- حرکت انتقالی جسم سخت

این اجزا باید بتوانند حالت حرکت انتقالی جسم سخت را ایجاد کنند. به سخن دیگر، تمام نقطه های جسم بدون هرگونه انتقالی نسبت به هم، باید مقدار تغییر مکان

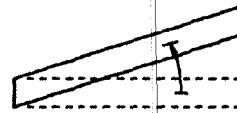
شکل اجزای چهار پهلوئی ویژه‌ای را در دسترس قرار دهند. محل گره‌های این جزءها، مشابه اجزای مستطیلی لاگرانژی است. درجه‌های آزادی در هر گره، شامل تمام مشتقات تابع میدان است [۴]. خاطر نشان می‌کند که وجود درجه‌های آزادی درونی، کمک فراوانی به دقت تحلیل نمی‌کنند. همچنین پژوهشگران نشان داده‌اند که

منظور کردن درجه‌های آزادی از گونه $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ و مشابه آن، ممکن است رفتار جزء را سخت کند [۱].

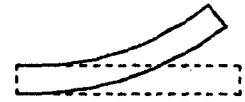
از سوی دیگر، در مفید بودن استفاده از اجزای مثلثی، به دلیل پوشاندن بهتر مرزهای دلخواه، تردیدی وجود ندارد. کاستیهای روش غیرمستقیم، با شدت بیشتری برای جزءهای مثلثی مشکل زا هستند. همچنین، نمی‌توان روشهای ال-زفرانی و کوکسن را برای اجزای مزبور به کاربرد. در نتیجه، به روشی کلی نیاز است که بتواند تابعهای شکل این اجزا را به دست دهد.

جدا از اینها، شیوه‌های دیگری نیز برای یافتن تابعهای شکل ارائه شده‌اند. آن روشها فقط در حالت‌های ویژه کاربرد دارند و نمی‌توان به صورت کلی از آنها بهره جست. برای نمونه، می‌توان از روش آلمن برای محاسبه تابعهای جزء AT نام برد [۵]. باید افزود، بته روشی برای محاسبه تابعهای شکل اجزای ویژه ارائه داده است [۳]. این شیوه ویژگی‌ای دارد که برای محاسبه تابعهای شکل هرمیتی نیز مفید است.

در روش بته، از تابعهای شکل یک جزء برای برپایی تابعهای درونیاب جزء دیگر بهره‌جویی می‌شود. درجه‌های آزادی یک جزء، با وارد کردن قیدهایی بر درجه‌های آزادی جزء دیگر به دست می‌آیند. در حالت کلی، یافتن مستقیم قیدهای مزبور دشوار است. با این حال، می‌توان آنها را به گونه دیگری وارد نمود. در ادامه کار، از نکته‌های مزبور استفاده می‌شود و روش کلی برای پیدا کردن تابعهای شکل اجزای هرمیتی پیشنهاد می‌گردد. باید دانست، شرط اصلی در روش بته، وجود جزئی است که



$$\beta = 0, \quad \frac{dw}{dx} = \gamma$$



$$\beta = cx, \quad w = \frac{c}{2} x^2$$

۳-۱- حالت کرنش ثابت برشی و خمشی

شکل ۱ حرکت جسم سخت و کرنش ثابت

در این شکل، C عامل ثابت است. زاویه دوران با θ ، میدان تغییر مکان با w و زاویه دوران مقطع با β مشخص شده است.

۳- روش اجزای هم مرتبه

در میان روشهای موجود برای محاسبه تابعهای شکل هرمیتی، شیوه غیرمستقیم بسیار کلی می‌باشد. با وجود این، دشوارترین گام این روش، تعیین جمله‌های تابع میدان است. برای یافتن تابعهای شکل ناهرمیتی نیز این دشواری پابرجا می‌باشد.

در حقیقت، چگونگی انتخاب جمله‌های تابع میدان، به محل قرارگیری گره‌ها و نوع درجه‌های آزادی بستگی دارد. این جمله‌ها را باید به گونه‌ای برگزید که شرط سازگاری، نه تنها در گره‌ها، بلکه در مرزهای مشترک نیز برقرار باشد. به سخن دیگر، تابع میدان و نیز شیب عمودی بر مرزها، باید خم یگانه ارائه نمایند. آشکار است که تعداد جمله‌های این خم، باید با شمار درجه‌های آزادی برابر باشد. افزون بر این، تابع میدان باید شرطهای کامل بودن را نیز برقرار کند. بر این پایه، حدس جمله‌های تابع میدان برای اجزای هرمیتی با دشواری بیشتری همراه است.

می‌توان نشان داد که روشهای ال-زفرانی و کوکسن، توانایی به دست آوردن تابعهای شکل اجزای مورد نیاز را ندارند. به سخن دیگر، این شیوه‌ها یا تابعهای شکل را نمی‌توانند پیدا کنند و یا پاسخهایی تقریبی به دست می‌دهند. در واقع، روشهای مزبور فقط می‌توانند تابعهای

(۴) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\Phi = [N]\{\Phi_e\} = [n]\{\phi_e\} \quad (5)$$

در روش غیرمستقیم، هر دسته از درجه‌های آزادی بر پایه دسته دیگر قابل دسترسی است. به سخن دیگر، رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\{\Phi_e\} = [G]\{\phi_e\} \quad (6)$$

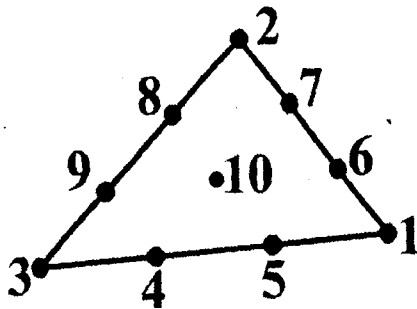
ماتریس هندسی $[G]$ ، از وارد کردن درجه‌های آزادی $\{\phi_e\}$ ، در تابعهای شکل $[n]$ به دست می‌آید. آشکار است، هرکدام از تابعهای شکل n_i را می‌توان به عنوان یک درآیه از ماتریس سطری جمله‌های تابع میدان در نظر گرفت. همچنین، با وارون‌سازی ماتریس $[G]$ ، بردار $\{\phi_e\}$ بر حسب $\{\Phi_e\}$ حساب می‌شود.

$$\{\phi_e\} = [G]^{-1}\{\Phi_e\} \quad (7)$$

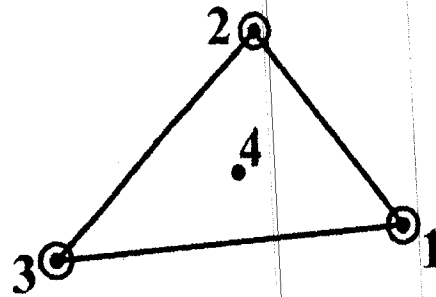
با جایگذاری رابطه (۷) در (۵)، ماتریس تابعهای شکل $[N]$ به صورت زیر در می‌آید:

$$[N] = [n][G]^{-1} \quad (8)$$

این رابطه چگونگی یافتن تابعهای شکل یک جزء را به وسیله جزء دیگر نشان می‌دهد. پیشتر اشاره شد که حدس جمله‌های تابع میدان در اجزای هرمیتی دشوار است. به همین سبب، بسیاری از پژوهشگران، تابع میدان را با وارد کردن فرضیهایی بر ضریبهای چند جمله‌ایهای کامل انتخاب می‌کنند.



$$\bullet i \{u_i, v_i\}$$



$$\odot i \left\{ u_i, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i, v_i, \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_i \right\}$$

$$\bullet i \{u_i, v_i\}$$

شکل ۲ اجزای هم مرتبه لاگرانژی و هرمیتی

بتواند میدان درونیاب جزء مورد نظر را ایجاد نماید. تابعهای شکل جزء مزبور باید معلوم باشند. اجزای فراوانی می‌توان انتخاب نمود که توانایی ارائه میدان جزء مورد نظر را داشته باشند. چنانچه، شمار درجه‌های آزادی این جزء یکسان با جزء مورد نظر انتخاب شود، «جزء هم‌مرتبه» نام خواهد داشت. می‌توان نتیجه گرفت، تابعهای میدان در اجزای هم‌مرتبه، دارای جمله‌های مشابه هستند. برای نمونه، دو جزء شکل ۲ هم مرتبه‌اند.

