

تحلیل فرکانسی و تشخیص موقعیت و عمق ترک در شفت های دوار

در این مقاله روشی غیر مخرب جهت تعیین فرکانس و تشخیص موقعیت و عمق ترک در شفت های دوار، با استفاده از روش ماتریس انتقال و بر اساس تئوری تیر تیموشنکو ارائه شده است. در شفت های دوار ترک دار، ترک ها می توانند تحت زوایای مختلفی نسبت به یکدیگر قرار گیرند. وجود ترک در شفت ها، انعطاف پذیری محلی را تغییر داده و کاهش فرکانس طبیعی را به دنبال خواهد داشت. نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی با استفاده از روش ذکر شده، برای شفت های دوار با شرایط مرزی مختلف، شکل های هندسی و تعداد ترک های متفاوت مورد بررسی قرار گرفته و به کمک این تحلیل های فرکانسی، موقعیت ترک به دست آمده است. مزیت روش پیشنهادی برای تشخیص موقعیت ترک در این است که تنها با استفاده از داده های فرکانسی شفت ترک دار می توان موقعیت ترک های احتمالی در سیستم را تعیین کرد. همچنین، برای حالتی که شفت دوار فقط دارای یک ترک باشد، روشی جهت تخمین عمق ترک شرح داده شده است. به منظور تایید نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی به روش ماتریس انتقال، این نتایج با داده های حاصل از پژوهش های تجربی مقایسه شده است که توافق بین پاسخ ها نشان دهنده صحت روش به کار برده شده می باشد

محمد حسین زاده^۱

دانشجوی دکترا

انوشیروان فرشیدیان^۲

دانشیار

واژه های راهنما: شفت ترک دار، تحلیل فرکانسی، روش ماتریس انتقال، شفت اورهنگ

۱- مقدمه

بیشتر تجهیزاتی که در صنایع مکانیکی مورد استفاده قرار می گیرند دارای روتور نیز می باشند. یکی از عیب های اساسی روتورها که در صورت عدم تشخیص به موقع می تواند منجر به حوادث ناگوار گردد، ترک خستگی در شفت است. موضوع تحلیل روتور دارای ترک، اولین بار در سال ۱۹۷۰ مورد بررسی قرار گرفت. رفتار ارتعاشی ساختارهای دارای ترک، خصوصا روتورهای ترک دار در دو دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته و مساله خسارت و تشخیص ترک در اجزاء ساختاری در سال های اخیر اهمیت زیادی کسب کرده است. محققان بسیاری مدل های مختلفی از شفت ترک دار را مورد بررسی قرار داده اند تا تغییرات رفتار ارتعاشی ناشی از رشد ترک در شفت را مطالعه نمایند و راهی جدید و کاربردی تر برای جلوگیری از این خسارت ناگهانی پیش رو بگذارند. در این تحقیقات عموماً دینامیک روتورهای ترک دار، مطابق آن چه در

^۱ نویسنده مسئول، دانشجوی دکترا، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد hosein2004@yahoo.com

^۲ دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

کتاب Dimarogonas و Pipetis [1] شرح داده شده، مورد توجه قرار گرفته است. برخی دیگر از کارهای صورت گرفته توسط محققان به صورت زیر می باشد:

Dimarogonas [2] در مقاله ای، کارهای صورت گرفته توسط سایر محققین را در خصوص ارتعاشات ساختارهای ترک دار مورد بررسی قرار داد.

Papadopoulos و Dimarogonas [3]، کوپلینگ ارتعاشات پیچشی و محوری را در شفت دارای ترک عرضی سطحی بررسی کردند. آن ها ترک را به صورت باز در نظر گرفتند و انعطاف پذیری محلی ناشی از ترک را با یک ماتریس 6×6 ، با فرض ۶ درجه آزادی برای المان ترک دار شفت نمایش دادند.

این محققین با صرفه نظر از اثر برش و در نظر گرفتن خمش در دو جهت اصلی و کشش، به ماتریس سختی 3×3 شامل جملاتی که بیانگر کوپلینگ بود، دست یافتند و پدیده حرکت کوپل شده عرضی و محوری را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند.

در همان سال Papadopoulos و Dimarogonas [4] کوپلینگ ارتعاشات خمشی و پیچشی را نیز برای شفت ترک دار تیموشنکو بررسی کردند. آن ها همچنین به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری و تاثیر ترک روی رفتار ارتعاشی شفت پرداختند و ارتباط بین مقادیر ویژه سیستم، عمق ترک و نسبت باریکی شفت را به دست آوردند.

در مقاله ای دیگر Papadopoulos و Dimarogonas [5] ارتعاشات کوپل شده شفت های ترک دار را مورد بررسی قرار دادند. آن ها در مقاله خویش از تئوری تیر تیموشینکو استفاده نموده و ماتریس انعطاف پذیری 6×6 را برای مدل سازی ترک به کار بردند.

Sekhar [6] در مقاله ای، خصوصیات ارتعاشی شفت ترک دار با دو ترک باز را بررسی نمود. وی به منظور تحلیل ارتعاشات خمشی شفت از روش المان محدود استفاده کرد و تاثیر یک ترک روی ترک دیگر را برای فرکانس های ویژه، مد شیپ ها و محدوده های سرعت بحرانی نشان داد.

Gasch [7] رفتار دینامیکی روتور لاول با یک ترک عرضی را مورد بررسی قرار داد. وی معادلات غیر خطی حرکت را به دست آورد و به علت غلبه وزن در تغییر مکان الاستیک افقی شفت، این معادلات را در حالی به صورت خطی در آورد که با زمان تغییر می کردند.

Chondros و همکاران [8] ارتعاشات پیچشی شفت استوانه ای با یک ترک پیرامونی را به دو روش تحلیلی دقیق و روش عددی المان محدود بررسی نمودند. آن ها برای یافتن فرکانس های شفت ترک دار از خارج قسمت ریلی و برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی آن از فرمول تغییرات Hu-Washizu-Barr استفاده کرده و انعطاف پذیری مربوط به ترک را بر مبنای اصول مکانیک شکست مدل نمودند.

Sekhar [9] در مقاله ای تاثیر هم زمان چند ترک را روی تیرها و شفت ها مورد بررسی قرار داد و نیز روش های صورت گرفته توسط سایر محققین را به منظور تعیین ترک ارائه نمود.

Bachschmid و همکاران [10] روشی را برای تعیین موقعیت و عمق ترک عرضی در سیستم یک روتور با استفاده از اندازه گیری های ارتعاشی ارائه نمودند. آن ها با استفاده از مدل ارائه شده و روش حداقل مربعات در دامنه فرکانسی، موقعیت ترک ایجاد شده را پیش بینی کردند. همچنین عمق ترک را از مقایسه ممان

خمشی ایستا ناشی از وزن روتور و شرایط راستای یاتاقان با ممان خمشی معادل تعیین شده به صورت متناوب، محاسبه نمودند.

Tsai و Wang [11]، رفتار ارتعاشی شفت ترک دار را به ازای موقعیت های گوناگون و عمق های مختلف ترک، تحلیل کرده و روشی برای تعیین موقعیت و اندازه ترک عرضی باز روی شفت ساکن، بدون درگیر کردن آن با سیستم ارائه نمودند.

در سال بعد Tsai و Wang [12] شفت دواری را مورد بررسی قرار دادند که دارای چندین ترک بود. آن ها در مقاله خویش ترک ها را در مد اول و تحت زوایای گوناگون نسبت به یکدیگر در نظر گرفتند و مد شیپ های متناظر با شفت ترک دار و بدون ترک را ترسیم نمودند. سپس از تفاضل این دو شکل مد که به ازای فرکانس طبیعی اول به دست آمده بود، توانستند موقعیت ترک های موجود در سیستم شفت دوار را بیابند. در این مقاله به جای استفاده از مد شیپ های شفت سالم و ترک دار تنها از مد شیپ شفت ترک دار برای تعیین موقعیت ترک استفاده شده است. همچنین، عمق ترک در حالتی که شفت دوار دارای یک ترک باشد، تخمین زده می شود. در بسیاری از موارد ممکن است فردی که وظیفه نگهداری و مراقبت های پیشگیرانه از سیستم ها را بر عهده دارد، از پیشینه سیستم مزبور اطلاعی نداشته باشد و یا این که در اثر گذشت زمان این اطلاعات از بین رفته باشد. بنابراین، اگر از روش ذکر شده در مرجع [12] جهت تشخیص حضور ترک و همچنین موقعیت ترک های احتمالی در سیستم استفاده شود، بایستی فرکانس طبیعی و یا اطلاعات تجربی مربوط به مد شیپ شفت سالم نیز در دسترس باشد، در غیر این صورت نمی توان از روش اشاره شده استفاده نمود. بنابراین در چنین مواقعی است که اهمیت روش ذکر شده در مقاله کنونی به منظور تشخیص موقعیت ترک مورد توجه بیشتری قرار می گیرد، به گونه ای که تنها با استفاده از اطلاعات و داده های فعلی شفت می توان وجود ترک و موقعیت آن را پیش بینی نمود.

۲- انعطاف پذیری ناشی از ترک

شکل (۱)، جزئیات روتوری را نشان می دهد که دارای یک ترک است. این روتور شش نیروی کلی P_i ($i=1,2,\dots,6$) را تحمل می کند. بر طبق معادله Paris [1]، جابه جایی اضافی u_i ناشی از ترکی به عمق a در جهت i ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^a J(\alpha) d\alpha \quad (1)$$

که $J(\alpha)$ تابع چگالی انرژی کرنشی می باشد و توسط رابطه زیر داده شده است:

$$J(\alpha) = \int_{-b}^b \frac{1-\nu^2}{E} \left[\left(\sum_{i=1}^6 K_{Ii} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 + (1+\nu) \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \right] dx \quad (2)$$

در این رابطه ν ضریب پواسون و E مدول یانگ می باشد. فاکتور شدت تنش نیز با استفاده از رابطه زیر ارزیابی می شود:

$$K_{Ni} = \sigma_i \sqrt{\pi \alpha} F_N \left(\frac{\alpha}{h} \right) \quad (3)$$

که $N = I, II, III$ بوده و σ_i تنش های حاصل از بار P_i در ناحیه ترک است. توابع $F_N(\alpha/h)$ در پیوست A داده شده است. انعطاف پذیری محلی ایجاد شده ناشی از ترک، با توجه به روابط ذکر شده، می تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_{-b}^b \int_0^a J(\alpha) d\alpha dX. \quad (۴)$$

اساساً یک ماتریس انعطاف پذیری کامل برای ترک، ماتریسی ۶×۶ [13] می باشد که از معادله (۴) به دست می آید. در این مطالعه با توجه به ماهیت تئوری تیر تیموشنکو، فرض می شود که عبارات مربوط به اثرات خمشی و برشی، پاسخ دینامیکی ناخالص روتورها را تحت تاثیر قرار دهد. بنابراین c_{44} ، c_{45} ، c_{55} و c_{33} در نظر گرفته می شوند (پیوست B).

۳- معادلات حرکت سیستم

شکل (۲) نمای شماتیک روتور را نشان می دهد که در آن \underline{XYZ} بیانگر دستگاه مختصات مرجع است، در صورتی که XYZ سیستم مختصات ثابت بر روی روتور می باشد که همراه با روتور با سرعت ثابت Ω حول محور Z دوران می کند. محور \underline{Z} با محور Z موازی است.

