تخمین و آنالیز تابع چگالی احتمال قیمت برق به روش حداکثر نمودن آنتروپی

محمد ابراهیم حاجی آبادی[1]، حبیب رجبی مشهدی[2] و جعفر منصوری[3]
[1]دانشگاه فردوسی مشهد، m.e.hajiabadi@stu-mail.um.ac.ir
[2] دانشگاه فردوسی مشهد ، rajabi_mashhadi@yahoo.com
[3] دانشگاه فردوسی مشهد ، jaafar_mansoory@yahoo.com

چکیده -مدلسازی رفتار متغیر تصادفی قیمت برق یکی از چالش‌های اساسی پیش روی مهندسین برق در صنعت تجدید ساختار یافته برق می‌باشد. از طرفی قیمت برق بازخوردی مهم از عملکرد بازار می‌باشد. سری زمانی قیمت برق حاوی اطلاعات مهمی از عملکرد بازار برق می‌باشد. در این مقاله با توجه به مفهوم اطلاعات، از روش حداکثر آنتروپی جهت تخمین تابع چگالی احتمال قیمت برق استفاده شده است و نیز تغییرات تابع چگالی احتمال قیمت برق و مشخصات آماری آن با تغییر بار بررسی شده است. روش لاگرانژ و الگوریتم ژنتیک، جهت بدست آوردن جواب‌های مسئله بهینه سازی استفاده شده اند.

کلید واژه-. آنتروپی، آنتروپی نسبی، اگوریتم ژنتیک، روش لاگرانژ، قیمت برق.

۱- مقدمه

قیمت برق باز خورد مهمی از عملکرد بازار در صنعت برق تجدید ساختار شده می‌باشد. از طرفی پیشبینی قیمت برق تاثیر بسزایی در پیشنهاد قیمت تولید کنندگان (GENCO ها) آن دارد و نیز هرچه پیشنهاد قیمت GENCOها نزدیکتر بـه MCP بازار باشد، منجر به درآمد بیشتر آنها می‌گردد. بـه همین دلیل مدلسازی رفتار قیمت برق و توانایی پیشبینی آن از دغدغه‌های مهم مهندسین صنعت برق بوده و مطالعه قیمت برق و پیشبینی‌های بلند مدت و کوتاه مدت آن از اهمیت بسزایی برخوردار شده است.

روش‌های مدلسازی قیمت برق را میتوان به چهار دسته کلی تقسیم نمود[۱]:

۱) مدلسازی تئوری بازی: در این روش مدلسازی رفتار و استراتژی بازیگران از اهمیت بسزایی برخوردار است. نقطه کلیدی در این روش محاسبه نقطه تعادل بازی می‌باشد.

۲) مدلسازی سری زمانی: روش‌های سری زمانی همان روش‌های جعبه سیاه می‌باشند و به فرآیندهای رخداده در لایه زیرین کاری ندارند و تنها از دیدگاه آماری قیمت را مورد بررسی قرار می‌دهند.

۳) مدلسازی هزینه تولید: در واقع این دسته از روش‌ها را مدلسازی ساختاری گویند و توسعه‌ای از روش‌های سنتی جهت تعیین قیمت برق می‌باشند.

۴) روشهای فازی.

با توجه به اینکه قیمت بازخورد مهمی از وضعیت بازار می‌باشد، بنابراین سری زمانی قیمت برق نیز حاوی اطلاعات مهمی از عملکرد بازار برق می‌باشد. در این مقاله با نگاهی احتمالاتی به بازار برق بدنبال تخمین تابع چگالی احتمال مناسب جهت سری زمانی قیمت برق در ساعات مختلف (که بیانگر سطوح مختلف بار است) می‌باشیم. تخصیص دادن یک تابع احتمال به یک سری از داده‌ها سازگار با اطلاعات موجود، یک مساله مستقیم نامیده می‌شود. یک روش کارا جهت حل این مساله، ماکزیمم کردن آنتروپی شانون نسبت به قیدهای داده شده می‌باشد که در این مقاله از این روش استفاده شده است.