پژوهشگران زیادی از اجزای کنونی در تحلیل‌های گوناگون، به ویژه مسأله‌های مستوی، بهره جسته‌اند. آشکار است، تابع میدان در هر دو جزء شکل ۲ از نوع درجه سه کامل می‌باشد. همچنین، شمار درجه‌های آزادی در آنها یکسان است. به این سبب، آنها اجزای «هم‌مرتبه» می‌باشند. مهمترین ویژگی اجزای هم‌مرتبه، یکسان بودن تابعهای میدان آنها است. بنابراین، چنانچه تابعهای شکل یکی از آنها معلوم باشد، تابع درونیاب دیگری نیز قابل دسترسی خواهد بود.

$$\Phi = \sum_{i=1}^m N_i \Phi_i = \sum_{i=1}^m n_i \phi_i \quad (4)$$

در اینجا، m شمار درجه‌های آزادی است. تابعهای شکل اجزای هم‌مرتبه با N_i و n_i و درجه‌های آزادی آنها با Φ_i و ϕ_i مشخص شده‌اند. این درجه‌های آزادی، می‌توانند شامل متغیر میدان و مشتقهای آن باشند. رابطه

$$n_3 = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)$$

$$n_4 = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)$$

(۹)

با وارد کردن درجه‌های آزادی جزء تیر دوگرهی، به تابعهای شکل جزء چهارگرهی، ماتریس [G] و وارون آن محاسبه می‌شوند.

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{L} & \frac{9}{L} & \frac{0}{9} \\ \frac{2L}{0} & \frac{L}{1} & \frac{L}{0} & \frac{2L}{0} \\ -1 & 11 & 9 & -9 \\ \frac{L}{L} & \frac{2L}{2L} & \frac{2L}{2L} & \frac{L}{L} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[G]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{100}{135} & \frac{4L}{27} & \frac{35}{135} & \frac{10L}{135} \\ \frac{135}{35} & \frac{10L}{10L} & \frac{100}{100} & \frac{135}{-4L} \\ \frac{135}{135} & \frac{135}{135} & \frac{135}{135} & \frac{27}{27} \end{bmatrix} \quad (11)$$

سرانجام، تابعهای شکل تیر دوگرهی چنین به دست

$$N_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \quad \text{می‌آیند:}$$

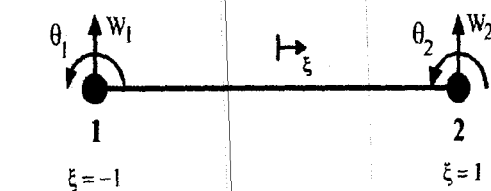
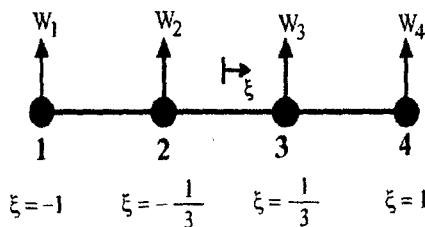
$$N_2 = \frac{L}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$N_4 = \frac{L}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

(۱۲)

در اینجا، L درازای تیر می‌باشد. تابعهای N_1 تا N_4 ، همان تابعهای شکل جزء تیر دوگرهی با درجه‌های آزادی $\theta_1, w_1, \theta_2, w_2$ هستند.



شکل ۳ اجزای تیر هم‌مرتبه از درجه سه

این نکته، سبب بروز کاستیهایی در تابعهای شکل می‌شود. عدم سازگاری مناسب در اجزا و برقرار نبودن دقیق شرطهای کامل بودن، از کاستیهای مزبور هستند. از سوی دیگر، تابعهای شکل ناهرمیتی برای اجزای با گره‌های دلخواه تا حدود زیادی قابل محاسبه‌اند. از این رو، چنانچه بتوان در میان این اجزا، نوع هم‌مرتبه جزء هرمیتی را پیدا کرد، تابعهای شکل آن بسادگی به دست می‌آیند. هرچند، شناخت اجزای هم‌مرتبه به بینش کافی نیاز دارد، اما با کاربرد قانونهای، این مهم انجام می‌پذیرد. این قانونها، بیشینه شرطهای پیوستگی و کامل بودن را در اجزای هرمیتی فراهم می‌سازد. در واقع، درجه‌های آزادی در جزء هم‌مرتبه طوری اختیار می‌شوند که این دو شرط برقرار شوند. به سخن بهتر، برقراری این شرطها باید رفتارهای همانندی را در هر دو جزء ایجاد کند. امکان دارد، تعداد و نوع درجه‌های آزادی به گونه‌ای باشند که سازگاری و کامل بودن به طور کامل برقرار نشود. با وجود این، روش مزبور توانایی ارائه این حالتها را تا مرز امکان دارد. در ادامه کار، برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی، تابعهای شکل چند جزء هرمیتی حساب می‌شوند.

۳-۱- جزء تیر دوگرهی

تابعهای شکل جزء تیر دوگرهی با چهار درجه آزادی، مانند شکل ۳، از جزء چهارگرهی به دست می‌آیند. تابعهای شکل جزء چهارگرهی، به صورت زیر نوشته

$$n_1 = \frac{-1}{16}(1 - \xi)(1 - 9\xi^2) \quad \text{می‌شوند:}$$

$$n_2 = \frac{-1}{16}(1 + \xi)(1 - 9\xi^2)$$

$$n_8 = \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\xi)$$

$$n_9 = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+3\xi)$$

$$n_{10} = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-3\xi)$$

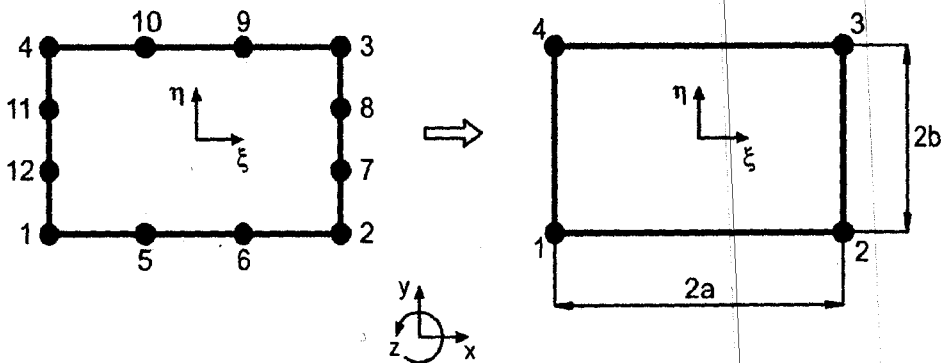
$$n_{11} = \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta)$$

$$n_{12} = \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta)$$

(۱۵)

می‌توان نشان داد که جزء مزبور مانند جزء ACM، شرطهای کامل بودن را برقرار می‌کند. این ویژگی، با انتخاب مقدار مناسب برای درجه‌های آزادی و استفاده از تابعهای درونیاب (۱۵) نتیجه می‌شود. به طور مستقیم و با به کار بردن محل قرارگیری گره‌های جزء سرنديپیتی نتیجه کنونی نیز به دست می‌آید. در واقع، این گره‌ها باید به گونه‌ای تغییر مکان دهند که حالت حرکت جسم سخت و کرنش ثابت را ارائه کنند.

