فصلنامه اقتصاد مقداری، دوره 5، شماره 3، پاییز 1387، صفحات 105- 79

بررسی ریاضیات در آموزش اقتصاد

(مطالعه موردی دانشکده‌های اقتصاد در ایران)

باقر درویشی، محمدنبی شهیکی تاش و دکتر حسین محمدی*

تاریخ وصول: 1386/12/21 تاریخ پذیرش: 1387/8/13

چکیده:

در این مقاله به بررسی وسعت حوزه‌ی ریاضیات در اقتصاد و کاربرد هر یک از مباحث ریاضی در تئوری‌های اقتصادی پرداخته شده است. همچنین، در راستای ارزیابی میزان تسلط دانشجویان دوره‌های تحصیلات تکمیلی دانشگاه‌های ایران با مهمترین مباحث ریاضی که در علم اقتصاد استفاده شده، پرسشنامه‌ای تدوین گردیده است که در آن میزان آشنایی دانشجویان با مباحث مختلف در ریاضیات سنجیده شده است. یافته‌های این تحقیق بیانگر آن است که دانشجویان تحصیلات تکمیلی ایران[1] بر ریاضیاتی مسلط هستند که مربوط به دوره‌ی قبل از 1960 است و این دانش ریاضی علیرغم اهمیت آن، امروزه نقش بسیار ضعیفی در فهم کتب و مقالات اقتصادی دارد. در مجموع، یافته‌های تحقیق بیانگر آن است که با وجود آنکه ریاضیات دوره‌ی چهارم (از سال‌های 1990 به بعد) نقش بسزایی در تبیین و توسعه تئوری‌های جدید اقتصادی داشته است، ولی دانشجویان تحصیلات تکمیلی رشته اقتصاد در کشور، آشنایی چندانی با این مباحث ندارند و به ضرورت آن نیز پی نبرده‌اند.[2]

طبقه بندی JEL : C_{02}

واژه‌های کلیدی: *اقتصاد ریاضی، دانشجویان تحصیلات تکمیلی، آموزش ریاضیات در اقتصاد*

---

* به ترتیب عضو هیات علمی گروه اقتصاد دانشگاه ایلام، عضو هیات علمی دانشکده اقتصاد دانشگاه سیستان و بلوچستان و استادیار دانشگاه فردوسی مشهد. (darvishi_b@yahoo.com)

[1] بررسی موردی در دانشگاه‌های تهران، علامه طباطبایی، شهید بهشتی، صنعتی شریف و الزهرا.

[2] مؤلفان مقاله بر خود لازم می‌دانند از جناب آقای دکتر پورکاظمی به خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان برای بهبود این مقاله و همچنین به خاطر سال‌های طولانی که صرف آموزش اقتصاد ریاضی در کشور نموده‌اند، تشکر نمایند.

1- مقدمه

اقتصاد ریاضی در واقع ابزار ریاضی برای تحلیل مطالب و بیان تئوری‌های اقتصاد است. ریاضیات به عنوان منطق تفکر و اقتصاد به عنوان منطق علمی انتخاب هستند. ترکیب این دو یعنی اقتصاد ریاضی، تأثیر بسزایی در الگوسازی-های مرتبط با انتخاب بهینه در اقتصاد داشته است.

در نگرش مکتب نئوکلاسیک، استفاده از ریاضیات به عنوان ابزار تحلیل اقتصاد مطرح شد و تحت تأثیر طرفداران اثبات گرایی قرار گرفت که معتقد بودند هر معرفتی که بخواهد علم محسوب شود، باید بتواند گزاره‌ی خود را به صورت تجربی آزمون کند یا به شکل ریاضی درآورد (چیانگ،[3] 1371).

ریاضیات در تمامی شاخه‌های علم اقتصاد نقش مهمی را ایفا می‌کند و امروزه کمتر اقتصاددانی وجود دارد که بتواند خود را از کاربرد ریاضیات در تشریح مباحث و مسائل اقتصادی و به خصوص موضوعات نظری اقتصاد بی نیاز بداند.

در حال حاضر، ریاضیات به عنوان ابزاری برای تحلیل مسائل و پدیده‌های اقتصادی شناخته می‌شود و از آن‌جا که اقتصاد ریاضی صرفاً یک روش تحلیل اقتصادی است، اصول آن با روش‌های غیر ریاضی تحلیل اقتصادی تفاوتی ندارد.

همیشه هدف از هر گونه تحلیل نظری، صرف نظر از روش کار، به دست آوردن مجموعه‌ای از نتایج و قضایایی است که با استفاده از استدلال منطقی از مجموعه‌ای از فرض‌ها، حاصل می‌شود.