در ادامه معادلات حرکت روتور با استفاده از تئوری تیر تیموشینکو به دست می آید. بنابراین علاوه بر تغییر مکان خمشی عرضی (\underline{X} و \underline{Y})، دو متغیر مستقل جدید ($\phi_{\underline{X}}$ و $\phi_{\underline{Y}}$) که زوایای دوران ناشی از خمش می باشند باید برای روتور در نظر گرفته شوند تا تغییر انحنای برشی عرضی را نشان دهند. بنابراین انرژی پتانسیل و جنبشی برای شفت با سطح مقطع A و ممان اینرسی I چنین است:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI (\phi_{\underline{X}}'^2 + \phi_{\underline{Y}}'^2) + kGA \left[(\underline{Y}' - \phi_{\underline{X}})^2 + (\underline{X}' - \phi_{\underline{Y}})^2 \right] \right) d\underline{Z} \quad (۵)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho A (\dot{\underline{X}}^2 + \dot{\underline{Y}}^2) + \rho I (\dot{\phi}_{\underline{X}}^2 + \dot{\phi}_{\underline{Y}}^2) \right) d\underline{Z} \quad (۶)$$

که ρ و G و k به ترتیب، دانسیته جرمی، مدول برشی و ضریب برشی می باشند [14]. در این معادلات، مشتقات جزئی مکانی، $\partial/\partial \underline{Z}$ ، با علامت پرایم و مشتقات زمانی، $\partial/\partial t$ ، با علامت نقطه نشان داده شده است. از آنجایی که ترک همراه با دوران روتور، نسبت به زمان باز و بسته می شود، لذا تحلیل فرکانسی آن در دستگاه مختصات کلی دشوار خواهد بود. بنابراین روابط مربوطه به ازای دستگاه مختصات محلی که با شفت دوران می کند به دست آمده است. به این ترتیب تغییر مکان های \underline{X} و \underline{Y} و زوایای دوران $\phi_{\underline{X}}$ و $\phi_{\underline{Y}}$ در دستگاه مختصات کلی می تواند بر حسب تغییر مکان های X و Y و زوایای دوران ϕ_X و ϕ_Y در دستگاه مختصات ساکن بر روی شفت به صورت زیر بیان شود (شکل (۲)):

$$\begin{Bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}, \quad (۷)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{\underline{X}} \\ \phi_{\underline{Y}} \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} \phi_X \\ \phi_Y \end{Bmatrix}, \quad (۸)$$

ماتریس دوران T نیز به صورت زیر می باشد:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (۹)$$

با به کار بردن اصل همیلتون، معادلات حرکت برای شفت دوار در دستگاه مختصات XYZ به صورت چهار معادله زیر به دست می آید:

$$\ddot{X} - 2\Omega\dot{Y} - \Omega^2 X - \dot{\Omega}Y - \frac{kG}{\rho}(X'' - \phi_Y') = 0 \quad (۱۰)$$

$$\ddot{Y} + 2\Omega\dot{X} - \Omega^2 Y + \dot{\Omega}X - \frac{kG}{\rho}(Y'' - \phi_X') = 0 \quad (۱۱)$$

و

$$\ddot{\phi}_X + 2\Omega\dot{\phi}_Y - \Omega^2 \phi_X - \dot{\Omega}\phi_Y - \frac{E}{\rho}\phi_X'' - \frac{kGA}{\rho I}(Y' - \phi_X) = 0 \quad (۱۲)$$

$$\ddot{\phi}_Y - 2\Omega\dot{\phi}_X - \Omega^2 \phi_Y + \dot{\Omega}\phi_X - \frac{E}{\rho}\phi_Y'' - \frac{kGA}{\rho I}(X' - \phi_Y) = 0 \quad (۱۳)$$

می توان معادلات (۱۰) تا (۱۳) را با حذف ϕ_X و ϕ_Y فقط بر حسب تغییر مکان های عرضی X و Y نوشت. در این صورت با در نظر گرفتن سرعت ثابت ($\dot{\Omega} = 0$) برای روتور، این معادلات به شکل زیر در می آیند:

$$X^{iv} + aX'' + b\ddot{X} + cX + d\ddot{X} + e\ddot{X} + f\dot{Y} + g\dot{Y} + h\ddot{Y} = 0 \quad (۱۴)$$

$$Y^{iv} + aY'' + b\ddot{Y} + cY + d\ddot{Y} + e\ddot{Y} - f\dot{X} - g\dot{X} - h\ddot{X} = 0 \quad (۱۵)$$

که در این روابط

$$a = \frac{\rho\Omega^2}{kG} + \frac{\rho\Omega^2}{E}, \quad b = -\frac{\rho}{kG} - \frac{\rho}{E}, \quad c = \frac{\rho^2\Omega^4}{kGE} - \frac{\rho A\Omega^2}{EI}, \quad d = -\frac{6\rho^2\Omega^2}{kGE} + \frac{\rho A}{EI}$$

$$e = \frac{\rho^2}{kGE}, \quad f = \frac{2\rho\Omega}{kG} + \frac{2\rho\Omega}{E}, \quad g = \frac{4\rho^2\Omega^3}{kGE} - \frac{2\rho A\Omega}{EI}, \quad h = -\frac{4\rho^2\Omega}{kGE}$$

به طور مشابه معادلات (۱۰) تا (۱۳) را نیز می توان فقط بر حسب زوایای دوران نوشت. یعنی:

$$\phi_Y^{iv} + a\phi_Y'' + b\ddot{\phi}_Y + c\phi_Y + d\ddot{\phi}_Y + e\ddot{\phi}_Y + f\dot{\phi}_X + g\dot{\phi}_X + h\ddot{\phi}_X = 0 \quad (۱۶)$$

$$\phi_X^{iv} + a\phi_X'' + b\ddot{\phi}_X + c\phi_X + d\ddot{\phi}_X + e\ddot{\phi}_X - f\dot{\phi}_Y - g\dot{\phi}_Y - h\ddot{\phi}_Y = 0 \quad (۱۷)$$

این نکته قابل توجه است که روابط به ازای دستگاه مختصاتی نوشته شده اند که متصل به شفت است و با آن دوران می کند. بنابراین ممان های اینرسی مختلف محلی در دو جهت عمود باعث می شوند که ترک همیشه به صورت باز باقی بماند.

۴-۱- روتور با مقطع یکنواخت

از آن جایی که مدار چرخشی حالت پایدار عموماً بیضوی شکل است، حل معادلات (۱۴) و (۱۵) ممکن است به صورت زیر بیان شود:

$$X(Z, t) = x(Z)e^{i\omega t}, \quad (18)$$

$$Y(Z, t) = Y(Z)e^{i\omega t}, \quad (19)$$

که $i = \sqrt{-1}$ و ω فرکانس زاویه ای چرخشی است. جایگذاری معادلات (۱۸) و (۱۹) در (۱۴) و (۱۵) نتیجه می دهد:

$$x^{iv} + px'' + qx + iry'' + isy = 0, \quad (20)$$

$$y^{iv} + py'' + qy - irx'' - isx = 0, \quad (21)$$

که در آن:

$$p = \frac{\rho\Omega^2}{E} + \frac{\rho\omega^2}{E} + \frac{\rho\Omega^2}{kG} + \frac{\rho\omega^2}{kG}, \quad q = -\frac{\rho A\Omega^2}{EI} - \frac{\rho A\omega^2}{EI} + \frac{\rho^2\Omega^4}{kGE} + \frac{6\rho^2\Omega^2\omega^2}{kGE} + \frac{\rho^2\omega^4}{kGE},$$

$$r = \frac{2\rho\Omega\omega}{E} + \frac{2\rho\Omega\omega}{kG}, \quad s = -\frac{2\rho A\Omega\omega}{EI} + \frac{4\rho^2\Omega^3\omega}{kGE} + \frac{4\rho^2\Omega\omega^3}{kGE}.$$

معادلات (۲۰) و (۲۱) پاسخ هایی به صورت زیر دارند:

$$x(Z) = (A_r + iA_i)e^{\lambda Z} \quad (22)$$

$$y(Z) = (B_r + iB_i)e^{\lambda Z} \quad (23)$$

در این رابطه A_r, A_i, B_r, B_i اعداد حقیقی دلخواه و λ ریشه معادله دترمینان زیر می باشد:

$$\begin{vmatrix} \lambda^4 + p\lambda^2 + q & 0 & 0 & -(r\lambda^2 + s) \\ 0 & \lambda^4 + p\lambda^2 + q & r\lambda^2 + s & 0 \\ 0 & r\lambda^2 + s & \lambda^4 + p\lambda^2 + q & 0 \\ -(r\lambda^2 + s) & 0 & 0 & \lambda^4 + p\lambda^2 + q \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

بنابراین به ازای مقادیر ثابت Ω ، ریشه های معادله (۲۴) چنین خواهد بود:

$$\lambda = \pm\lambda_1, \pm i\lambda_2, \pm\lambda_3, \pm i\lambda_4.$$

اگر مقادیر ویژه در معادلات مشخصه جایگزین شوند، روابط $B_r = A_i$ و $B_i = -A_r$ به ازای λ_1 و λ_2 و همچنین روابط $B_i = A_r$ و $B_r = -A_i$ به ازای λ_3 و λ_4 به دست می آید. به این ترتیب توابع مودال به شکل زیر خواهد بود:

$$x_r(Z) = A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 + A_4 q_4 + A_5 q_5 + A_6 q_6 + A_7 q_7 + A_8 q_8, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}x_i(Z) &= B_1 q_1 + B_2 q_2 + B_3 q_3 + B_4 q_4 + B_5 q_5 + B_6 q_6 + B_7 q_7 + B_8 q_8, \\y_r(Z) &= B_1 q_1 + B_2 q_2 + B_3 q_3 + B_4 q_4 - B_5 q_5 - B_6 q_6 - B_7 q_7 - B_8 q_8, \\y_i(Z) &= -A_1 q_1 - A_2 q_2 - A_3 q_3 - A_4 q_4 + A_5 q_5 + A_6 q_6 + A_7 q_7 + A_8 q_8,\end{aligned}$$

که در این روابط

$$q_1 = \cosh \lambda_1 z, \quad q_2 = \sinh \lambda_1 z, \quad q_3 = \cos \lambda_2 z, \quad q_4 = \sin \lambda_2 z,$$

$$q_5 = \cosh \lambda_3 z, \quad q_6 = \sinh \lambda_3 z, \quad q_7 = \cos \lambda_4 z, \quad q_8 = \sin \lambda_4 z.$$

به طور مشابه برای معادلات (۱۶) و (۱۷) و جایگزینی معادلات (۱۰) و (۱۱)، توابع مودال مربوط به زوایای دوران می تواند به صورت زیر به دست آید:

$$\begin{aligned}\phi_{y_r}(Z) &= A_2 p_1 q_1 + A_4 p_1 q_2 + A_4 p_2 q_3 - A_3 p_2 q_4 + A_6 p_3 q_5 + A_5 p_3 q_6 + A_8 p_4 q_7 - A_7 p_4 q_8, \\ \phi_{y_i}(Z) &= B_2 p_1 q_1 + B_1 p_1 q_2 + B_4 p_2 q_3 - B_3 p_2 q_4 + B_6 p_3 q_5 + B_5 p_3 q_6 + B_8 p_4 q_7 - B_7 p_4 q_8, \\ \phi_{x_r}(Z) &= B_2 p_1 q_1 + B_1 p_1 q_2 + B_4 p_2 q_3 - B_3 p_2 q_4 - B_6 p_3 q_5 - B_5 p_3 q_6 - B_8 p_4 q_7 + B_7 p_4 q_8, \\ \phi_{x_i}(Z) &= -A_2 p_1 q_1 - A_4 p_1 q_2 - A_4 p_2 q_3 + A_3 p_2 q_4 + A_6 p_3 q_5 + A_5 p_3 q_6 + A_8 p_4 q_7 - A_7 p_4 q_8\end{aligned} \quad (26)$$

در این روابط داریم:

$$p_1 = \lambda_1 + \frac{\rho(\omega + \Omega)^2}{\lambda_1 k G}, \quad p_2 = \lambda_2 - \frac{\rho(\omega + \Omega)^2}{\lambda_2 k G}, \quad p_3 = \lambda_3 + \frac{\rho(\omega - \Omega)^2}{\lambda_3 k G}, \quad p_4 = \lambda_4 - \frac{\rho(\omega - \Omega)^2}{\lambda_4 k G}.$$

ارتباط بین تنش و کرنش تعمیم یافته، ممان ها و نیروهای برشی می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$M_x = EI \phi'_x, \quad M_y = EI \phi'_y, \quad (27)$$

$$Q_x = k GA(x' - \phi_y), \quad Q_y = k GA(y' - \phi_x). \quad (28)$$

بردار حالت کلی شفت به صورت زیر ایجاد می گردد:

$$U = [x_r, \phi_{y_r}, Q_{x_r}, M_{y_r}, x_i, \phi_{y_i}, Q_{x_i}, M_{y_i}, y_r, \phi_{x_r}, Q_{y_r}, M_{x_r}, y_i, \phi_{x_i}, Q_{y_i}, M_{x_i}]^T \quad (29)$$

توسط رابطه ماتریسی زیر، بردار حالت یک طرف شفت را می توان به طرف دیگر آن مرتبط نمود:

$$U_i = E U_{i-1} \quad (30)$$

در این رابطه ماتریسی، E ماتریس انتقال شفت با مقطع یکنواخت بوده که ابعاد آن ۱۶×۱۶ می باشد.