ویژگیهای مشابهی را می‌توان برای ارزیابی سازگاری جزء به کار برد. به سخن دیگر، چنانچه تابع میدان بر حسب درجه‌های آزادی و تابع شکل برپا شوند، تغییر مکان و شیب عمودی در روی پهلوها، به صورت چندجمله‌ای به دست خواهند آمد. ضریبهای این چندجمله‌ایها ترکیبی از درجه‌های آزادی می‌باشند. بنابراین، مسأله سازگاری باسانی می‌تواند بررسی شود.



شکل ۴ اجزای هم مرتبه مستطیلی درجه سه

آشکار است که نتیجه با آنچه از روش معمول به دست می‌آید، هماهنگی کامل دارد. این ویژگی، به دلیل یکسان بودن تابعهای میدان در اجزای هم مرتبه برقرار است.

۳-۲- جزء ACM

جزء مستطیلی ACM چهار گره گوشه و دوازده درجه آزادی دارد. درجه‌های آزادی هر گره، یک انتقال و دو دوران هستند [۲].

$$\{\Phi_i\}^T = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\} \quad (۱۳)$$

$$\theta_{xi} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i, \quad \theta_{yi} = -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \quad (۱۴)$$

یادآوری می‌کند، تابع میدان در هر یک از پهلوهای جزء از درجه سه است. بنابراین جزء دوازده گرهی سرنديپیتی یکنواخت، همانند شکل ۴، برای کار انتخاب می‌شود. تابعهای شکل این جزء به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$n_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(-10+9\xi^2+9\eta^2)$$

$$n_2 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)(-10+9\xi^2+9\eta^2)$$

$$n_3 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1+\eta)(-10+9\xi^2+9\eta^2)$$

$$n_4 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)(-10+9\xi^2+9\eta^2)$$

$$n_5 = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-3\xi)$$

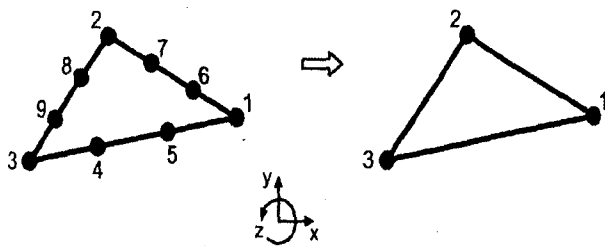
$$n_6 = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+3\xi)$$

$$n_7 = \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-3\xi)$$

درجه آزادی مناسب نیاز است. در نتیجه، برای سازگاری کامل جزء در هر پهلو، دو درجه آزادی دیگر لازم است. باید افزود، با بهره‌گیری از همان شیوه‌ای که برای جزء تیر دوگره‌ی به کار رفت، تابعهای شکل جزء ACM به‌آسانی به دست می‌آیند. تابعهای مزبور، با آنچه پیشتر به وسیله آدینی، کلاف و ملوش ارائه شده، یکسان است [۲].

۳-۳- جزء BCIZ

این جزء مثلثی، سه گره و نه درجه آزادی دارد. درجه‌های آزادی هر گره، یک خیز و دو دوران است. بر این پایه، تابع میدان در روی هر پهلو از درجه سه است. اجزای با درجه‌های آزادی مشابه به وسیله پژوهشگران زیادی به کار رفته‌اند. در بیشتر آنها، تابع میدان با افزودن شرط اضافه‌ای بر ضریبهای چندجمله‌ای درجه سه کامل ایجاد می‌شوند. وجود شرط اضافی، سبب بروز پاره‌ای کاستیها در رابطه‌سازی خواهد شد. کاستیهای مزبور، شامل ویژه شدن ماتریس [G]، همگرایی ضعیف جزء به پاسخ واقعی و مانند اینها است [۶]. جزء BCIZ و هم‌مرتبه آن، در شکل ۵ نشان داده شده است [۲].



شکل ۵ اجزای هم‌مرتبه مثلثی درجه سه

باید دانست که رابطه‌سازی جزء BCIZ، به وسیله بازلی و همکاران انجام شده است [۱]. آنها با استفاده از ویژگیهای مختصه‌های سطحی، تابع میدان زیر را برگزیدند:

این ویژگی به طور مستقیم نیز قابل دسترسی است. در واقع، درجه چندجمله‌ایهای میدان و شیب عمود بر پهلو، بر پایه محل قرارگیری گره‌های جزء هم‌مرتبه تعیین می‌شود. به طور کلی، درجه چندجمله‌ای میدان در هر پهلو، یکی کمتر از تعداد گره‌های آن پهلو است. درجه تابع شیب در اجزای سرندپیتی مستطیلی، برابر با بیشینه شمار گره‌های پهلوئی موردنظر و پهلوئی موازی با آن منهای یک، انتخاب می‌شود. با تعیین درجه‌های تابع میدان و شیب، ارزیابی سازگاری جزء بسادگی امکان‌پذیر است. خاطر نشان می‌کند، در اجزای هم‌مرتبه با سرندپیتی امکان سازگاری شیب عمود بر پهلو وجود ندارد. ویژگیهای مشابهی نیز در اجزای مثلثی وجود دارند که به آنها پرداخته خواهد شد.

باید دانست که محاسبه درجه تابع شیب در اجزای مستطیلی با گره‌های درونی، به دقت بیشتری نیاز دارد. به طور معمول، گره‌های درونی آرایش مستطیلی دارند. به گونه‌ای که پهلوهای مستطیل درونی و بیرونی با هم موازیند. در این حالت، مستطیل درونی را می‌توان یک جزء سرندپیتی گرفت و درجه تابع شیب پهلوئی موازی با پهلوئی موردنظر را تعیین کرد. همچنین، درجه جزء سرندپیتی نتیجه شده از حذف گره‌های درونی جزء اصلی حساب می‌شود. درجه تابع شیب برابر با بیشینه درجه جزء سرندپیتی کوچکتر به اضافه دو، و مقدار به دست آمده از جزء سرندپیتی بزرگتر انتخاب می‌شود. در صورت وجود مستطیلهای تو در تو، همین کار تکرار می‌شود. به سخن دیگر، درجه تابع شیب هر مستطیل پس از تعیین، با اضافه شدن مقدار دو، به عنوان مقدار وابسته به گره‌های درونی مستطیل بزرگتر منظور می‌شود. این کار ادامه می‌یابد، تا درجه تابع شیب پهلوئی موردنظر از جزء اصلی به دست آید.