در این مقاله با کمک تعریف آنتروپی نسبی، مقایسه‌ای بین توابع توزیع احتمال بدست آمده با توزیع نرمال نیز انجام شده است و مشاهده می‌شود که با افزایش بار، توزیع قیمت برق

نزدیکتر به توزیع نرمال می‌گردد.

در ادامه در بخش دوم مفاهیم اطلاعات و آنتروپی آورده شده است و بخش سوم به محاسبه و تخمین تابع توزیع احتمال با استفاده از روش حداکثر نمودن آنتروپی اختصاص داده شده است. مفهوم آنتروپی نسبی و روابط آن در بخش چهارم آورده شده است. در بخش پنجم از داده‌های قیمت برق بازار New England جهت تخمین تابع توزیع احتمال استفاده شده است و نتایج تحلیل و بررسی بر روی این داده‌ها نیز در بخش پنجم گنجانده شده است. در انتها، بخش ششم شامل نتیجه گیری می‌باشد.

۲- اطلاعات و آنتروپی

برای تعریف آنتروپی ابتدا لازم است که اطلاعات را تعریف کنیم. فرمول تعریف شده برای اطلاعات یک متغیر تصادفی، باید چهار خاصیت را دارا باشد:

$$\begin{array}{|llll|} if & 0 \le p_i \le 1 & \Rightarrow & I_i \ge 0 \\ if & p_i \to 1 & \Rightarrow & I_i \to 0 \\ if & p_i < p_j & \Rightarrow & I_i > I_j \\ if & p_{ij} = p_i p_j & \Rightarrow & I_i + I \end{array} \qquad (۱)$$

که در آن p_i احتمال رخداد برآمد و I_i اطلاعات حاصل از برآمد می‌باشد. طبق فرمول (۱) هر چه احتمال رخداد یک برآمد(p_i) کمتر باشد، حاوی اطلاعات(I_i) مهمتری می‌باشد و خاصیت آخری به این معنی است که اگر ۲ پیشامد مستقل بودند، اطلاعات با هم جمع می‌شوند. تنها تابعی که این ۴ خاصیت را ارضا میکند، تابع لگاریتمی است:

$$I_i = \log_b \frac{1}{p_i} \qquad (۲)$$

اگر $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ یک منبع گسسته و بدون حافظه با احتمال $(p_1,p_2,..,p_n)$ باشد، آنتروپی شانون منبع به معنی امید اطلاعات($E(I)$) می‌باشد و به صورت (۳) تعریف می‌شود:

$$H(X) = E(I) = \sum_{i=1}^{n} p_i I_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \qquad (۳)$$

آنتروپی یک متغیر تصادفی($H(X)$) میزانی از ابهام درباره آن متغیر تصادفی می‌باشد. به عبارت دیگر آنتروپی معیاری برای مقدار اطلاعات لازم به طور متوسط برای توصیف یک متغیر تصادفی است[۲و۳].

۳- تخمین تابع چگالی احتمال با استفاده از روش حداکثر نمودن آنتروپی

مسئله ماکزیمم نمودن آنتروپی شانون با قیدهای طبیعی و گشتاوری، یک مسئله بهینه سازی محدب است:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max \quad -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i & \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 & p_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{n} g_{ri} p_i = a_r & r = 1,2,\ldots.,m \end{array}} \qquad (۴)$$

در رابطه (۴) m بیانگر تعداد قیود گشتاوری و g_{ri} و a_r ثابت های معلوم می‌باشند.