۲-۴- اتصال ترک دار

با فرض صورت گرفته در قبل، انعطاف پذیری محلی اتصال ناشی از ترک به صورت یک فنر پیچشی مدل می شود. با توجه به پیوستگی در این نوع اتصال، شرایط ذکر شده در زیر باید ارضا شود:

تغییر مکان ها

$$x^r = x^l + c_{22} Q_x^l, \quad (31)$$

$$y^r = y^l + c_{33} Q_y^l, \quad (32)$$

زوایای دوران ناشی از خمش

$$\phi_x^r = \phi_x^l + c_{55} M_x^l + c_{45} M_y^l, \quad (33)$$

$$\phi_y^r = \phi_y^l + c_{44} M_y^l + c_{45} M_x^l, \quad (34)$$

نیروهای برشی

$$Q_x^r = Q_x^l, \quad (35)$$

$$Q_y^r = Q_y^l, \quad (36)$$

ممان های خمشی

$$M_x^r = M_x^l, \quad (37)$$

$$M_y^r = M_y^l, \quad (38)$$

در این روابط، بالانویس r و l به ترتیب به معنای راست و چپ می باشد. از سوی دیگر c_{22} و c_{33} بیانگر تغییر مکان های اضافی ناشی از نیروی برشی و c_{45} ، c_{44} و c_{55} نشان دهنده زوایای دوران اضافه شده ناشی از ممان خمشی اعمالی به فنر معادل ترک می باشد. رابطه متغیرهای حالت بین سمت راست و چپ اتصال ترک، مستقیماً از معادلات (۳۱) تا (۳۸) به دست می آید که شکل ماتریسی آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U^r = H U^l \quad (39)$$

که در آن، H ماتریس انتقال اتصال مربوط به ترک بوده که اجزای آن در پیوست مقاله آورده شده است (پیوست C).

۳-۴- ترک در زاویه متفاوت

در شکل (۲) تعدادی از ترک های باز در جهات متفاوت و با زوایای انحراف مختلف θ_s ، نسبت به محور Y نشان داده شده است. باید توجه داشت که در هنگام استفاده از روش TMM، تبدیل دستگاه مختصات المان ها یا اتصالات، به یک دستگاه مختصات ثابت ضروری است. معادلات ذیل به کمک رابطه (۹)، این تبدیلات را انجام می دهد:

$$U_j |_{\theta=s} = T U_j |_{\theta=0}, \quad (40a)$$

$$U_{j+1} |_{\theta=s} = T U_{j+1} |_{\theta=0}, \quad (40b)$$

$$U_{j+1} |_{\theta=s} = H_j U_j |_{\theta=s}, \quad (40c)$$

با استفاده از سه معادله ذکر شده در بالا، رابطه زیر برای ترک های دارای زوایای مختلف نسبت به یکدیگر، به دست می آید:

$$U_{j+1} |_{\theta=0} = T^{-1} H_j T U_j |_{\theta=0}. \quad (41)$$

در رابطه فوق، T ماتریس انتقال مربوط به دو دستگاه مختصات است که المان های این ماتریس 16×16 در پیوست مقاله داده شده است (پیوست D).

۴-۴- اتصال پله

اساسا متغیرهای حالت در دو طرف اتصال پله ای، باید پیوسته باشند. لذا شرایط زیر بایستی در محل پله شفت ها ارضا شود:

تغییر مکان ها

$$x^r = x^l, \quad (42)$$

$$y^r = y^l, \quad (43)$$

زوایای کلی دوران

$$x^{rr} = x^{ll}, \quad (44)$$

$$y^{rr} = y^{ll}, \quad (45)$$

نیروهای برشی

$$Q_x^r = Q_x^l, \text{ or } kGA^r(x^{rr} - \phi_y^r) = kGA^l(x^{ll} - \phi_y^l) \quad (46)$$

$$Q_y^r = Q_y^l, \text{ or } kGA^r(y^{rr} - \phi_x^r) = kGA^l(y^{ll} - \phi_x^l) \quad (47)$$

ممان های خمشی

$$M_x^r = M_x^l, \quad (48)$$

$$M_y^r = M_y^l, \quad (49)$$

با جایگزینی معادلات (۴۴) و (۴۵) در معادلات (۴۶) و (۴۷) داریم:

$$\phi_y^r = \phi_y^l + \frac{1}{kG} \left(\frac{1}{A^l} - \frac{1}{A^r} \right) Q_x^l, \quad (50)$$

$$\phi_x^r = \phi_x^l + \frac{1}{kG} \left(\frac{1}{A^l} - \frac{1}{A^r} \right) Q_y^l.$$

بدین ترتیب شرایط پیوسته زاویه دوران ناشی از خمش، به جای زوایای دوران کلی به دست می آید. حال با استفاده از معادلات (۴۲) تا (۵۰)، ارتباط متغیرهای حالت بین سمت راست و چپ اتصال پله ای را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U^r = S U^l, \quad (51)$$

که در آن، S ماتریس انتقال اتصال پله ای می باشد که المانهای آن در پیوست مقاله ذکر شده است (پیوست E).

۵- معادله فرکانسی روتور دارای چند ترک

با داشتن ماتریس های انتقال هر بخش از یک شفت همانند ماتریس های المان شفت، اتصالات، پله و ترک، می توان ماتریس انتقال کلی شفت را به دست آورد و به کمک آن معادله فرکانسی روتور دارای چند ترک را محاسبه نمود. اگر یک شفت پله دار که دارای چند ترک عرضی با زوایای مختلف می باشد را در نظر بگیریم، ماتریس انتقال این روتور را می توان به صورت معادله (۵۲) نوشت:

$$U_n = E_n S_{n-1} E_{n-1} \dots E_{j+1} T_j^{-1} H_j T_j E_j \dots E_3 T_2^{-1} H_2 T_2 E_2 S_1 E_1 U_0. \quad (52)$$

یا:

$$U_n = Q U_0. \quad (53)$$

در این رابطه ماتریس Q ، ماتریس انتقال کلی سیستم بوده که 16×16 می باشد. با اعمال شرایط مرزی مسئله، رابطه (۵۳) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \{U_n\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q_{11}] & [Q_{12}] \\ [Q_{21}] & [Q_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (54)$$

در این رابطه، $\{0\}$ ، بردارهای حالت صفر ناشی از اعمال شرایط مرزی در دو انتهای روتور می باشند. برای مساله مقدار ویژه در ارتعاش آزاد، تنها معادله زیر باید در نظر گرفته شود:

$$\{0\} = [Q_{21}] \{U_0\}. \quad (55)$$

به این ترتیب مقادیر ویژه با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس مربعی Q_{21} قابل حصول خواهند بود. لذا معادله فرکانسی روتور عبارتست از:

$$|Q_{21}| = 0. \quad (56)$$

۶- شکل مدها

برای محاسبه شکل مدها می توان از کوفاکتورهای معادله مشخصه استفاده نمود. با توجه به این که ماتریس مشخصه شفت اخیر، ماتریسی 8×8 است، لذا باید هشت بردار ویژه یافت شود. به منظور یافتن این هشت بردار ویژه کافی است هشت کوفاکتور متناظر با سطر اول ماتریس مشخصه شفت دارای پله را به دست آورد و سپس نتایج حاصل را نرمالیزه کرد. پس از به دست آوردن بردارهای ویژه و جایگذاری در روابط موجود در پیوست مقاله (پیوست G)، معادلات (۲۵) و (۲۶) مورد استفاده قرار می گیرد و با داشتن مقادیر $p_4, p_3, p_2, p_1, \lambda_4, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ از المان اول، شکل اولین المان به دست می آید. همچنین با استفاده از ماتریس های E, H, T, T^{-1} و S ، ضرایب مربوط به معادلات (۲۵) و (۲۶) به ترتیب برای المان های دیگر نیز یافت می شود. نحوه به دست آوردن کوفاکتورها در پیوست G شرح داده شده است.

۷- محاسبه فرکانس طبیعی حاصل از مدل

در این بخش به بررسی تاثیر ترک در فرکانس طبیعی شفت های دوار می پردازیم. بدین منظور، شفتی با مقطع یکنواخت که دارای دو ترک می باشد را در نظر می گیریم. این شفت فولادی دارای طول $L=1m$ ، قطر $D=0.03m$ ، مدول یانگ $E=200GPa$ ، نسبت پواسون $\nu=0.3$ و دانسیته $\rho=7860 kg/m^3$ می

باشد که دارای شرایط مرزی دو سر گیردار می باشد. خصوصیات مربوط به دو ترک را نیز می توان در جدول (۱) مشاهده نمود.

شکل های (۳) تا (۶) تاثیر سرعت دورانی محور را به ازای موقعیت های مختلف ترک دوم، به ترتیب در مدهای اول تا چهارم نشان می دهد. در این شکل ها، فرض بر این است که ترک اول موقعیتی ثابت در راستای محور دارد. همانطور که در این شکل ها ملاحظه می شود، بخش هایی از نمودار که دارای شیب منفی هستند، اشاره به فرکانس طبیعی پسرو^۱ یا مد فرکانسی فرد و قسمت های دارای شیب مثبت مربوط به فرکانس طبیعی پیشرو^۲ یا مد فرکانسی زوج می باشد. نتایج حاصل از شکل های (۳) تا (۶) نشان می دهد که فرکانس در محدوده $\Omega \leq 10Hz$ به استثنای مدهای سوم و چهارم (در حالتی که ترک دوم در وسط محور واقع می شود) دارای تغییرات غیر خطی است. به عبارت دیگر فرکانس طبیعی و سرعت دورانی محور در سرعت های $\Omega > 10Hz$ ، نسبت به یکدیگر رابطه ای خطی دارند.

۸- تشخیص موقعیت ترک ها در روتور ترک دار

شفتهی مطابق شکل (۷) را در نظر بگیرید. همانطور که مشاهده می شود، این شفت دارای پنج ترک و دو پله می باشد که به صورت متقارن نسبت به محور عمودی وسط شفت قرار گرفته است. عمق بی بعد ترک ها به ترتیب از چپ به راست $0/4$ ، $0/3$ ، $0/4$ ، $0/3$ و $0/4$ می باشد. سرعت دورانی این شفت نیز 30 هرتز در نظر گرفته شده که مقداری ثابت بوده و تمام خصوصیات دیگر این شفت مانند شفت مربوط به بخش ۷ است. پنج ترک در دو حالت مورد بررسی قرار می گیرد. یکی حالتی که ترک ها تحت زاویه صفر نسبت به یکدیگر و نسبت به محور Y ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0^0$) قرار دارند و دوم حالتی که این ترک ها نسبت به هم زاویه داشته باشند.