از آنچه گذشت می‌توان نتیجه گرفت که در جزء مستطیلی دوازده گرهی، درجه رابطه شیب عمود بر پهلو برابر سه است. از این رو، برای تعیین یگانه تابع شیب، به چهار

حالت کرنش ثابت ایجاب می‌کند که ضریبهای مختصه‌های ξ_1 و ξ_2 صفر باشند. با به کار بردن رابطه (۱۷)، یک دستگاه معادله‌های خطی درجه شش همگن به دست می‌آید. به دلیل وابستگی این معادله‌ها، شمار آنها به چهار کاهش می‌یابد. در نتیجه، دستگاه مزبور جوابهای فراوانی دارد. به هر حال، تابع میدان موردنظر، حالت کرنش ثابت را برقرار می‌کند. از سه جمله نخست رابطه (۱۶)، شرط حرکت جسم سخت برقرار می‌شود. بنابراین

تابع میدان مزبور، شرطهای کامل بودن را دارد. اینک به تابع میدان جزء نه گرهی پرداخته خواهد شد. می‌توان نشان داد که این تابع نیز شرطهای کامل بودن را به درستی برقرار می‌کند. تابعهای شکل این جزء به وسیله نویسندگان حساب شده‌اند و در زیر می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \xi_1 - \sum_{i=4}^9 \xi_{1,i} N_i \\
 N_2 &= \xi_2 - \sum_{i=4}^9 \xi_{2,i} N_i \\
 N_3 &= \xi_3 - \sum_{i=4}^9 \xi_{3,i} N_i \\
 N_4 &= \frac{27}{4} \xi_1 \xi_3 \left(\xi_3 - \xi_1 + \frac{1}{3} \right) \\
 N_5 &= \frac{27}{4} \xi_1 \xi_3 \left(\xi_1 - \xi_3 + \frac{1}{3} \right) \\
 N_6 &= \frac{27}{4} \xi_1 \xi_2 \left(\xi_1 - \xi_2 + \frac{1}{3} \right) \\
 N_7 &= \frac{27}{4} \xi_1 \xi_2 \left(\xi_2 - \xi_1 + \frac{1}{3} \right) \\
 N_8 &= \frac{27}{4} \xi_2 \xi_3 \left(\xi_2 - \xi_3 + \frac{1}{3} \right) \\
 N_9 &= \frac{27}{4} \xi_2 \xi_3 \left(\xi_3 - \xi_2 + \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

آشکار است که N_i در سه رابطه نخست (۱۹) از شش رابطه آخری به دست می‌آید. ماتریس $[Q]$ برای جزء کنونی چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \left(\xi_2^2 \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \\
 &\alpha_5 \left(\xi_3^2 \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \alpha_6 \left(\xi_1^2 \xi_3 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \\
 &\alpha_7 \left(\xi_2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \alpha_8 \left(\xi_3 \xi_2^2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \\
 &+ \alpha_9 \left(\xi_1 \xi_3^2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

اینک تابع میدان مزبور بررسی می‌شود. نخست، تابعهای کرنش خمشی، بر پایه این تابع میدان محاسبه می‌شوند. این رابطه‌ها، پس از خارج ساختن مختصه وابسته ξ_3 ، به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [P][Q] \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}
 \tag{17}$$

ماتریس $[P]$ پیوند بین کرنشهای جزء را با مشتق دوم ϕ نسبت به مختصه‌های سطحی فراهم می‌کند $[V]$. درآیه‌های ماتریس $[Q]$ شامل ضریبهای مجهول a_i است. این دو ماتریس در زیر می‌آیند:

$$[P] = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_j^2 & b_k^2 & 2b_i b_j & 2b_i b_k & 2b_j b_k \\ c_i^2 & c_j^2 & c_k^2 & 2c_i c_j & 2c_i c_k & 2c_j c_k \\ b_i c_i & b_j c_j & b_k c_k & b_j c_i + b_i c_j & b_k c_j + b_j c_k & b_i c_k + b_k c_i \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 2\alpha_6 & -2\alpha_6 & 2(\alpha_7 - \alpha_6) \\ 2\alpha_8 & 2(\alpha_4 - \alpha_8) & -2\alpha_8 \\ 0 & 2\alpha_9 & 2\alpha_5 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=4}^9 \alpha_i & -\frac{1}{2} \sum_{i=4}^9 \alpha_i + 2\alpha_7 & -\frac{1}{2} \sum_{i=4}^9 \alpha_i + 2\alpha_4 \\ 2\alpha_5 & \frac{1}{2} \sum_{i=4}^9 \alpha_i - 2\alpha_5 & 2(\alpha_8 - \alpha_5) \\ 2\alpha_9 & 2(\alpha_6 - \alpha_9) & \frac{1}{2} \sum_{i=4}^9 \alpha_i - 2\alpha_9 \end{bmatrix}
 \tag{18}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \frac{9}{2}u_3 + \frac{27}{2}(-u_4 + u_3) \\ \frac{9}{2}(-u_2 + u_3) + \frac{27}{2}(u_8 - u_9) \\ 0 \\ \frac{9}{4}(-u_1 - u_2 + u_6 + u_7) \\ \frac{9}{4}u_2 - \frac{27}{4}u_3 - \frac{45}{4}u_8 + \frac{63}{4}u_9 \\ \frac{9}{4}u_1 - \frac{27}{4}u_3 + \frac{63}{4}u_4 - \frac{45}{4}u_5 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -\frac{9}{2}(u_1 + u_3) + \frac{27}{2}(u_4 - u_5) \\ \frac{9}{2}(u_1 - u_3) + \frac{27}{2}(-u_6 + u_7 - u_8 + u_9) \\ \frac{9}{2}(u_1 - u_3) + \frac{27}{2}(u_4 - u_5) \\ \frac{9}{2}(-u_1 + u_2) + \frac{27}{2}(u_6 - u_7) \\ \frac{9}{2}(-u_2 + u_3) + \frac{27}{2}(u_8 - u_9) \\ 9(-u_1 + u_3) + 27(-u_4 + u_5) \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \frac{9}{2}(-u_1 + u_2 - u_3) + \frac{27}{2}(u_4 - u_5 + u_6 - u_7) \\ \frac{9}{2}(u_2 - u_3) + \frac{27}{2}(-u_8 + u_9) \\ \frac{9}{2}(u_2 - u_3) + \frac{27}{2}(-u_8 + u_9) \\ \frac{9}{2}(u_1 - u_2) + \frac{27}{2}(-u_6 + u_7) \\ 9(-u_2 + u_3) + 27(u_8 - u_9) \\ \frac{9}{2}(-u_1 + u_3) + \frac{27}{2}(-u_4 + u_5) \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N_3 &= x_{13} \left(-\xi_1 \xi_3 + 2\xi_1^2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3^2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \\ & x_{12} \left(-\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1 \xi_2^2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \\ N_4 &= -\frac{7}{2} \xi_2 + 10 \xi_2^2 - \frac{11}{2} \xi_2^3 + \\ & \frac{7}{2} \xi_1^2 \xi_2 + \frac{7}{2} \xi_2 \xi_3^2 + 9 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \\ N_5 &= y_{12} \left(-\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \\ & y_{32} \left(-\xi_2 \xi_3 + 2\xi_2^2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3^2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \\ N_6 &= x_{21} \left(-\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \\ & x_{23} \left(-\xi_2 \xi_3 + 2\xi_2^2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3^2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \\ N_7 &= -\frac{7}{2} \xi_3 + 10 \xi_3^2 - \frac{11}{2} \xi_3^3 + \\ & \frac{7}{2} \xi_2^2 \xi_3 + \frac{7}{2} \xi_1^2 \xi_3 + 9 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \\ N_8 &= y_{23} \left(-\xi_2 \xi_3 + 2\xi_2^2 \xi_3 + \xi_2^2 \xi_3 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \\ & y_{13} \left(-\xi_1 \xi_3 + 2\xi_1^2 \xi_3 + \xi_1^2 \xi_3 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \\ N_9 &= x_{32} \left(-\xi_2 \xi_3 + 2\xi_2^2 \xi_3 + \xi_2^2 \xi_3 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) + \\ & x_{31} \left(-\xi_1 \xi_3 + 2\xi_1^2 \xi_3 + \xi_1^2 \xi_3 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

بر پایه رابطه (۱۷)، از ضرب کردن ماتریسهای [P] و [Q] یک ماتریس 3×3 نتیجه می‌شود. برای برقراری حالت کرنش ثابت، درآیه‌های ستون دوم و سوم این ماتریس باید مساوی صفر شوند. در نتیجه، یک دستگاه شش معادله و نه مجهول به دست می‌آید. دستگاه مزبور پاسخهای بی‌شماری دارد. هرکدام از این جوابها، می‌توانند مقدار ثابتی را برای کرنش ایجاد کنند. حالت حرکت جسم سخت نیز متناظر با حالت کرنش ثابت صفر است. هرچند در این حالت، یک دستگاه نه معادله و نه مجهول ایجاد می‌شود، اما به دلیل وابسته شدن این معادله‌ها، پاسخهای بی‌شماری به دست می‌آیند. بنابراین جزء مزبور نیز، تمامی شرطهای کامل بودن را برقرار می‌کند. از سوی دیگر، با استفاده از روش جزء هم‌مرتبه، تابعهای شکل زیر پیشنهاد می‌شوند. آشکار است که تابعهای مزبور جزء جدیدی را می‌آفرینند که تنها درجه‌های آزادی آن با جزء BCIZ مشابه می‌باشند.