روش لاگرانژ راه حلی مناسب جهت حل این مسئله بهینه سازی محدب می‌باشد و داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} L = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i + \lambda_0 (\sum_{i=1}^{n} p_i - 1) \\ + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r (\sum_{i=1}^{n} g_{ri} p_i - a_r) \end{array}} \qquad (۵)$$

که $\lambda_0, \lambda_1, \ldots.., \lambda_m$ ضرائب لاگرانژ هستند. با مشتقگیری از L (تابع لاگرانژ) نسبت به p_i ها داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \quad \Rightarrow \\ p_i = \exp(-1 + \lambda_0 + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r g_{ri}) \qquad i = 1,2,\ldots,n \end{array}} \qquad (۶)$$

با جانشینی p_i بدست آمده در (۶) با قیود گشتاوری و قید طبیعی داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \exp(-1 + \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_{ji}) = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} g_{ri} \exp(-1 + \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_{ji}) = a_r \qquad r = 1,2,\ldots,m \end{array}} \qquad (۷)$$

مسئله بهینه سازی تبدیل به یک m+1 معادله با m+1 مجهول شد که مجهولات مسئله همان ضرائب لاگرنژ می‌باشند. جهت حل این دستگاه معادلات غیر خطی از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌نماییم. بدین منظور تابع خطا را مطابق با (۸) تعریف می‌نماییم:

$$\boxed{\begin{array}{l} e(r) = a_r - \sum_{i=1}^{n} g_{ri} \exp(-1 + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j g_{ji}) \qquad r = 0,1,..,m \\ a_0 = 1 \,\&\, g_{0i} = 1 \qquad i = 1,2,\ldots.,n \end{array}} \qquad (۸)$$

با حداقل نمودن مجموع مربعات خطا توسط الگوریتم ژنتیک ضرائب لاگرانژ را محاسبه می‌نماییم.

در حالت توزیع احتمال پیوسته، در عمل، تقریب گسسته انتگرال برای حل مساله استفاده می‌شود. بهینه سازی آنتروپی در حوزه پیوسته نیز با مساله بهینه سازی در حوزه گسسته تقریب زده می‌شود. به طور مشابه با حالت گسسته تابع توزیع احتمال حاصل از حداکثر نمودن آنتروپی را داریم:

$$f(x) = \exp(-1 + \lambda_0 + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)) \qquad (۹)$$

۴- آنتروپی نسبی

آنتروپی نسبی معیاری از فاصله بین دو توزیع احتمالاتی می‌باشد. آنتروپی نسبی D(p||q) میزانی از درست بودن این فرض است که توزیع را q فرض کنیم در حالیکه توزیع واقعی p می‌باشد. بنا به تعریف، در حالت گسسته، آنتروپی نسبی بین دو تابع جرم احتمال p(x) و q(x) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(p \| q) = \sum_{x \in \chi} p(x) \ \log \frac{p(x)}{q(x)} = E_P \ \log \frac{p(x)}{q(x)} \qquad (۱۰)$$

در حالت پیوسته، آنتروپی نسبی بین دو تابع چگالی احتمال p(x) و q(x) به صورت (۱۱) تعریف میشود. همانطور که در (۱۱) مشاهده می‌شود، چنانچه p(x)=g(x) باشد آنگاه مقدار درون لگاریتم واحد شده و در نتیجه میزان آنتروپی نسبی آنها صفر است.

$$D(p \| q) = \int p(x) \ \log \frac{p(x)}{q(x)} \ dx = E_P \ \log \frac{p(x)}{q(x)} \qquad (۱۱)$$

بعنوان مثال با بدست آوردن آنتروپی نسبی بین یک توزیع احتمال با توزیع نرمال، میتوان میزان تفاوت آن توزیع را با توزیع نرمال داشته باشیم[۴،۵].

۵- مورد مطالعاتی

در این مقاله از داده‌های قیمت برق بازار New England استفاده شده است که قیمت ساعتی انرژی برق بر حسب $/MWh در دو ماه نخست سال ۲۰۰۳ میلادی در New England می‌باشند. از ۴ گشتاور اول بعنوان قیود استفاده شده است. در مرجع [۲] بیان شده است برای گشتاورهای مرتبه ۵ و به بالا تغییر چندانی در تابع توزیع ایجاد نمی‌شود. از جعبه ابزار MATLAB ga جهت استفاده از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. شبیه‌سازی برای ۶ ساعت با فواصل یکسان انجام شده است (۳،۷،۱۱،۱۵،۱۹،۲۳). در محاسبه قیدها احتمال سرریز شدن در کامپیوتر وجود دارد. برای حل این موضوع، دامنه x ابتدا به بازه [0,1] تبدیل می‌شود. در نتیجه متغیر $x' = (x - x_{\min})/(x_{\max} - x_{\min})$ به جای x مورد استفاده قرار می‌گیرد و مساله در بازه [0,1] مورد بررسی قرار می‌گیرد.