۸-۱- حالت اول: ترک های هم ردیف

در این حالت فرکانس اول شفت در دو حالت ترک دار و بدون ترک به ترتیب $28/56$ و $31/18$ هرتز می باشد. مد شیپ های مربوط به این شفت، در دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ ، مطابق شکل (۸) نشان داده شده و اختلاف این دو مد شیپ، یعنی تفاضل مد شیپ های مربوط به شفت ترک دار نسبت به دو صفحه مختلف نیز در شکل (۹) به نمایش گذاشته شده است. با توجه به این شکل، دقیقاً در نقاطی از امتداد شفت که ترک در آن موقعیت ها قرار گرفته، تغییرات قابل ملاحظه ای مشاهده می شود. همچنین از آن جایی که ترک ها به طور متقارن و تحت زاویه صفر نسبت به یکدیگر قرار دارند، تفاضل مد شیپ های متناظر با دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ ، نیز متقارن است.

¹ Backward whirling

² Forward whirling

۸-۲- حالت دوم: ترک های تحت زاویه

در این حالت زوایای ترک های $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ نسبت به محور قائم به ترتیب، ۰، ۳۰ و ۶۰ و ۶۰- و ۰ درجه در نظر گرفته شده است.

مشابه با حالت اول، فرکانس های مربوطه برای دو حالت ترک دار و بدون ترک به ترتیب عبارت خواهد بود از ۲۸/۵۶ و ۳۱/۱۸ هرتز. این نتیجه حاصل شد که فرق چندانی در اولین فرکانس طبیعی شفت در دو حالت وجود ندارد و فرکانس به دست آمده تقریباً برای دو حالت یکسان است. مد شیپ های متناظر با شفت مورد نظر در دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ ، مطابق شکل ۱۰، رسم شده است. از تفاضل این دو مد شیپ، همانند حالت قبل، موقعیت ترک ها به صورت نشان داده شده در شکل ۱۱، به دست می آید.

۹- مقایسه با نتایج تجربی

در این بخش، به منظور تایید نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی شفت با استفاده از روش ماتریس انتقال، دو مثال تجربی ذکر شده است.

۹-۱- تحلیل فرکانسی لوله آلومینیمی ترک دار

مطابق شکل ۱۲، آزمایشی تجربی بر روی لوله ای از جنس آلومینیم صورت گرفته و فرکانس های دوم به بعد برای این لوله ترک دار، به صورت تجربی به دست آورده شده است. خصوصیات این لوله ی آلومینیمی به شرح زیر است:

طول $L=0/87$ متر، قطر داخلی $D_i=0/02$ متر، قطر خارجی $D_o=0/033$ متر و دانسیته آلومینیم $2645/19$ کیلوگرم بر واحد حجم، ویژگی های دو ترک موجود در این لوله آلومینیمی در جدول (۲) داده شده است [15].

حال به منظور مقایسه نتایج به دست آمده از روش ماتریس انتقال با نتایج تجربی، کافی است سرعت دورانی لوله توخالی را برابر صفر در نظر بگیریم و فرکانس ها را با این روش بیابیم. نتایج حاصل از این تحلیل و همچنین نتایج تجربی در جدول (۳) آورده شده است. مقایسه این نتایج و نزدیکی پاسخ های به دست آمده، نشان دهنده صحت مدل مورد استفاده می باشد.

۹-۲- تحلیل فرکانسی شفت فولادی ترک دار

دومین آزمایش مطابق شکل (۱۳) بر روی شفت فولادی دو سر مفصل و فاقد سرعت دورانی به منظور تعیین سه فرکانس طبیعی اول صورت گرفته است [16] که جنس آن از فولاد 40Cr می باشد. در این آزمایش از Doppler signal laser vibrometer برای تعیین فرکانس ها استفاده شده است. مشخصات این شفت به صورت زیر می باشد:

$E=2/06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ، نسبت پواسون $\nu=0/3$ ، $L_3=18$ ، $L_2=188 \text{ mm}$ ، $L_1=8 \text{ mm}$ ، $L=300 \text{ mm}$ ، $\rho=7860 \text{ kg/m}^3$ ، $d_1=9/5 \text{ mm}$ ، $d_2=76 \text{ mm}$ ، $e=148/3$. در این آزمایش ترک به صورت ترک خستگی مدل شده و با عمقی معین در موقعیتی ثابت بر روی شفت قرار گرفته است. با توجه به این که طول L_1 در

مقایسه با طول کل شفت نسبتاً کم است، لذا قسمت های اورهنگ (بعد از تکیه گاه ها) تاثیر زیادی بر روی فرکانس های طبیعی شفت ندارد. بنابراین، به منظور مقایسه نتایج حاصل از این آزمایش و نیز نتایج به دست آمده از روش ماتریس انتقال برای شفت نشان داده شده در شکل ۱۳ از قسمت های اورهنگ صرفه نظر شده است. لازم به ذکر است که این آزمایش به ازای سه عمق متفاوت ترک صورت گرفته است (مطابق شکل ۱۴). نتایج حاصل از این مقایسه ها در جدول (۴) آمده است. همانطور که مشاهده می شود، تطابق خوبی بین فرکانس های تجربی و نتایج به دست آمده از TMM برقرار است.

۱۰- تخمین عمق ترک

به منظور تخمین عمق ترک احتمالی در شفت های دوار، شفت نشان داده شده در شکل (۱۵) را در نظر بگیرید که ابعاد هندسی این شفت بر روی شکل مشخص شده و پارامترهای فیزیکی آن مشابه شفت دوار مربوط به بخش ۷ می باشد. همانطور که در شکل (۱۵) ملاحظه می شود، این شفت که با سرعت ثابت ۳۰ هرتز در حال دوران است، دارای ترکی به عمق بی بعد $a/D = 0.4$ می باشد که در موقعیت $e = 0.36 m$ قرار گرفته است. اولین فرکانس طبیعی این شفت به ازای موقعیت و عمق فرض شده برای ترک، برابر ۶۱/۵۱۳ است. همانطور که در بخش های قبلی ملاحظه شد، به راحتی می توان موقعیت ترک را برای شفت نشان داده شده در شکل (۱۵)، با فرض موجود بودن فرکانس طبیعی اول، به دست آورد (مطابق شکل (۱۶)).

در صورتی که برای ترک، عمق های بی بعد صفر تا ۰/۶ را در نظر بگیریم و همچنین، موقعیت ترک را در طول شفت تغییر دهیم و فرکانس های طبیعی اول این شفت را به دست آوریم، به شکل (۱۷) دست خواهیم یافت. بر طبق این شکل، افزایش عمق و موقعیت ترک، منجر به افت فرکانس طبیعی می شود. البته باید توجه داشت که شکل (۱۷)، با در نظر گرفتن بخش سمت چپ دیسک دوار در شکل (۱۵) حاصل شده است. از آن جا که شفت نشان داده شده در شکل (۱۵)، صرفه نظر از موقعیت ترک، شکلی متقارن است، بنابراین، اگر ترک در سمت راست دیسک دوار نیز واقع شود، شکل (۱۷) معتبر خواهد بود.

شکل (۱۸)، کانتورهای فرکانس طبیعی حاصل از شکل (۱۷) را نشان می دهد. این کانتورها به ما کمک می کند تا بتوانیم عمق ترک را با فرض معلوم بودن فرکانس طبیعی اول و موقعیت ترک، تعیین نماییم. لازم به ذکر است که کانتورهای رسم شده، مربوط به شفت نشان داده شده در شکل (۱۵) می باشد. بنابراین، با مشخص کردن موقعیت ترک (۰/۳۶ متر) و معلوم بودن فرکانس طبیعی (۶۱/۵۱۳ هرتز) عمق بی بعد ۰/۴ برای ترک به دست خواهد آمد. در صورتی که چند ترک در سیستم موجود باشد، باید موقعیت ها و عمق های مختلفی برای ترک ها در نظر گرفت و فرکانس ها متناظر با آن موقعیت ها و عمق ها را به صورت کانتورهای ترسیم نمود. به این ترتیب، برای ترک های موجود، با داشتن فرکانس طبیعی اول و موقعیت ترک ها، عمق ترک ها را می توان تخمین زد.

۱۱- نتیجه‌گیری

در این مقاله آنالیز فرکانسی شفت ترک دار، با استفاده از روش ماتریس انتقال، ارائه و شفت از نوع تیر تیموشنکو در نظر گرفته شد. مزیت اساسی روش ماتریس انتقال این است که تعداد المان‌های مربوط به شفت مهم نیست، زیرا با این تقریب همواره ماتریس انتقال کلی روتور، ماتریسی 16×16 خواهد بود و بنابراین نسبت به روش المان محدود به حافظه کمتری نیاز دارد. از طرف دیگر واضح است که ترک در حالت کلی باز و بسته می‌شود و نسبت به زمان متغیر بوده و بنابراین یافتن فرکانس طبیعی ثابت برای روتور در این حالت بسیار دشوار است، اما در این مقاله معادلات برای دستگاه مختصات ثابت بر روی مقطع شفت به دست آمد که نتیجه آن، مستقل بودن انعطاف پذیری مربوط به ترک نسبت به زمان است. بنابراین، ترک‌ها رفتاری مانند ترک باز داشتند. شکل‌های (۳) الی (۶) نیز بیانگر این نکته بودند که فاصله بین دو ترک، فرکانس چرخشی پسرو^۱ را بیش از فرکانس چرخشی پیشرو^۲، به خصوص در سرعت‌های پایین تر شفت، تحت تاثیر قرار می‌دهد. همچنین نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی به ویژه برای شفت با مقطع یکنواخت و یا شفت دوار دارای یک ترک، نشان داد که افت فرکانس یکی از علایم تشخیص ترک است. از طرفی هر چه عمق ترک بیشتر باشد افت بیشتری در فرکانس خواهیم داشت. به علاوه پس از به دست آوردن فرکانس‌های اولیه ی شفت مربوط به شکل ۷، مد شیپ‌های متناظر با صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ در حالتی که شفت دارای ترک است، ترسیم گردید. از تفاضل این دو شکل مد، موقعیت ترک‌های موجود در سیستم تشخیص داده شد. به عبارت دیگر در نمودار تفاضلی حاصل، نقاطی که دارای تغییرات قابل ملاحظه است، بیانگر موقعیت ترک می‌باشد. یکی از مزایایی که این نحوه تشخیص ترک نسبت به روش ذکر شده در مرجع [12] دارد این است که نیازی به تعیین مد شیپ شفت سالم نمی‌باشد و مستقیماً بدون نیاز به شفت سالم، از روی شفتی که در دسترس است و احتمالاً دارای ترک می‌باشد، می‌توان موقعیت ترک را تشخیص داد. اهمیت این مطلب زمانی آشکار می‌شود که شخصی بخواهد درستی و سالم بودن سیستم مورد نظر را بررسی کند. در این هنگام اگر فرد مذکور اطلاعی از پیشینه ی سیستم (در این جا شفت) نداشته باشد و یا داده‌های تجربی سیستم سالم از بین رفته باشد، این شخص نمی‌تواند از روش مرجع [12] برای تعیین و شناسایی موقعیت ترک استفاده نماید. همچنین، عمق ترک، علاوه بر موقعیت ترک، برای شفت دارای یک ترک نیز تخمین زده شد. در خاتمه، با به دست آوردن کانتورهای فرکانس طبیعی که از تغییرات موقعیت و عمق ترک فرضی در شفت دوار حاصل شده بود، موقعیت ترک موجود در شفت دوار با داشتن فرکانس طبیعی اول و موقعیت ترک تعیین گردید.