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{7}{2} \xi_1 + 10 \xi_1^2 - \frac{11}{2} \xi_1^3 + \\ & \frac{7}{2} \xi_1 \xi_3^2 + \frac{7}{2} \xi_1 \xi_2^2 + 9 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \\ N_2 &= y_{31} \left(-\xi_1 \xi_3 + 2\xi_1^2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3^2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \\ & + y_{21} \left(-\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1 \xi_2^2 + \frac{8}{3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_3} & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial \xi_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (23)$$

در این رابطه، n شمار گره‌ها و k شماره یک گره کلی است. با جایگذاری معادله (23) در (22)، شیب میدان در جهت عمود بر هر پهلو محاسبه می‌گردد. برای نمونه، تابع شیب در جهت عمود بر پهلو 12، مانند رابطه (24) است.

با جایگذاری رابطه (24) در (22)، رابطه شیب به صورت یک چند جمله‌ای درجه دو به دست می‌آید. بنابراین، وجود سه درجه آزادی مناسب، می‌تواند این تابع را به گونه یکتا مشخص سازد. با دو درجه آزادی شیب، سازگاری کامل در جزء مزبور برقرار نمی‌شود. بررسی سازگاری با توجه به تابع (16) نیز همین نتیجه را می‌دهد. می‌توان نشان داد که هر دو نوع تابع میدان، شرط سازگاری را در پهلوها برقرار می‌کنند.

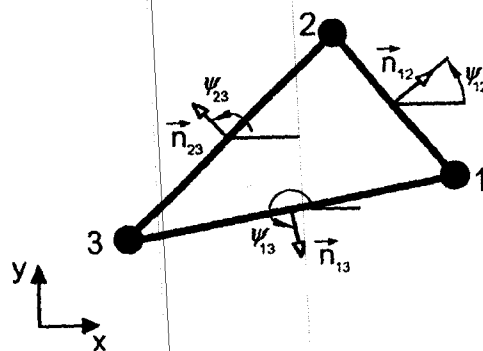
شرطهای کامل بودن و سازگاری در اجزای مثلثی هم‌مرتبه، می‌توانند به طور مستقیم ارزیابی شوند. پیش از این، شیوه پیشنهادی برای جزء مستطیلی دوازده گرهی به کار رفت. به طور مشابه، به دلیل وجود چهار گره در هر پهلو، جزء مثلثی نه گرهی، شرطهای کامل بودن برقرارند. این نتیجه به صورت تحلیلی نیز به دست می‌آید. همچنین، درجه تابع میدان در هر پهلو، برابر شمار گره‌های آن پهلو منهای یک خواهد بود. درجه تابع شیب عمودی را نیز در اجزای مثلثی، به طور مستقیم می‌توان تعیین کرد. در جزء مثلثی سرندپیتی کلی، درجه تابع شیب برابر با بیشینه شمار گره‌های روی هر یک از سه پهلو، مثلث، منهای دو انتخاب می‌شود. این نتیجه، با توجه به رفتار تابع میدان در درون جزء مثلثی به دست می‌آید.

عاملهای x_{mn} و y_{mn} ضریبهای معلوم عددی هستند که تفاوت مقدار مختصات دکارتی گره n را از گره m نشان می‌دهد. تابعهای شکل N_{3i-2} ، N_{3i-1} و N_{3i} ، به ترتیب، وابسته به درجه‌های آزادی خیز و دوران در جهت‌های x و y در گره i می‌باشند.

پیش از این، در باره استفاده از تابعهای شکل جزء هم‌مرتبه برای مطالعه سازگاری اجزا سخن به میان آمد. بر این پایه، تابعهای شکل جزء نه گرهی مورد توجه قرار می‌گیرند. تابعهای شیب عمود بر هم پهلو با رابطه زیر معرفی می‌شوند:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_{ij}} = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \right\} \begin{bmatrix} \frac{b_1}{2A} & \frac{c_1}{2A} \\ \frac{b_2}{2A} & \frac{c_2}{2A} \\ \frac{b_3}{2A} & \frac{c_3}{2A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{ij} \\ \sin \psi_{ij} \end{pmatrix} \quad (22)$$

زیرنویس‌های i و j ، پهلوها را نشان می‌دهند. بردار عمود بر پهلو ij با \bar{n}_{ij} و زاویه آن با محور x ها، با ψ_{ij} تعریف می‌شود. شکل 6 عاملهای مزبور را مشخص می‌کند. همچنین، A سطح مقطع، $b_i = y_j - y_k = y_{jk}$ ، $c_i = x_k - x_j = x_{kj}$ مثلثی می‌باشند [2].



شکل 6 بردارهای عمود بر پهلو در مثلث

بردار مشتق میدان نسبت به مختصه‌های سطحی، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \end{Bmatrix}_{\xi_3=0} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{9}{4}\xi_2^2 - \frac{9}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{9}{4}\xi_2 + 1\right) & \left(-\frac{9}{4}\xi_2^2 + \frac{9}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{9}{4}\xi_2\right) & 0 \\ \left(-\frac{9}{4}\xi_1^2 + \frac{9}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{9}{4}\xi_1\right) & \left(\frac{9}{4}\xi_1^2 - \frac{9}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{9}{4}\xi_1 + 1\right) & 0 \\ \left(-\frac{9}{4}\xi_1^2 - \frac{9}{4}\xi_1\right) & \left(-\frac{9}{4}\xi_2^2 - \frac{9}{4}\xi_2\right) & \left(\frac{9}{4}\xi_1^2 + \frac{9}{4}\xi_2^2 - \frac{5}{4}\right) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(-\frac{27}{4}\xi_2^2 + \frac{27}{2}\xi_1\xi_2 + \frac{9}{4}\xi_2\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{27}{4}\xi_1^2 - \frac{27}{2}\xi_1\xi_2 + \frac{9}{4}\xi_1\right) \\ \left(-\frac{27}{4}\xi_1^2 + \frac{9}{4}\xi_1\right) & \left(\frac{27}{4}\xi_1^2 + \frac{9}{4}\xi_1\right) & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \left(\frac{27}{4}\xi_2^2 - \frac{27}{2}\xi_1\xi_2 + \frac{9}{4}\xi_2\right) & 0 & 0 \\ \left(-\frac{27}{4}\xi_1^2 + \frac{27}{2}\xi_1\xi_2 + \frac{9}{4}\xi_1\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{27}{4}\xi_2^2 + \frac{9}{4}\xi_2\right) & \left(-\frac{27}{4}\xi_2^2 + \frac{9}{4}\xi_2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_5 \\ \vdots \\ \phi_9 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

انتخاب می‌شود. باید افزود، در صورت وجود مثلثهای تو در تو، شیوه مزبور با کمی تغییر تکرار می‌شود. به سخن دیگر، مقدار به دست آمده از مثلث درونی با دو جمع می‌شود و به عنوان یکی از دو مقدار ممکن، درجه تابع شیب در مثلث بزرگتر به کار می‌رود. مقدار دیگر، یکی کمتر از بیشینه شمار گره هر یک از پهلوهای مثلث اختیار می‌شود. شایان توجه است که در حالتی که مثلث بزرگتر بر پهلوهای جزء اصلی منطبق باشد، مقدار دوم برای درجه تابع شیب، برابر بیشترین تعداد گره‌های هر پهلو منهای دو، منظور می‌شود.