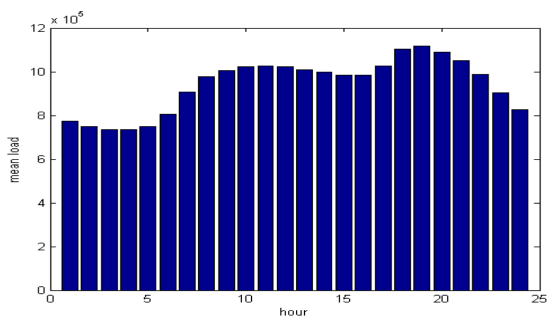
۵-۱- بررسی آماری سری های زمانی قیمت برق در ساعتهای مختلف

جدول (۱) شامل یکسری مشخصات آماری سری‌های زمانی قیمت برق نرمالیزه شده در ساعت‌های مختلف می‌باشد. همانطور که در جدول (۱) مشخص شده است، در ساعت‌هایی که با افزایش قیمت برق مواجه هستیم، واریانس قیمت برق نیز افزایش می‌یابد و بعلاوه اندازه چولگی قیمت برق کاهش می‌یابد.

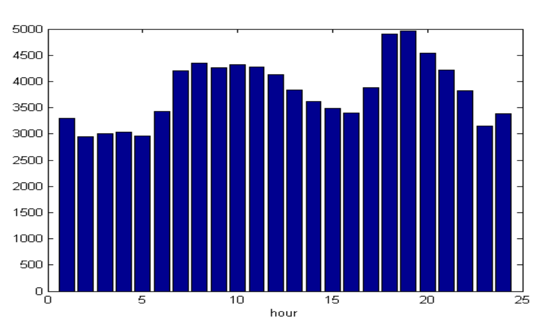
جدول ۱: مشخصات آماری قیمت برق در ساعتهای مختلف

ساعت	میانگین	واریانس	چولگی
3	0.3341	0.0115	-0.9263
7	0.4431	0.0226	-0.6211
11	0.4528	0.0167	-0.8349
15	0.3777	0.0109	-1.3683
19	0.5254	0.0204	-0.9309
23	0.3462	0.0112	-1.1734

شکل (۱-الف) میانگین بار در ساعت‌های شبانه روز و شکل (۱-ب) میانگین قیمت را نمایش می‌دهد.



۱-الف



۱-ب

شکل ۱: الف) میانگین ساعتی بار. ب) میانگین ساعتی قیمت برق

این شکل تناظر خوبی بین قیمت برق و سطح بار در ساعت‌های مختلف را نمایش می‌دهد. این شکل این فرضِ بدیهی علم اقتصاد را که هر چه تقاضا بیشتر باشد، قیمت هم افزایش می‌یابد را بخوبی نمایش می‌دهد.

بنابراین با افزایش بار، انتظار می‌رود که قیمت برق نیز افزایش یابد، اما نکته بسیار مهمی که از این تحلیل آماری میتوان نتیجه گرفت این است که در مدلسازی قیمت برق، متغیر تصادفی قیمت برق در ساعات پر باری باید دارای تابع توزیع احتمالی با واریانس بزرگتر نسبت به ساعات کم باری باشد.

علاوه بر این، همه توزیع‌ها دارای چولگی منفی می‌باشند یعنی مد ≤ میانه ≤ میانگین می‌باشد یا به عبارت دیگر داده‌ها بیشتر سمت چپ میانگین هستند[۶]. از آنجا که اندازه چولگی برای ساعت‌های کم باری در مقایسه با ساعت‌های پرباری بیشتر می‌باشد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در مدلسازی قیمت برق متغیر تصادفی قیمت برق باید نموداری شبیه‌تر به توزیع نرمال داشته باشد.