مراجع

- [1] Dimarogonas, A. D., and Paipetis, S. A., "Analytical Methods in Rotor Dynamics", Applied Science Pub., London, (1983).
- [2] Dimarogonas, A. D., "Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, No. 5, pp. 831- 857, (1996).

¹ Backward

² Forward

- [3] Papadopoulos, C. A., and Dimarogonas, A. D., "Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of a Rotating Shaft with an Open Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 117, No. 1, pp. 81- 93, (1987).
- [4] Papadopoulos, C. A., and Dimarogonas, A. D., "Coupling of Bending and Torsional Vibration of a Cracked Timoshenko Shaft", *Ingenieur-Archiv*, Vol. 57, pp. 257- 266, (1987).
- [5] Papadopoulos, C. A., and Dimarogonas, A. D., "Coupled Vibration of Cracked Shafts, *Journal of Vibration and Acoustics*", Vol. 114, pp. 461- 467, (1992).
- [6] Sekhar, A. S., "Vibration Characteristics of a Cracked Rotor with Two Open Cracks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No. 4, pp. 497- 512, (1999).
- [7] Gasch, R., "Dynamic Behaviour of the Laval Rotor with a Transverse Crack", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 22, pp. 790- 804, (2008).
- [8] Chondros, T. G., and Labeas, G. N., "Torsional Vibration of a Cracked Rod by Variational Formulation and Numerical Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, pp. 994- 1006, (2007).
- [9] Sekhar, A. S., "Multiple Cracks Effects and Identification", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 22, pp. 845- 878, (2008).
- [10] Bachschmid, N., Pennacchi, P., Tanzi, E., and Vania, A., "Identification of Transverse Crack Position and Depth in Rotor Systems", *Meccanica*, Vol. 35, pp. 563- 582, (2000).
- [11] Tsai, T. C., and Wang, Y. Z., "Vibration Analysis and Diagnosis of a Cracked Shaft", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 192, No. 3, pp. 607- 620, (1996).
- [12] Tsai T. C., and Wang, Y. Z., "The Vibration of a Multi-crack Rotor", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 39, No. 9, pp. 1037-1053, (1997).
- [13] Haris, C. M., and Crede, C. E., "*Shock and Vibration Handbook*", McGraw-Hill (Second Edition), New York, (1976).
- [14] Shames, H. I., and Dym, C. L., "*Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*", McGraw-Hill, New York, pp. 200, (1985).
- [15] Murigendrappa, S. M., Maiti, S. K., and Srirangarajan, H. R., "Frequency-based Experimental and Theoretical Identification of Multiple Cracks in Straight Pipes Filled with Fluid", *Independent Nondestructive Testing and Evaluation International*, Vol. 37, pp. 431- 438, (2004).
- [16] Xiang, J., Zhong, Y., Chen, X., and He, Z., "Crack Detection in a Shaft by Combination of Wavelet-based Elements and Genetic Algorithm", *International Journal of Solids and Structures*, (2008), Doi:10.1016/j.ijsolstr.2008.04.014.

فهرست نمادهای انگلیسی

a	: عمق ترک
A	: مساحت سطح مقطع شفت
c_{ij}	: مولفه های ماتریس انعطاف پذیری ناشی از ترک
d_1	: قطر محور در شفت اورهنگ
d_2	: قطر دیسک در شفت اورهنگ
D_i	: قطر داخلی لوله
D_o	: قطر خارجی لوله
E	: مدول الاستیسیته
e	: موقعیت ترک
G	: مدول برشی
I	: ممان اینرسی سطح مقطع شفت
$J(\alpha)$: چگالی انرژی کرنشی
K_{Ni}	: فاکتور شدت تنش
k	: ضریب شکل سطح مقطع
l	: طول محور
M	: گشتاور
P_i	: نیروی اعمالی بر روی روتور
Q	: نیروی برشی
t	: ضخامت لوله
u_i	: جابه جایی اضافی ناشی از ترک
$XY Z$: دستگاه مختصات ساکن بر روی روتور
$\underline{X} \underline{Y} \underline{Z}$: دستگاه مختصات مرجع

فهرست نمادهای یونانی

α	: عمق بی بعد ترک
β	: موقعیت بی بعد ترک
ω	: فرکانس طبیعی
Ω	: سرعت دورانی شفت
ρ	: دانسیته
θ	: زاویه ترک نسبت به محور Y
ϕ_X و ϕ_Y	: زوایای دوران نسبت به دستگاه مختصات ساکن بر روی شفت
$\underline{\phi}_Y$ و $\underline{\phi}_X$: زوایای دوران در دستگاه مختصات کلی

σ_i : تنش ناشی از بار P_i

ν : ضریب پواسان

زیر نویس ها

i و j : اندیس تکرار

N : شماره مد

i و r : موهومی و حقیقی

x و y : محورهای مختصات ساکن بر روی شفت که با آن دوران می کنند

بالانویس ها

l : چپ

r : راست

پیوست ها

پیوست A: توابع $F_N(\alpha/h)$

توابع $F_N(\alpha/h)$ مربوط به معادله (۳) با روابط زیر داده می شود:

$$F_{IX}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} \frac{[0.923 + 0.199(1 - \sin \beta)^4]}{\cos \beta}},$$

$$F_{IY}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} \frac{[0.752 + 2.02\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 0.37(1 - \sin \beta)^3]}{\cos \beta}},$$

$$F_{II}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \frac{[1.122 - 0.561\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 0.85\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 + 0.18\left(\frac{\alpha}{h}\right)^3]}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{h}}},$$

$$F_{III}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}}, \quad \beta = \frac{\pi \alpha}{2h}.$$

پیوست B: انعطاف پذیری های c_{ij}

روابط انعطاف پذیری مربوط به ترک که در این مقاله استفاده شده است، به صورت زیر می باشد:

$$c_{22} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi ER} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{b}} \bar{Y} F_{III}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{33} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E R} \int_0^{\bar{b}} \int_0^{\bar{a}} \bar{Y} F_{II}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{44} = \frac{32(1-\nu^2)}{\pi E R^3} \int_0^{\bar{b}} \int_0^{\bar{a}} \bar{X}^2 \bar{Y} F_{IY}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{45} = \frac{64(1-\nu^2)}{\pi E R^3} \int_0^{\bar{b}} \int_0^{\bar{a}} \bar{X} \bar{Y} \sqrt{1-\bar{X}^2} F_{IX}(\bar{Y}/\bar{h}) F_{IY}(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X},$$

$$c_{55} = \frac{64(1-\nu^2)}{\pi E R^3} \int_0^{\bar{b}} \int_0^{\bar{a}} (1-\bar{X}^2) \bar{Y} F_{IX}^2(\bar{Y}/\bar{h}) d\bar{Y} d\bar{X}.$$

پیوست C: ماتریس انتقال مربوط به ترک

ماتریس انتقال H برای اتصال ترک دار مطابق زیر می باشد:

$$H_{i,i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 16,$$

$$H_{1,3} = H_{5,7} = c_{22},$$

$$H_{9,11} = H_{13,15} = c_{33},$$

$$H_{2,4} = H_{6,8} = c_{44},$$

$$H_{10,12} = H_{14,16} = c_{55},$$

$$H_{2,12} = H_{6,16} = H_{10,4} = H_{14,8} = c_{45},$$

و مابقی المان های این ماتریس برابر صفر می باشد.

پیوست D: ماتریس انتقال دوران (T)

ماتریس انتقال مربوط به دوران دستگاه مختصات دوران یافته تحت زاویه θ نسبت به دستگاه مختصات XYZ به صورت زیر بیان می شود:

$$T_{i,i} = \cos \theta, \quad i = 1, 2, \dots, 16,$$

$$T_{i,i+8} = \sin \theta, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

$$T_{i+8,i} = -\sin \theta, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

و بقیه درایه های این ماتریس برابر صفر است.

پیوست E: ماتریس انتقال مفصل پله (S)

ماتریس انتقال S که مربوط به اتصال ترک است، چنین می باشد:

$$S_{i,i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 16,$$

$$S_{i,i+1} = \frac{1}{kG} \left(\frac{1}{A^l} - \frac{1}{A^r} \right), \quad i = 2, 6, 10, 14,$$

و بقیه المان های این ماتریس برابر صفر می باشد.

پیوست F: ضرایب معادلات مد شیپ

ضرایب A_1, A_2, \dots, A_8 و B_1, B_2, \dots, B_8 به ازای انتهای المان اول سمت چپ شفت، بر حسب شرایط مرزی انتهای چپ شفت به صورت زیر حاصل می شود:

$$A_1 = -\frac{M_{x_i}(0) - M_{y_r}(0) - EI \lambda_2 p_2 x_r(0) + EI \lambda_2 p_2 y_i(0)}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$A_2 = -\frac{K(\phi_{x_i}(0) - \phi_{y_r}(0))(\lambda_2 - p_2) + p_2(Q_{x_r}(0) - Q_{y_i}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$A_3 = -\frac{-M_{x_i}(0) + M_{y_r}(0) + EI \lambda_1 p_1 (y_i(0) - x_r(0))}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$A_4 = -\frac{K(\phi_{y_r}(0) - \phi_{x_i}(0))(\lambda_1 - p_1) + p_1(Q_{y_i}(0) - Q_{x_r}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$A_5 = -\frac{-M_{x_i}(0) - M_{y_r}(0) - EI \lambda_4 p_4 (x_r(0) + y_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

$$A_6 = -\frac{-K(\phi_{y_r}(0) + \phi_{x_i}(0))(p_4 - \lambda_4) + p_4(Q_{y_i}(0) + Q_{x_r}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)},$$

$$A_7 = -\frac{M_{x_i}(0) + M_{y_r}(0) - EI \lambda_3 p_3 (x_r(0) + y_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

$$A_8 = -\frac{K(\phi_{y_r}(0) + \phi_{x_i}(0))(\lambda_3 - p_3) - p_3(Q_{y_i}(0) + Q_{x_r}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)},$$

$$B_1 = -\frac{-M_{x_r}(0) - M_{y_i}(0) - EI \lambda_2 p_2 (x_i(0) + y_r(0))}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$B_2 = -\frac{K(\phi_{y_i}(0) + \phi_{x_r}(0))(p_2 - \lambda_2) + p_2(Q_{y_r}(0) + Q_{x_i}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$B_3 = -\frac{M_{x_r}(0) + M_{y_i}(0) - EI \lambda_1 p_1 (x_i(0) + y_r(0))}{2EI(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)},$$

$$B_4 = -\frac{K(\phi_{y_i}(0) + \phi_{x_r}(0))(\lambda_1 - p_1) - p_1(Q_{y_r}(0) + Q_{x_i}(0))}{2K(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2)},$$

$$B_5 = -\frac{M_{x_r}(0) - M_{y_i}(0) + EI \lambda_4 p_4 (y_r(0) - x_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

$$B_6 = -\frac{K(\phi_{x_r}(0) - \phi_{y_i}(0))(\lambda_4 - p_4) + p_4(Q_{x_i}(0) - Q_{y_r}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)},$$

$$B_7 = -\frac{M_{y_i}(0) - M_{x_r}(0) + EI \lambda_3 p_3 (y_r(0) - x_i(0))}{2EI(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)},$$

$$B_8 = -\frac{K(\phi_{y_i}(0) - \phi_{x_r}(0))(\lambda_3 - p_3) + p_3(Q_{y_r}(0) - Q_{x_i}(0))}{2K(\lambda_4 p_3 - \lambda_3 p_4)}.$$

در شفت دو سر مفصل $A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = 0$. زیرا به ازای این شرایط مرزی، ممان و تغییر مکان در انتهای سمت چپ شفت صفر می باشد.