تفاوت عمده‌ی اقتصاد ریاضی با اقتصاد تشریحی این است که در اقتصاد ریاضی فرضیه‌ها و نتایج به وسیله‌ی نمادهای ریاضی (به جای کلمات) و معادلات (به جای جملات) بیان می‌شوند. به علاوه، به جای منطق تشریحی، از قضایای ریاضی در استدلال استفاده می‌شود. می‌توان ادعا نمود که کاربرد نمادهای ریاضی، استدلال قیاسی را راحت‌تر می‌کند و با کمک آن می‌توان فرضیه‌ها را روشن‌تر و دقیق‌تر بیان نمود. به طور خلاصه روش ریاضی دارای مزایای زیر است:

1- «زبان» به کار برده شده دقیق‌تر و صریح‌تر است.
2- قضایا و روابط ریاضی زیادی برای استفاده وجود دارند.

---

[3] Chiang

3- اجبار تحلیل‌گر در بیان صریح تمام فرض‌ها به عنوان شرط لازم برای کاربرد تحلیل ریاضی، از انتخاب ناخودآگاه فرض‌های غیر صریح و غیر ضروری جلوگیری می‌کند.

4- امکان می‌دهد که حالت‌های کلی n متغیره تحلیل شود (پورکاظمی، 1381).

آشنایی با مباحث ریاضیات و حد و مرز آن، برای یک اقتصاددان الزامی است. در این مقاله سعی شده است که با مروری بر تاریخچه‌ی اقتصاد ریاضی و معرفی مهمترین تکنیک‌ها و ابزارهای مورد نیاز برای دانشجویان و اساتید اقتصاد، کاربرد آنها ذکر شود. در پایان نیز به ارزیابی میزان تسلط دانشجویان اقتصاد در مورد این مسایل پرداخته شده است.

2- تاریخچه‌ی به کارگیری ریاضیات در اقتصاد

تلاش کورنو[4] برای کاربرد ریاضیات در اقتصاد، به عنوان حرکت آغازین تلقی می‌شود و بخشی از ادبیات اولیه‌ی اقتصاد ریاضی توسط وی ارائه شد. کورنو به دنبال طراحی الگوی ریاضی بود که به وسیله‌ی آن رفتار یک بنگاه اقتصادی را نشان دهد. پس از کورنو، والراس،[5] پارتو،[6] فون نیومن،[7] مارشال،[8] اجورث،[9] کسل،[10] فیشر،[11] تین برگن،[12] هیکس،[13] آلیس،[14] ساموئلسون،[15] ناش،[16] کوپمنز[17] نقش بسزایی در کاربرد ریاضیات در اقتصاد و تحولات این رشته داشتند (دادگر، 1382، ص 6).

---

[4] Cournat
[5] Walras
[6] Parto
[7] Von- Neuman
[8] Marshall
[9] Edgeworth
[10] Cassel
[11] Fisher
[12] Tinbergen
[13] Hicks
[14] Allais
[15] Samuelson
[16] Nash
[17] Koopmans

می‌توان با مروری بر ادبیات مرتبط با تئوری‌های اقتصادی و ابزار بیان به کار رفته در تبیین آن و همچنین توجه به طبقه‌بندی تاریخی ارو و اینتلیگیتور[18] (2000)، تاریخچه‌ی اقتصاد ریاضی را در سه دوره‌ی عمده بررسی نمود.

دوره اول، سال‌های 1947 - 1838 است که در این دوره اقتصاددانان برای بیان تئوری‌های اقتصادی از حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده می‌کردند. در این دوران، اقتصاددانان برای تبیین رفتار مصرف کننده و رفتار تولیدکننده از توابع مطلوبیت و توابع تولید استفاده کردند و بر مبنای حساب دیفرانسیل و انتگرال و خواص توابع، ویژگی‌هایی را برای بیان رفتار عاملین اقتصادی عنوان نمودند.

در این دوران کورنو، مارشال، اج ورث، والراس، پارتو، گوسن[19] و جی وانس[20] نقش عمده‌ای در تکامل و تکوین مباحث ریاضی در اقتصاد داشتند.

دوره‌ی دوم، سال‌های 1948 تا 1960 را شامل می‌شود. در این دوران نظریه‌ی مجموعه‌ها و مدل‌های خطی در موارد بسیاری توسط اقتصاددانان مورد استفاده قرار گرفت. مطالعات دانتزینگ و درفمن[21] در مورد مسأله‌ی برنامه ریزی خطی و غیر خطی و به کار بردن آن به عنوان یک تکنیک پردازش در اقتصاد، مطالعات لئون تیف[22] برای بیان تعادل عمومی والراسی و معرفی جدول داده - ستاده[23] توسط وی و همچنین به کارگیری مباحث توپولوژی توسط ارو برای اثبات وجود تعادل عمومی و قضایای اول و دوم رفاه (برای بیان نظریه انتخاب اجتماعی[24]) از مهمترین تحولات مباحث اقتصاد ریاضی در این دوران شناخته می‌شود.