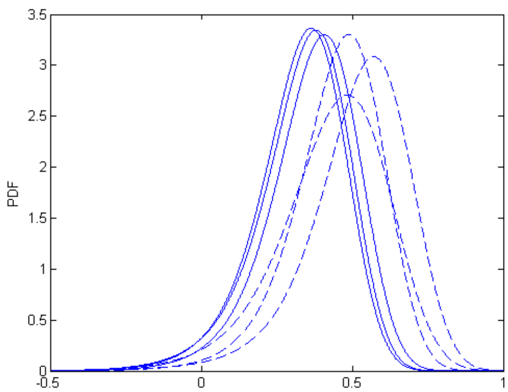
۵-۲- تخمین تابع چگالی احتمال سری زمانی قیمت برق به کمک روش حداکثر آنتروپی

مطابق با فرمولاسیون بخش (۳)، تابع چگالی احتمال جهت سری زمانی قیمت برق در هر ساعت تخمین زده می‌شود. جدول(۲) فرم بسته توابع چگالی احتمال تخمین زده شده جهت ساعتهای ۳و۷و۱۱و۱۵و۱۹ و ۲۳ را شامل می‌شود.

جدول ۲: تابع چگالی احتمال قیمت برق در ساعتهای مختلف شبانه روز

ساعت	تابع
۳	$8\times e^{\left(-3.2+9.5\times x-1.656\times x^2-11.95\times x^3-18.7\times x^4\right)}$
۷	$8\times e^{\left(-3.64+7.66\times x-0.834\times x^2-4.33\times x^3-8.47\times x^4\right)}$
۱۱	$8\times e^{\left(-3.335+9.33\times x-1.11\times x^2-3.386\times x^3-17.17\times x^4\right)}$
۱۵	$8\times e^{\left(-3.57+9.58\times x-1.68\times x^2-6.0331\times x^3-19.3\times x^4\right)}$
۱۹	$8\times e^{\left(-4.55+7.3\times x+3.06\times x^2-0.43\times x^3-14\times x^4\right)}$
۲۳	$8\times e^{\left(-3.2073+8.72\times x-0.75\times x^2-6.73\times x^3-24\times x^4\right)}$

شکل (۲) توابع چگالی احتمال تخمین زده شده را نمایش میدهد. در این شکل، منحنی‌های خط چین دار مربوط به چگالی احتمال‌های قیمت برق در ساعت‌های پر باری (۱۹، ۷،۱۱) می‌باشد. همانطور که انتظار داریم، در این منحنی‌ها واریانس قیمت بیشتر از منحنی‌های چگالی احتمال قیمت برق در ساعت‌های کم باری (۳،۱۵،۲۳) است.



شکل ۲: منحنی‌های تابع چگالی احتمال قیمت برق در ساعت‌های ۳،۷،۱۱،۱۵،۱۹ و۲۳

۵-۳- آنتروپی نسبی بین چگالی احتمال‌های تخمین‌زده شده با توزیع نرمال.

همانطور که از تحلیل‌های آماری نتیجه گرفت، انتظار می‌رود که در ساعت‌های پر باری نسبت به ساعت‌های کم باری، تابع چگالی احتمال تخمین زده جهت متغیر تصادفی قیمت برق، نموداری شبیه تر به تابع توزیع نرمال داشته باشد.