پیوست G

برای محاسبه شکل مدها می توان از کوفاکتورهای معادله مشخصه استفاده نمود. معادله $(A - \lambda_i I)X_i = 0$ را که در آن λ_i فرکانس طبیعی و X_i بردار ویژه متناظر با این فرکانس است، برای یک سیستم مرتبه ۳ می توان این معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (1)$$

که معادله فرکانسی سیستم را می توان با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

بسط این دترمینان بر حسب کوفاکتورهای سطر اول به صورت زیر است:

$$(a_{11} - \lambda_i)C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 0, \quad (3a)$$

سپس به جای سطر اول، سطر دوم را قرار داده می شود و دو سطر دیگر بدون تغییر باقی می ماند. مقدار دترمینان حاصله صفر خواهد بود. زیرا دو سطر آن یکسانند:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0, \quad (3b)$$

بسط این دترمینان نیز بر حسب کوفاکتورهای سطر اول آن، که با کوفاکتورهای دترمینان قبلی یکسانند، مطابق زیر به دست می آید:

$$a_{21}C_{11} + (a_{22} - \lambda_i)C_{12} + a_{23}C_{13} = 0, \quad (3c)$$

و بالاخره به جای سطر اول، سطر سوم را قرار داده و بسط این دترمینان جدید نیز بر حسب کوفاکتورهای سطر اول آن نوشته می شود:

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0, \quad (3d)$$

و به طور مشابه با قبل

$$a_{31}C_{11} + a_{32}C_{12} + (a_{33} - \lambda_i)C_{13} = 0, \quad (3)$$

حال معادلات (3a)، (3c) و (3e) را می توان به صورت یک معادله ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (4)$$

مقایسه معادلات (۱) و (۴) نشان می دهد که بردارهای ویژه X_i را می توان با قرار دادن $\lambda = \lambda_i$ در کوفاکتورهای معادله مشخصه به دست آورد. چون این بردارهای ویژه مربوط به مختصات نرمال هستند، ستون کوفاکتورها با یک ضریب با بردارهای ویژه برابر خواهد بود. یعنی

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \alpha \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

همانطور که ملاحظه شد، بردارهای ویژه یک سیستم سه درجه آزادی به سادگی به دست آمد. دقیقاً مشابه این اعمال را می توان برای محاسبه هشت بردار ویژه انجام داد.

جدولها

جدول ۱- خصوصیات ترک ها

Second crack	First crack	
0.5 0.2 تا 0.9 0^0	0.3 و 0.1 0.1 0^0	عمق بی بعد ترک (a/D) موقعیت بی بعد ترک (z/l) زاویه ترک نسبت به محور Y (θ)

جدول ۲- خصوصیات دو ترک مربوط به لوله آلومینیومی ترک دار [15]

Case No.	Crack data			
	β_1	a_1/t	β_2	a_2/t
1	0.207	0.19043	0.350	0.38077
2	0.207	0.25385	0.350	0.63460
3	0.207	0.38077	0.350	0.19043
4	0.207	0.63460	0.350	0.25385

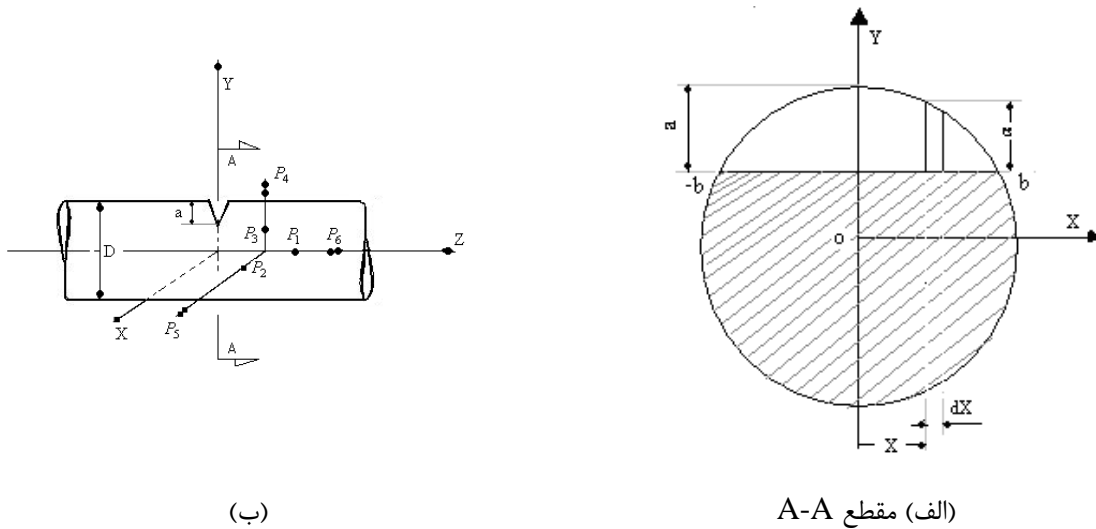
جدول ۳- مقایسه فرکانس های طبیعی لوله ترک دار با استفاده از روش تجربی و روش ماتریس انتقال (Hz)

Case No.	Experimental [15]				TMM			
	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
No crack	382.50	835.00	1390.00	2312.50	378.92	842.86	1475.45	2262.09
1	382.16	834.81	1389.00	2311.00	378.81	842.23	1474.8	2261.18
2	381.48	834.48	1386.00	2309.00	378.64	840.85	1473.32	2259.04
3	382.01	834.50	1389.00	2312.10	378.61	842.16	1474.94	2261.01
4	381.10	833.50	1386.40	2310.00	377.89	840.61	1473.85	2258.36

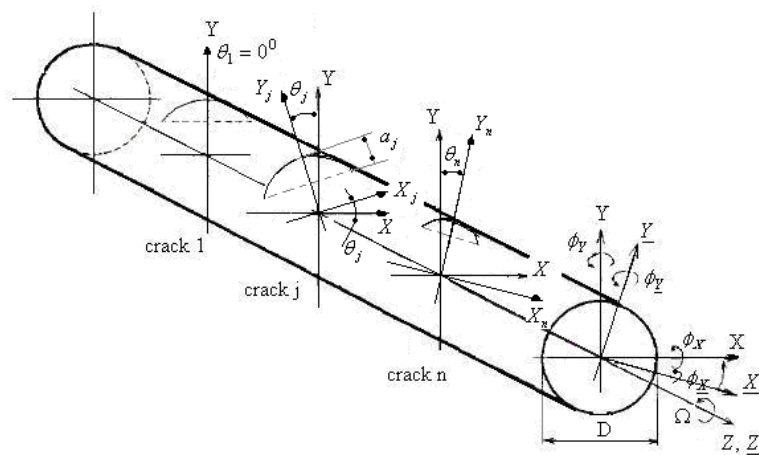
جدول ۴ - فرکانس های طبیعی شفت فولادی به روش تجربی و روش ماتریس انتقال (Hz)

$\beta = \frac{e}{L_2}$	$\alpha = \frac{a}{d_1}$	Experimental [16]			TMM		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0.789	0.21 (a)	97.34	583.84	1051.64	98.37	584.21	1054.02
0.789	0.41 (b)	93.04	580.87	1032.64	97.3	583.41	1049.71
0.789	0.18 (c)	97.99	584.71	1053.58	98.40	584.24	1054.16

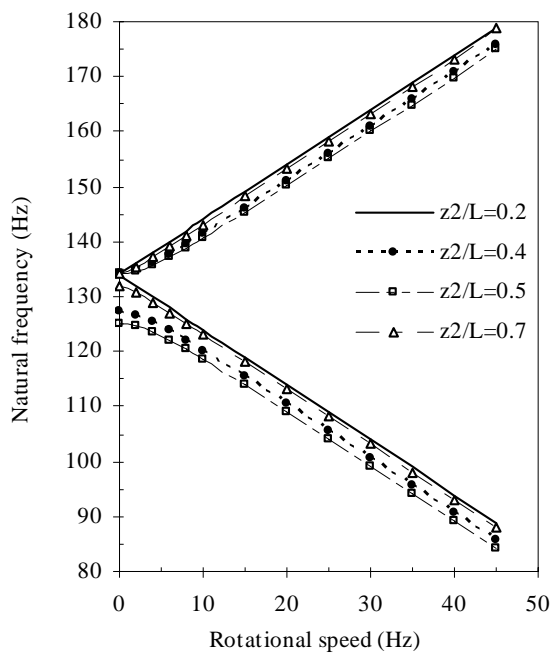
شکلها



شکل ۱ - روتور دوار ترک دار (الف) مقطع شفت ترک دار، (ب) نیروهای اعمالی به شفت

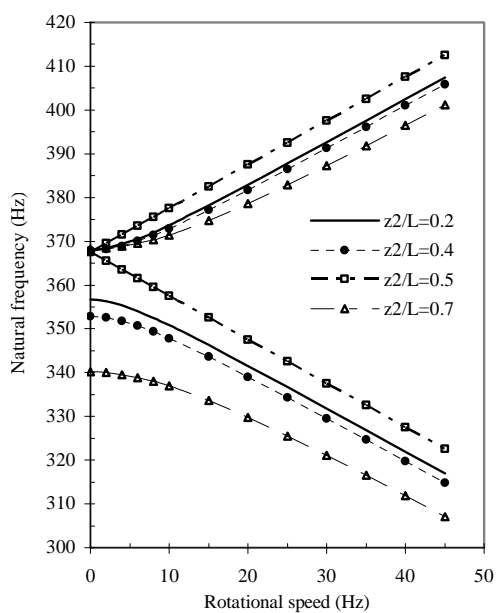


شکل ۲- روتور دارای چند ترک و محورهای مختصات ثابت و دورانی



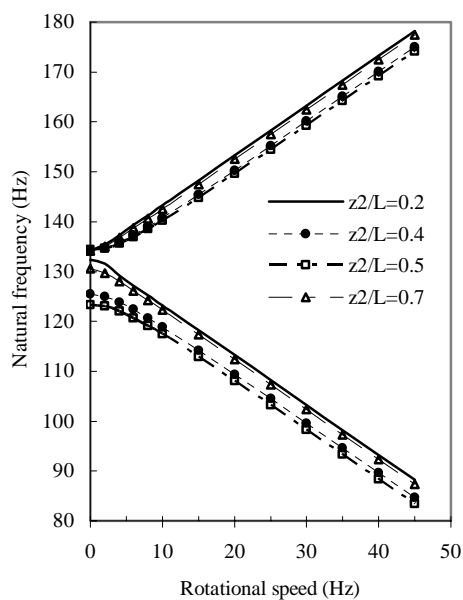
شکل ۳- فرکانس طبیعی مد ۱ و ۲ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول

$$\left(\frac{a}{D} = 0.5, \text{ در ترک دوم}, \frac{a}{D} = 0.1\right)$$



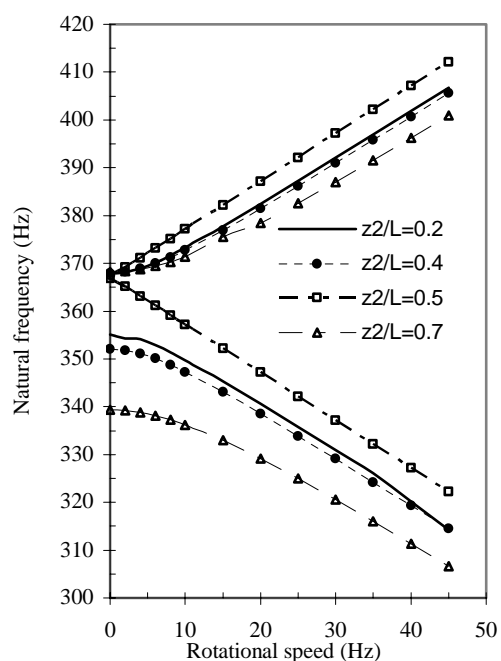
شکل ۴- فرکانس طبیعی مد ۳ و ۴ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول

$$\left(\frac{a}{D} = 0.5 \text{ در ترک دوم}, \frac{a}{D} = 0.1\right)$$



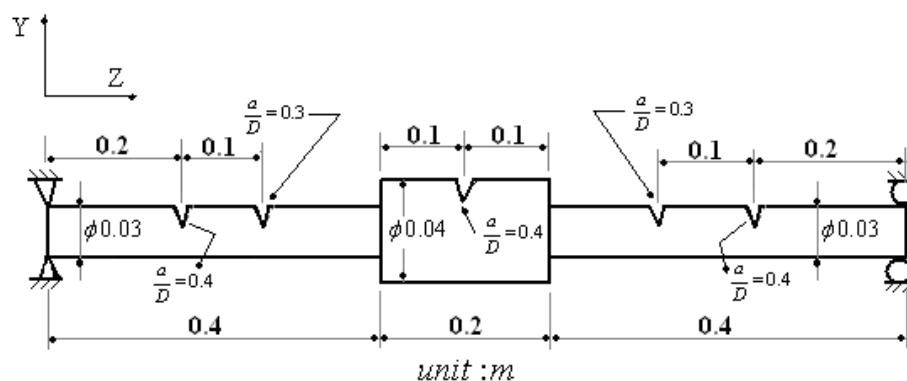
شکل ۵- فرکانس طبیعی مد ۱ و ۲ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول

$$\left(\frac{a}{D} = 0.5 \text{ در ترک دوم}, \frac{a}{D} = 0.3\right)$$

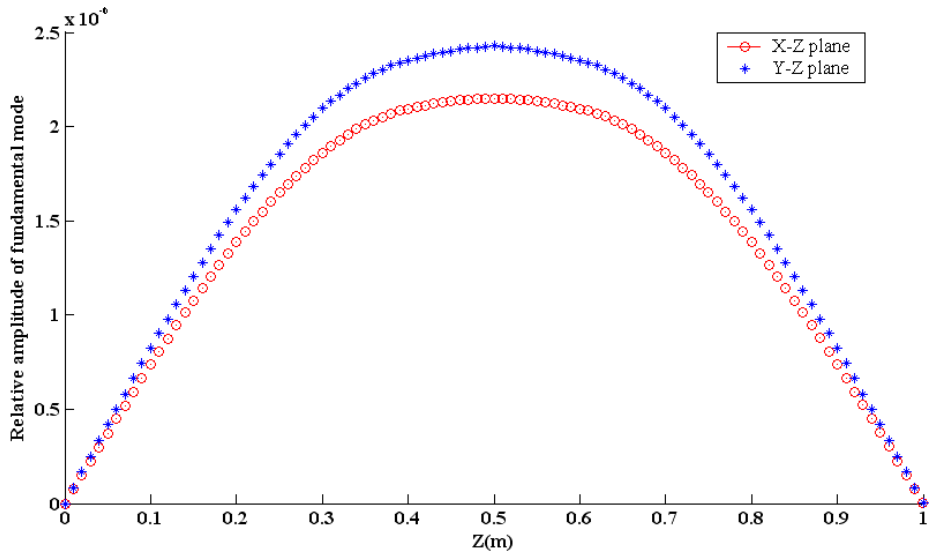


شکل ۶- فرکانس طبیعی مد ۳ و ۴ نسبت به سرعت دورانی به ازای موقعیت های گوناگون ترک دوم (در ترک اول

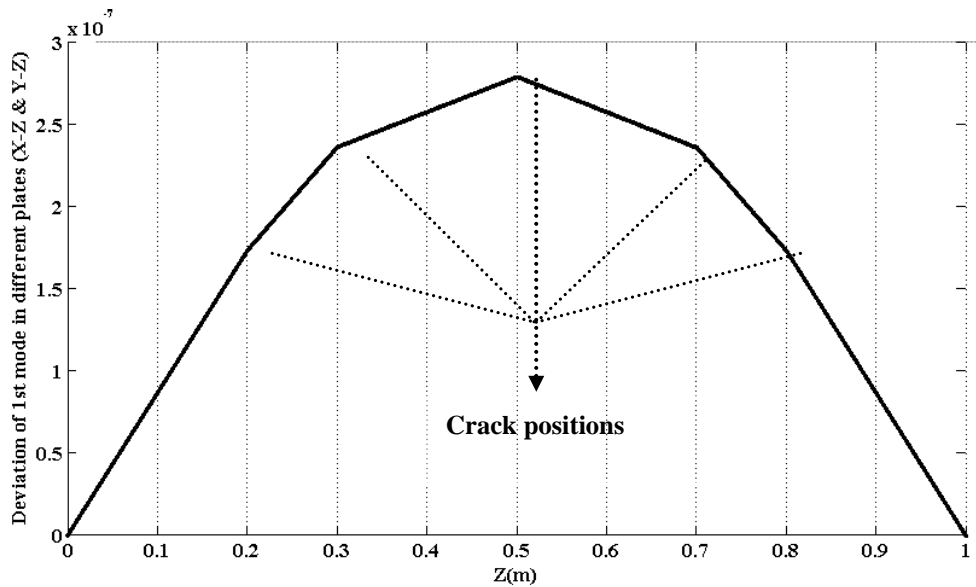
$$\left(\frac{a}{D} = 0.5 \text{ در ترک دوم, } \frac{a}{D} = 0.3\right)$$



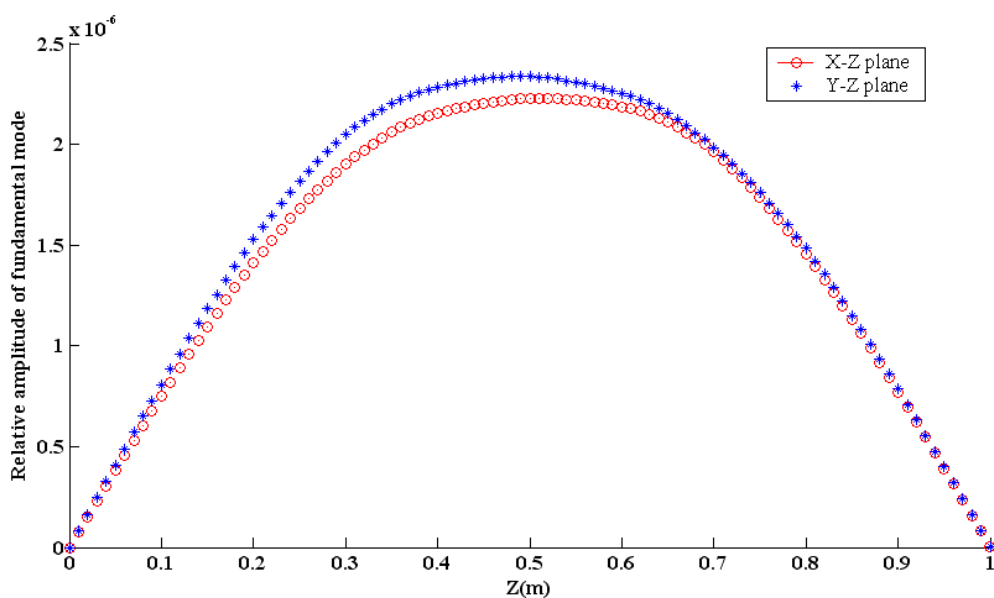
شکل ۷- روتور پله دار و ترک دار ($\Omega = 30$ Hz)



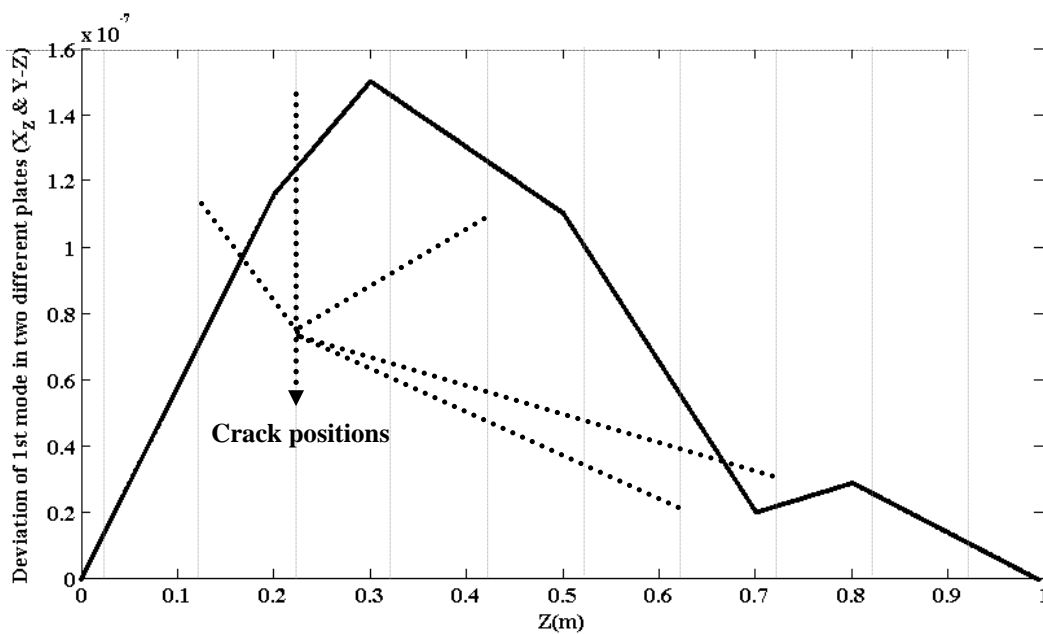
شکل ۸- مد شیپ شفت ترک دار در دو صفحه ی $X-Z$ و $Y-Z$ به ازای حالتی که ترک ها نسبت به هم زاویه ی صفر دارند.



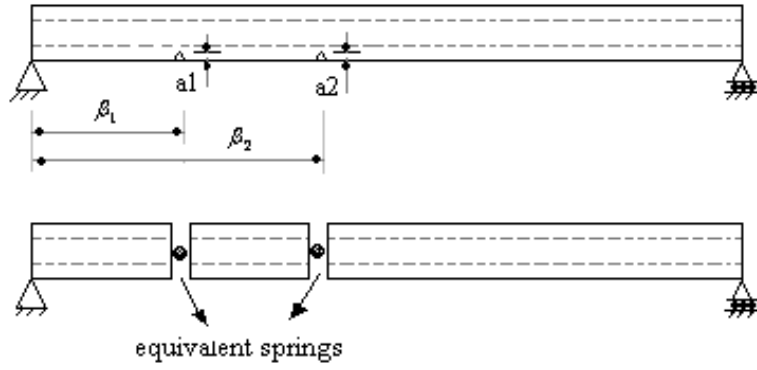
شکل ۹- تفاضل مد شیپ های مربوط به صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ به ازای حالتی که ترک ها نسبت به هم زاویه صفر دارند.



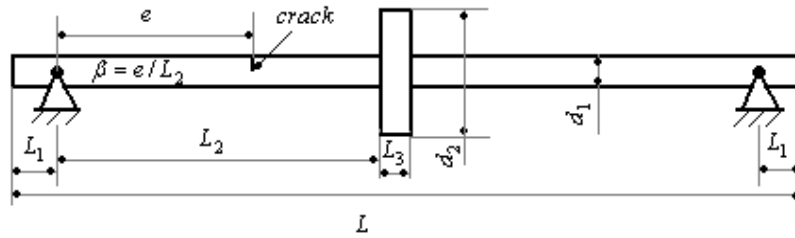
شکل ۱۰- مد شیپ شفت ترک دار در دو صفحه $X-Z$ و $Y-Z$ به ازای حالتی که ترک ها نسبت به هم زاویه ی صفر دارند.