۴- اجزای پیشنهادی

پیش از این، روش جزء هم مرتبه برای یافتن تابعهای شکل جزء هرمیتی پیشنهاد شد. از ویژگیهای مهم این شیوه، امکان استفاده از تابع میدان اجزای ناهرمیتی است. چون تابعهای این اجزا در دسترس می‌باشند، می‌توان از

برای نمونه، در جزء نه گرهی موردنظر، تعداد گره‌های هر پهلو برابر چهار است. بنابراین، تابع شیب از درجه دو خواهد بود. یادآوری می‌کند که این نتیجه پیشتر نیز به صورت تحلیلی به دست آمد. باید افزود، چنانچه یک جزء دارای گره درونی باشد، به شیوه مشابهی می‌توان به ارزیابی مستقیم شرطهای سازگاری و کامل بودن آن پرداخت. فقط یافتن درجه تابع شیب عمودی نسبت به حالت پیشین متفاوت است. به طور معمول، گره‌های درونی در اجزای مثلثی، خود بر روی مثلثی دارای پهلوهای موازی با مثلث اصلی قرار دارند. بر این پایه، مثلث درونی به عنوان یک جزء سرندیبیتی به کار می‌رود و بیشترین شمار گره‌های هر پهلو آن منهای یک محاسبه می‌شود. بیشینه جمع این مقدار با دو و نیز درجه تابع شیب مثلث سرندیبیتی ایجاد شده، از حذف گره‌های درونی جزء اصلی، به عنوان درجه تابع شیب اصلی

$$\{\Phi_i\}_2 = \left\{ \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_i \right\}, \quad i = 5, 6, 7, 8 \quad (26)$$

زیرنویس‌های رابطه‌های کنونی، به شماره جزء در شکل ۷ اشاره دارند. باید افزود، شرطهای کامل بودن و سازگاری در جزء شکل ۷-۱، به تمامی برقرار می‌شود. با وجود این، در جزء شکل ۷-۲، تابع شیب عمود بر هر پهلو به یک درجه آزادی نیاز دارد و ناسازگار است.

۴-۲- اجزای خمشی مثلثی

شکل ۸ اجزای خمشی مثلثی پیشنهادی و نوع هم مرتبه آنها را نمایش می‌دهد. درجه‌های آزادی در جزءهای پیشنهادی شکل ۸ به قرار زیر است:

$$\{\Phi_i\}_1^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_i \right\}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\{\Phi_i\}_2^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \right\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (27)$$

$$\{\Phi_i\}_2 = \left\{ \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_i \right\}, \quad i = 4, 5, 6$$

$$\{\Phi_i\}_3^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \right\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (28)$$

آنها برای یافتن میدان اجزای هرمیتی بهره برد. همچنین، از خوبیهای دیگر این شیوه، امکان برقراری شرطهای کامل بودن و سازگاری است. این شرطها، بسته به شمار و نوع درجه‌های آزادی، می‌توانند تا مرز امکان ایجاد شوند. در بیشتر نمونه‌های پیشین، درجه‌های آزادی به گونه‌ای اختیار شده‌اند که امکان برقراری کامل شرطهای مزبور وجود ندارد. به هر حال، می‌توان از این روش بهره برد و اجزای مناسب را همراه با برقراری پیشینه این شرطها معرفی کرد. اینک، به چند نمونه از این جزءها پرداخته خواهد شد. کوشش می‌شود که درجه‌های آزادی زیاد نباشند.

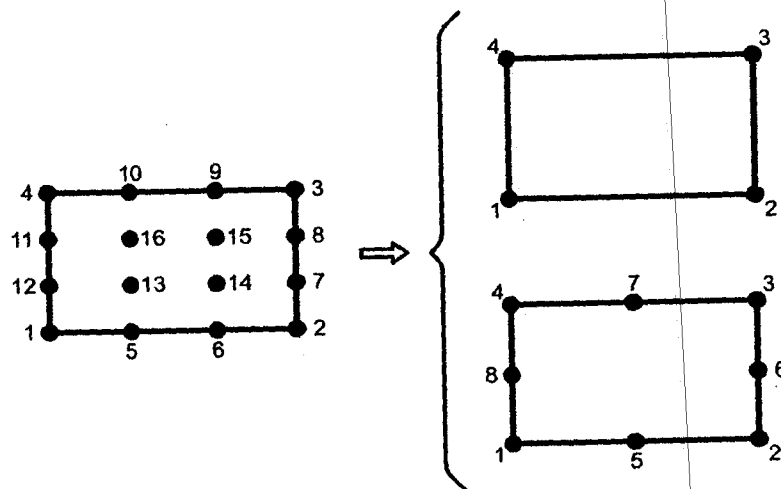
۴-۱- اجزای خمشی مستطیلی

شکل ۷ دو جزء خمشی مستطیلی پیشنهادی و نوع هم مرتبه آنها را نشان می‌دهد:

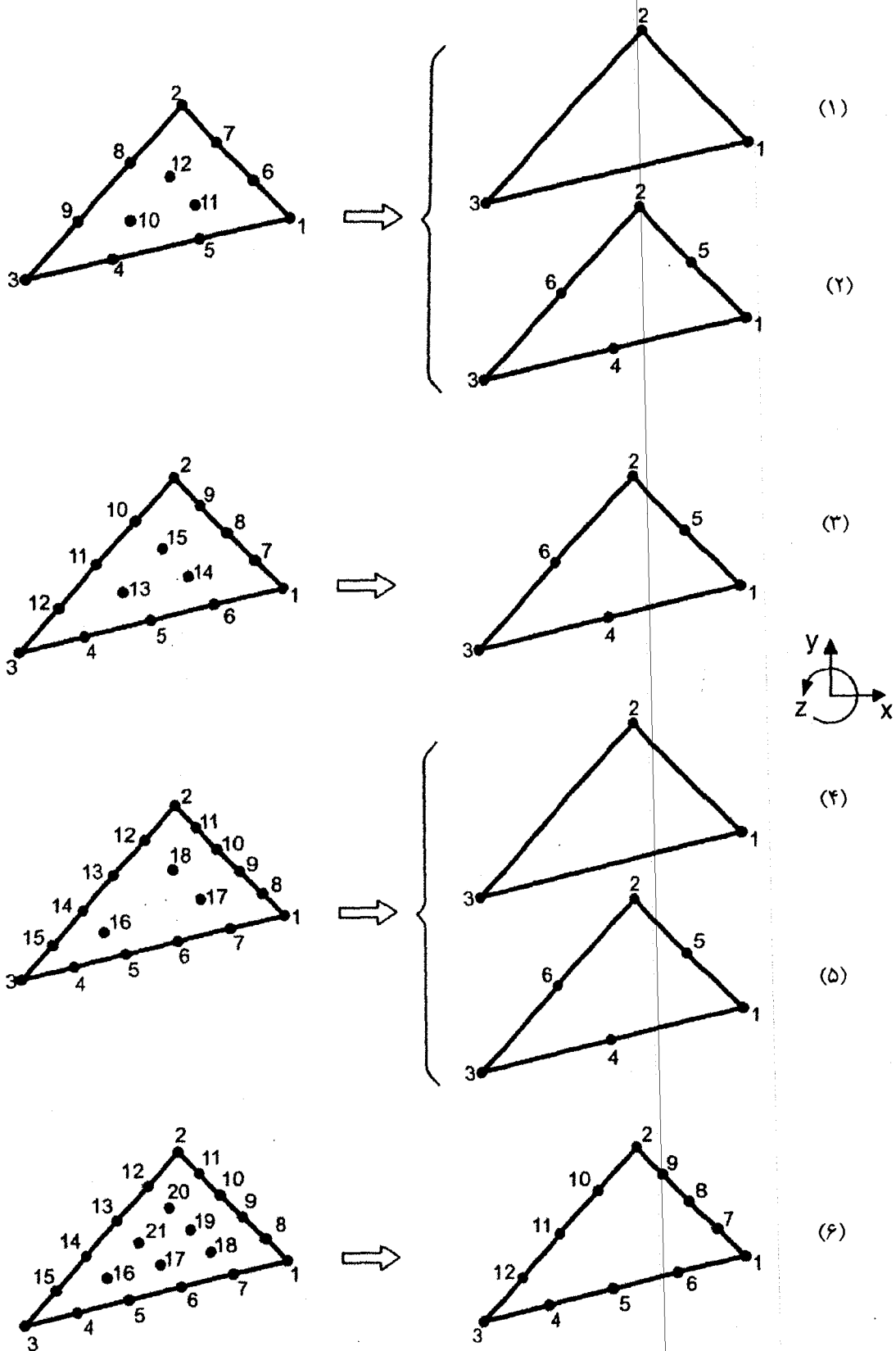
درجه‌های آزادی در این جزءها به قرار زیر است:

$$\{\Phi_i\}_1^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_i \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\{\Phi_i\}_2^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (25)$$



شکل ۷ اجزای هم مرتبه مستطیلی خمشی



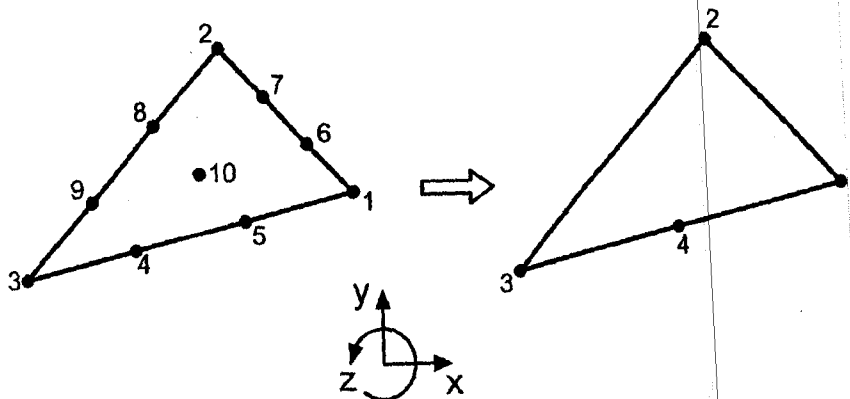
شکل ۸ اجزای هم مرتبه مثلثی خمشی

باید دانست که گره‌های مرزی و درونی، در صورت امکان باید به گونه‌ای قرار گیرند که شبکه منظمی از آنها در سرتاسر جزء به وجود آید. هر چه این شبکه منظمتر باشد، امکان سازگاری جزء بیشتر خواهد بود. باید به خاطر داشت که به کاربرد این ویژگی در اجزای مستطیلی نیز ضروری است.

تأکید می‌شود که اجزای (۲) و (۳) یک درجه ناسازگاری شیب عمود بر پهلو دارند. شرطهای کامل بودن و سازگاری را سایر جزءها به تمامی برقرار می‌سازند. یادآوری می‌کند که جزء درجه بالای چهارم، به وسیله داس گوپتا و سن گوپتا رابطه‌سازی شده است [۱]. آنها از چند جمله‌ای درجه پنج کامل، با بیست و یک ضریب مجهول، استفاده کرده‌اند. چون شمار مجهولها بیشتر از تعداد رابطه‌ها بودند، بنابراین آنها از فرض دیگری برای یافتن تابعهای شکل استفاده کردند. آنها شیب عمود بر پهلو را یک تابع درجه سه پنداشتند. باید آگاه بود که وارد کردن این شرط برای یافتن تابعهای شکل، می‌تواند کارایی جزء را کاهش دهد.

۴-۳- جزء خمشی انتقالی

از روش جزء هم مرتبه، می‌توان برای برپایی تابعهای اجزای خمشی انتقالی نیز بهره گرفت. برای نمونه، جزء شکل ۹ مورد توجه قرار می‌گیرد.



شکل ۹ اجزای هم مرتبه مثلثی

$$\{\Phi_i\}_3^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial n_i} \right\}, \quad i=4,5,6 \quad (29)$$

$$\{\Phi_i\}_4^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial y_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2_i} \right\}, \quad i=1,2,3$$

$$\{\Phi_i\}_5^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial y_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2_i} \right\}, \quad i=1,2,3 \quad (30)$$

$$\{\Phi_i\}_5 = \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_i} \right\}, \quad i=4,5,6$$

$$\{\Phi_i\}_6^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial y_i} \right\}, \quad i=1,2,3$$

$$\{\Phi_i\}_6^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial n_i} \right\}, \quad i=4,6,7,9,10,12 \quad (31)$$

$$\{\Phi_i\}_6 = \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_i} \right\}, \quad i=5,8,11 \quad (32)$$

گره‌های درونی جزء دوازده گرهی، منطبق بر جزء لاگرانژی درجه چهار می‌باشند. همچنین گره‌های مزبور در جزء هجده گرهی، با جزء درجه پنج لاگرانژی هماهنگ هستند.

به دست می‌دهد. این شیوه کلی است و نیازی به حدس تابعهای شکل ندارد. خاطر نشان می‌کند که اجزای پیشنهادی خمشی هردو گونه مثلثی و مستطیلی را در بر می‌گیرند. باید افزود، از تابعهای شکل هرمیتی در تحلیلهای گوناگونی استفاده می‌شود [۱۰-۱۵].

۶- واژه نامه فنی

Hermitian Shape Function	تابعهای شکل هرمیتی
Non-Conforming	ناسازگاری
Bending Elements	جزء های خمشی
Uniform Order Element	جزء هم مرتبه
High-Order Continuity	پیوستگی مرتبه بالا
Lagrangian Functions	تابعهای لا گرانژی
Transition Element	جزء انتقالی
Triangular Bending Element	جزء خمشی مثلثی
Quadrilateral Elements	جزء های چهار پهلو
Patch Test	آزمون وصله
Rigid Body Motion	حرکت جسم سخت
Constant Strain State	حالت کرنش ثابت
At	جزء مثلثی با دوران گوشه (جزء آلمن)
Acm Or Mzc	جزء مستطیلی خمشی
Bciz	جزء مثلثی خمشی

۷- منابع

- [۱] شاپور طاحونی؛ اجزای محدود برای تحلیل سازه‌ها؛ ویلیام ویور-پاول جانسون؛ انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، چاپ دوم، زمستان ۱۳۷۵.
- [۲] محمد رضایی‌پژند، محمد مویدیان؛ نگره جزء محدود؛ دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، سخن گستر، ۱۳۸۲.
- [3] S. Dasgupta and D. Sengupta, "A Higher-Order Triangular, Plate Bending Element Revisited", *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol.30, pp.419-430 (1990).
- [4] D. Sengupta and S. Dasgupta, "Stiffness Matrix for a Quadratic Strain Triangle