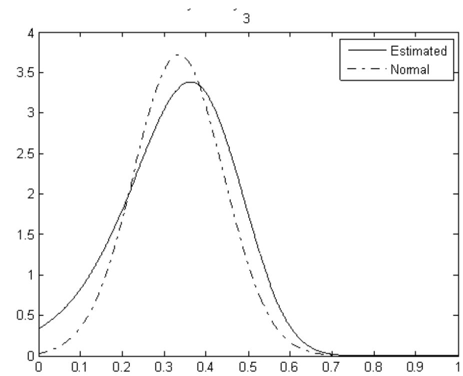
جهت بررسی این موضوع (همانطور که در بخش ۴ اشاره شد) آنتروپی نسبی بین توابع چگالی احتمال تخمین زده شده و توزیع نرمال را محاسبه می‌نماییم. مقادیر آنتروپی نسبی در جدول (۳) آورده شده است.

جدول ۳: آنتروپی نسبی

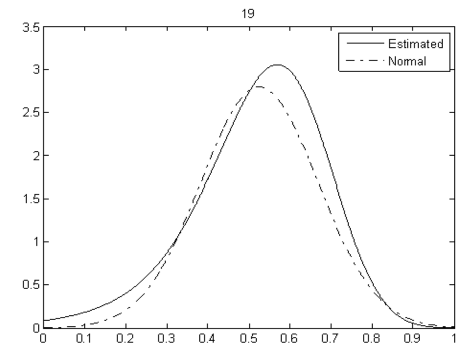
ساعت	چولگی	آنتروپی نسبی
23	-1.1734	0.2258
3	-0.9263	0.2021
15	-1.3683	0.2589
7	-0.6211	0.1708
11	-0.8349	0.1817
19	-0.9309	0.1896

همانطور که در جدول (۳) مشخص شده است، در ساعت‌های پر باری چولگی و آنتروپی نسبی کاهش می‌یابد.

در شکل (۳) نمودار چگالی احتمال تخمین زده شده به همراه نمودار توزیع نرمال (با میانگین و واریانس مشابه تابع چگالی احتمال) در دو ساعت ۱۹(اوج بار) و ۳(حداقل بار) رسم شده است.



۳- الف



۳-ب

شکل ۳: مقایسه توابع چگالی احتمال با توزیع نرمال

۶- نتیجه‌گیری

مدلسازی رفتار متغیر تصادفی قیمت برق یکی از چالش‌های اساسی پیشروی مهندسین برق در صنعت تجدید ساختار یافته برق می‌باشد. از طرفی قیمت برق بازخوردی مهم از عملکرد بازار می‌باشد. به همین دلیل مدلسازی و آنالیز این متغیر تصادفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله نشان دادیم روش حداکثر نمودن آنتروپی، روشی کارا جهت تخمین تابع چگالی احتمال قیمت برق می‌باشد، بعلاوه نشان داده شد که تابع چگالی احتمال قیمت برق، با افزایش بار به سمت توزیع نرمال حرکت می‌نماید و واریانس قیمت نیز افزایش می‌یابد (در بازار New England) که خود نتیجه‌ای بسیار مهم در بررسی احتمالاتی قیمت برق می‌باشد.

مراجع

[1] A. Mateo Gonzalez 1 and A. Munoz San Roque 2 and J. Garcia-Gonzalez, “Modeling and forecasting electricity prices with input/output hidden markov models” *IEEE Trans. Power systems*, Vol. 20, No. 1, pp. 13-23, 2005..

[2] M. Srikanth 1and H. K. Kesavan 2 and P. Roe, "Probability density function estimation using the MinMax measure," *IEEE Trnas. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 30, no. 1, pp.77_83, Feb. 2000A.

[3] A. Papoulis 1 and S. Unnikrishna pillai 2, *Probability, Random Variables and stochastic Processes*. McGraw-Hill, pp. 629-694, 2002.

[4] T. .M. Cover 1 and J. A. Thomas 2 *Elements of Information Theory*, New York, John Wiley & Sons, 1991.

[5] E. Learned_Miller 1 and J. DeStefano 2, "A probabilistic upper bound on differential entropy," *IEEE Trnas. Information Theory*, vol. 54, no. 11, pp. 5223_5230, Nov. 2008.

[۶] پرویز نصیری "آمار و احتمالات مهندسی" انتشارات دانشگاه پیام نور، اردیبهشت ۸۵