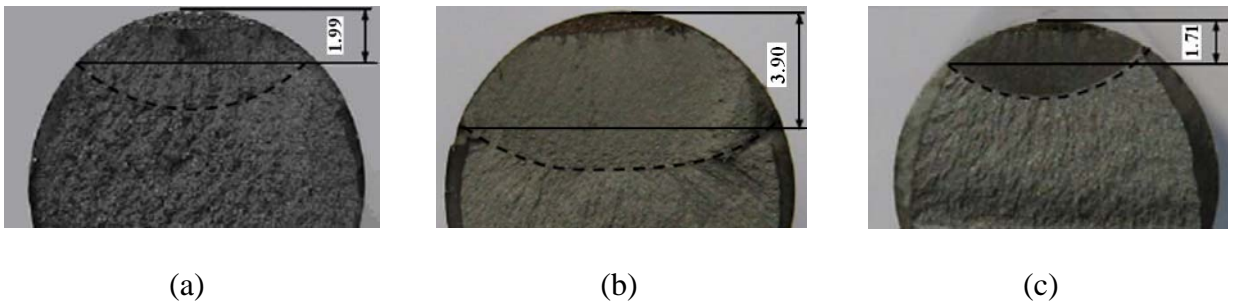
شکل ۱۱- تفاضل مد شیپ های مربوط به صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ به ازای حالتی که ترک ها ، نسبت به یکدیگر تحت زاویه هستند.



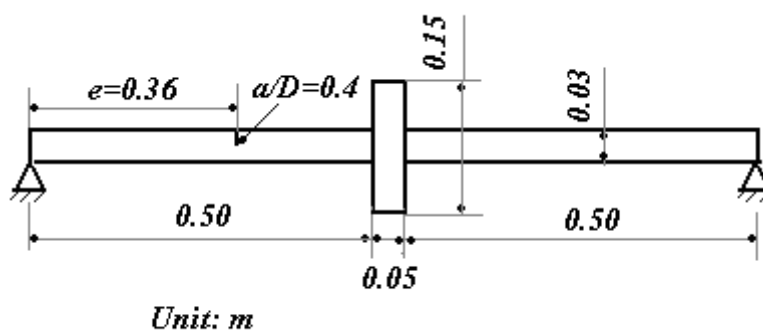
شکل ۱۲- لوله آلومینیومی دارای دو ترک عرضی باز [15]



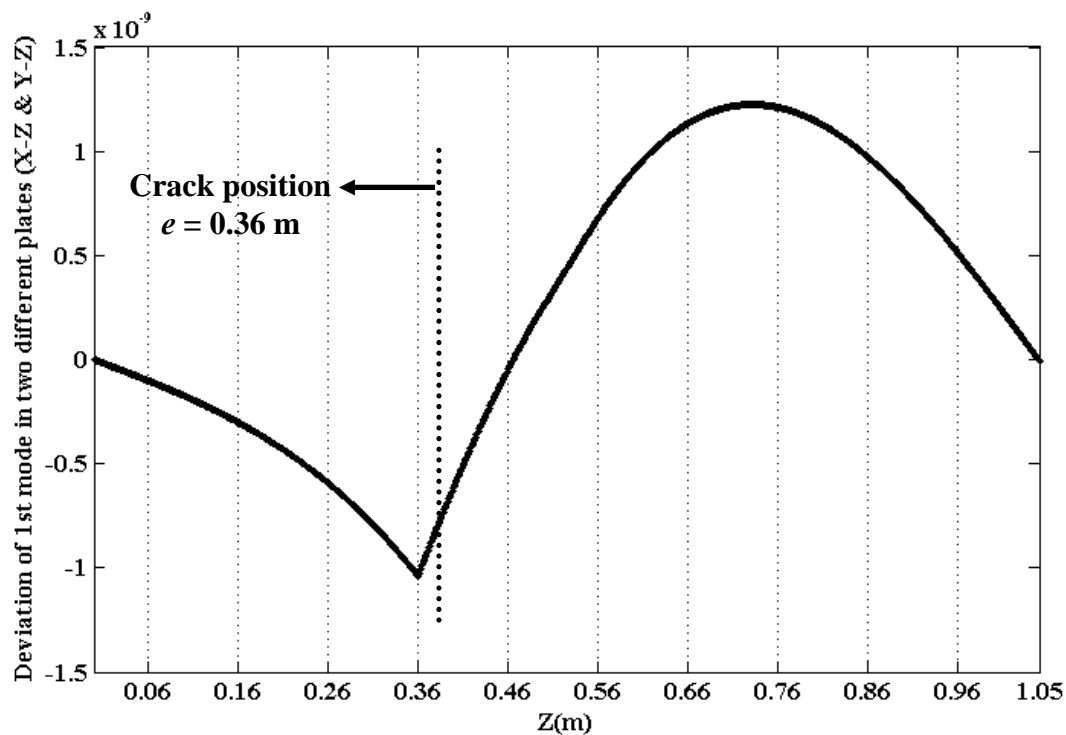
شکل ۱۳- شفت اورهنگ ترک دار [16]



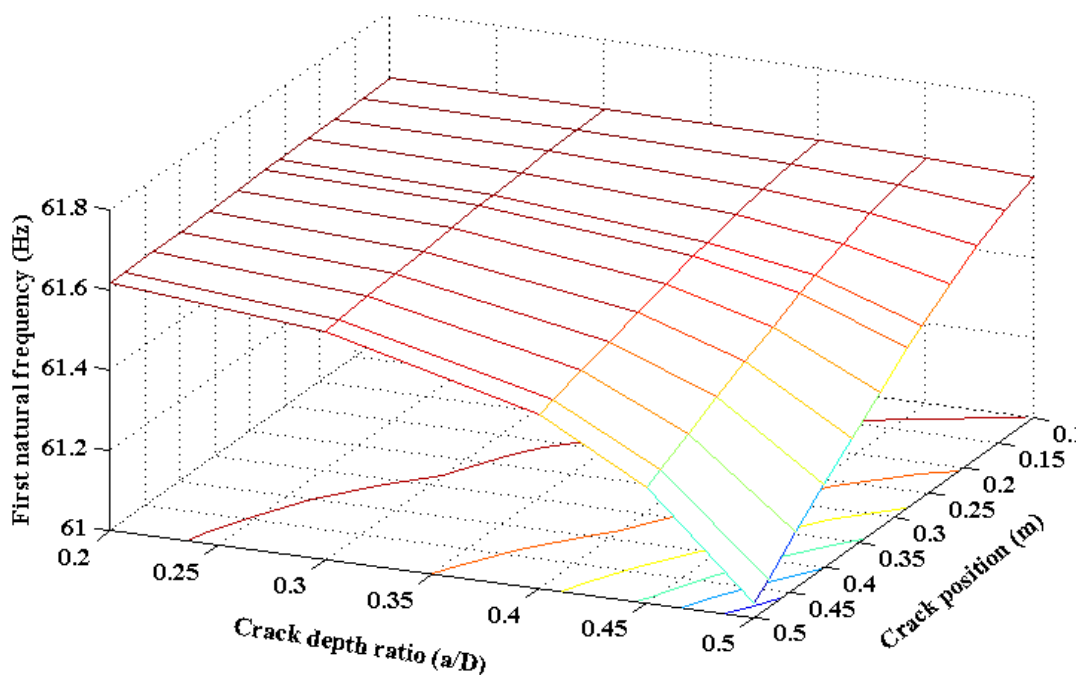
شکل ۱۴- عمق های متفاوت ترک خستگی [16]



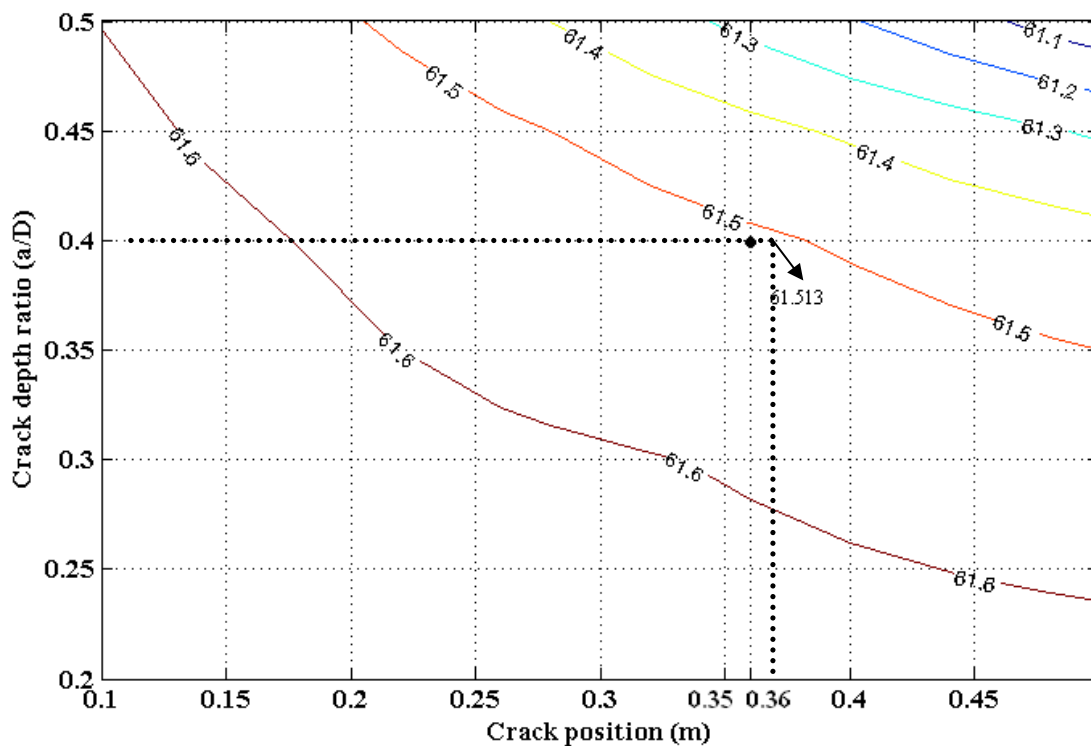
شکل ۱۵- شفت دوار ترک دار (دارای سرعت دورانی ۳۰ هرتز)



شکل ۱۶- تفاضل مد شیپ های مربوط به صفحات X-Z و Y-Z برای شفت دوار نشان داده شده در شکل ۱۵



شکل ۱۷- تغییرات فرکانس بر حسب تغییرات موقعیت و عمق بی بعد ترک



شکل ۱۸- کانتورهای اولین فرکانس طبیعی شفت دوار به ازای موقعیت ها و عمق های مختلف ترک

Abstract

In this article, a non-destructive method for determining frequencies and diagnosis of the position and depth of the crack, in rotating shafts is presented. This frequency analysis applies the Timoshenko beam theory to the rotating cracked shaft, which rotates with a constant speed. The cracks can be in different angles with respect to each other or Y axis. The presence of a crack in rotors, changes the local flexibility and consequently, alters the dynamic behavior of the structure, is causing the reduction of the natural frequencies. The transfer matrix method is developed for various boundary conditions. Using this analysis, the position of the crack is obtained. Also, the acquired results of this method are compared with the experimental data. Adaptation between these results is representative of the accuracy of the transfer matrix method. Finally, by employing the first natural frequency and the crack position, the crack depth will be obtained.