درجه‌های آزادی جزء مزبور در زیر می‌آیند:

$$\{\Phi_i\}^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \right\}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\{\Phi_i\} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_i \right\}, \quad i = 4$$

(۳۳)

آشکار می‌باشد که تابع شیب جزء در پهلو ۱۳ سازگاری دارد. با وجود این، تابع در سایر پهلوها یک درجه ناسازگاری دارد. در صورت نیاز، می‌توان گره‌های درونی بیشتر از یک را برای هر پهلو به کار برد. خاطر نشان می‌کند که جزء مورد بررسی شرطهای دیگر سازگاری و کامل بودن را برقرار می‌سازد. باید افزود که به دلیل دشواری حدس تابع میدان، اجزای خمشی انتقالی، کمتر گسترش یافته‌اند. به همین دلیل، افرادی از تابعهای درونیاب مستقل برای ایجاد سازگاری استفاده کرده‌اند. شایان توجه است که از تابعهای مزبور برای برپایی اجزای با اثر برش استفاده می‌شود. برای نمونه، می‌توان به چند جزء که به وسیله چوبی و پارک معرفی شده‌اند، اشاره کرد [۸،۹]. با توجه به نمونه پیشین پیشنهادی، می‌توان نتیجه گرفت که این شیوه کارآیی خوبی نیز برای برپایی جزءهای خمشی انتقالی دارد.

۵- نتیجه گیری

یک روش بسیار سودمند برای برپایی تابعهای شکل هرمیتی در این مقاله پیشنهاد شد. این شیوه تا حدود زیادی به نیاز پژوهشگران برای یافتن تابعهای میدان و شکل در اجزای هرمیتی پاسخ می‌دهد. همچنین، با به کار بردن روش پیشنهادی می‌توان تابعهای درونیاب اجزای محدود خمشی انتقالی را نیز یافت. با رابطه سازی کردن چند نمونه، چگونگی یافتن تابعهای شکل در این مقاله نشان داده شد. باید دانست که این جزءها بیشینه شرطهای سازگاری را برقرار می‌کنند. افزون بر اینها، مقاله کنونی راهکار نظام‌مندی برای یافتن تابعهای شکل هرمیتی

- [12] M. Forejt and J. Vrbka, "On Modelling of the Contact Conditions in Compound Die Using the Hermitian Finite Elements", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol.60 ,No.1-4, pp.481-484 (1996).
- [13] A.E. Taigbenu, "Enhancing the Accuracy of the Solution to Unsaturated Flow by a Hermitian Green Element Model", *Advances in Engineering Software*, Vol.29, N0.2, pp.113-118 (1998).
- [14] O. Attia and A. El-Zafrany, "A High-Order Shear Element for Nonlinear Vibration Analysis of Composite Layered Plates and Shells", *Int.J. Mechanical Sciences*, 41, pp.461-486 (1999).
- [15] A.N.Palazotto, E.J.Herup and L.N.B.Gummadi, "Finite Element Analysis of Low-Velocity Impact on Composite Sandwich Plates", *Composite Structure*, 49, pp.209-227 (2000).
- [16] M.D. Sciuva and M.Gherlone, "A Global/Local Third-Order Hermitian Displacement Field with Damaged Interfaces and Transverse Extensibility: FEM Formulation", *Composite Structure*, 59, pp.433-444 (2003).
- [17] K.Nam-Il and K.Moon-Young, "Exact Dynamic Stiffness Matrix of Non-Symmetric Thin-Walled Curved Beams Subjected to I *Journal of Sound and Vibration* nitial Axial Force", , 284, pp.851-878 (2005).
- Using Area Coordinates", *Comput.and Struct.*, Vol.36, No.5, pp.963-970 (1990).
- [5] K.J. Bathe, *Finite Elements Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1982).
- [6] A. El-Zafrany and R.A. Cookson, "Derivation of Lagrangian and Hermitian Shape Functions for Quadrilateral Elements", *Int.J. Num.Meth.Engng*, Vol.23, pp.1939-1958 (1986).
- [7] D.J. Allman, "A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis", *Comput. and Struct.*, Vol.19, No.1-2, pp.1-8 (1984).
- [8] G.A.Mohr, *Finite Elements for Solids, Fluids, and Optimization*, Oxford University Press (1992).
- [9] C.A.Felippa, B.Haugen and C. Militello, "From the Individual Element Test to Finite Element Templates: Evolution of the Patch Test", *Int.J.Num. Meth.Engng*, Vol.38, pp.199-229(1995).
- [10] C.K.Choi and Y.M.Park, "Transition Plate-Bending Elements for Compatible Mesh Gradation", *J.Engng Mesh.*, Vol.118, No.3, pp.462-480(1992).
- [11] C.K. Choi and Y.M. Park, "Non Conforming Transition Plate ending Elements with Variable Mid-Side Nodes", *Comput. And Struct.*, Vol.32, No.2, pp.295-304 (1989).

- [12] M. Forejt and J. Vrbka, "On Modelling of the Contact Conditions in Compound Die Using the Hermitian Finite Elements", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol.60 ,No.1-4, pp.481-484 (1996).
- [13] A.E. Taigbenu, "Enhancing the Accuracy of the Solution to Unsaturated Flow by a Hermitian Green Element Model", *Advances in Engineering Software*, Vol.29, NO.2, pp.113-118 (1998).
- [14] O. Attia and A. El-Zafrany, "A High-Order Shear Element for Nonlinear Vibration Analysis of Composite Layered Plates and Shells", *Int.J. Mechanical Sciences*, 41, pp.461-486 (1999).
- [15] A.N.Palazotto, E.J.Herup and L.N.B.Gummadi, "Finite Element Analysis of Low-Velocity Impact on Composite Sandwich Plates", *Composite Structure*, 49, pp.209-227 (2000).
- [16] M.D. Sciuva and M.Gherlone, "A Global/Local Third-Order Hermitian Displacement Field with Damaged Interfaces and Transverse Extensibility: FEM Formulation", *Composite Structure*, 59, pp.433-444 (2003).
- [17] K.Nam-II and K.Moon-Young, "Exact Dynamic Stiffness Matrix of Non-Symmetric Thin-Walled Curved Beams Subjected to I *Journal of Sound and Vibration* nitial Axial Force", , 284, pp.851-878 (2005).
- Using Area Coordinates", *Comput.and Struct.*, Vol.36, No.5, pp.963-970 (1990).
- [5] K.J. Bathe, *Finite Elements Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1982).
- [6] A. El-Zafrany and R.A. Cookson, "Derivation of Lagrangian and Hermitian Shape Functions for Quadrilateral Elements", *Int.J. Num.Meth.Engng.*, Vol.23, pp.1939-1958 (1986).
- [7] D.J. Allman, "A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis", *Comput. and Struct.*, Vol.19, No.1-2, pp.1-8 (1984).
- [8] G.A.Mohr, *Finite Elements for Solids, Fluids, and Optimization*, Oxford University Press (1992).
- [9] C.A.Felippa, B.Haugen and C. Militello, "From the Individual Element Test to Finite Element Templates: Evolution of the Patch Test", *Int.J.Num. Meth.Engng.*, Vol.38, pp.199-229(1995).
- [10] C.K.Choi and Y.M.Park, "Transition Plate-Bending Elements for Compatible Mesh Gradation", *J.Engng Mesh.*, Vol.118, No.3, pp.462-480(1992).
- [11] C.K. Choi and Y.M. Park, "Non Conforming Transition Plate ending Elements with Variable Mid-Side Nodes", *Comput. And Struct.*, Vol.32, No.2, pp.295-304 (1989).