دوره‌ی سوم، سال‌های 1961 به بعد را شامل می‌شود. در این دوران کماکان از حساب دیفرانسیل مقدماتی، نظریه‌ی مجموعه‌ها و مدل‌های خطی به صورت گسترده استفاده شد. در این دوران اقتصاددانان سعی نموده‌اند که بعضی فرضیات محدود کننده‌ی مدل‌های نئوکلاسیکی مانند عقلانیت کامل، همگنی افراد و اطلاعات کامل را کنار بگذارند. بنابراین، ریاضیات لازم برای بیان چنین

---

[18] Arrow and Inteligator
[19] Gossen
[20] Jevons
[21] Dantzing and Dorfman
[22] Leontief
[23] Input-Output
[24] Social Choice Theory

تئوری‌هایی، بسیار پیچیده‌تر شد. از مهمترین تکنیک‌ها و ابزارهای ریاضی برای بیان چنین الگوهایی می‌توان به نظریه‌ی آشوب،[25] منطق فازی،[26] شبکه‌های عصبی[27] و بازی‌های دیفرانسیلی[28] (تفاضلی) نام برد و به علاوه شاخه‌های دیگر ریاضی، همچون آمار، احتمال و معادلات دیفرانسیل برای بیان تئوری‌های اقتصادی استفاده شد.

مطالعات دبرو[29] با رویکرد توپولوژی دیفرانسیل برای بیان یکتا بودن تعادل، مطالعات آماری فون-نیومن و مورگنسترن در مورد علم عدم قطعیت و نااطمینانی، مطالعات نوردهاوس[30] به وسیله‌ی کنترل بهینه[31] برای تبیین سیکل‌های تجاری سیاسی[32] و بحث تئوری بازی‌ها[33] برای بیان استراتژی رقبا در قبال یکدیگر، از مهمترین تحولات تکنیکی و ابزاری اقتصاد در این دوران شناخته می‌شود.

با توجه به مباحث فوق، بر اساس طبقه‌بندی تاریخی ارو و اینتلیگتور، تاریخچه‌ی به کارگیری مباحث اقتصاد ریاضی به سه دوره‌ی 1947-1838 (دوره‌ی اول)، 1960-1948 (دوره‌ی دوم) و 1961 به بعد (دوره‌ی سوم) تقسیم می‌شود. در تحقیق حاضر، بر اساس اوج کاربرد مباحث مختلف ریاضی در اقتصاد و نمود گسترده‌ی آنها در مقالات علمی-پژوهشی و کتاب‌های درسی مرتبط با رشته‌ی اقتصاد (خصوصاً کتب و مقالات خارجی چاپ شده در دوره‌ی بعد از سال‌های 1990)، یک تغییر جزئی در تقسیم بندی ذکر شده ایجاد شده است. به این صورت که دو دوره‌ی اول و دوم را بر اساس تقسیم بندی ذکر شده و دوره‌ی سوم به دو دوره‌ی مجزا تقسیم شده است. در حقیقت، دوره‌ی 1990 به بعد به عنوان دوره‌ی چهارم در نظر گرفته شده است. به طور خلاصه، سیر تکوین و تحول مباحث ریاضی در اقتصاد، در این تحقیق به شرح جدول (1) است.

---

[25] Chaos Theory
[26] Fuzzy Logic
[27] Neural Network
[28] Differential games
[29] Debru
[30] Nordhaus
[31] Optimal Control
[32] Political Business Cycle (P.B.C)
[33] Game Theory

جدول1: سیر تکوین و تکامل ریاضیات در اقتصاد

دوره	فاصله‌ی زمانی	مهمترین تکنیک‌های ریاضی به کار رفته در تئوری‌های اقتصادی
اول	1838-1947	حساب دیفرانسیل و انتگرال
دوم	1960-1948	برنامه‌ریزی خطی و غیر خطی، جدول داده - ستاده، نظریه‌ی مجموعه‌ها و توپولوژی
سوم	1990-1961	معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، نظریه‌ی کنترل و برنامه‌ریزی پویا، توپولوژی، تئوری بازی‌ها
چهارم	2007-1990	نظریه‌های آشوب، بازی‌های دیفرانسیلی (تفاضلی)، منطق فازی، شبکه‌های عصبی، محاسبات عددی

3- معرفی مهمترین مباحث اقتصاد ریاضی

در این بخش مهمترین مباحث اقتصاد ریاضی که در تئوری‌های اقتصادی به عنوان ابزار تحلیلی شناخته می‌شود، معرفی می‌گردد.

3-1- حساب دیفرانسیل و انتگرال

حساب دیفرانسیل و انتگرال یا حسابان، بخشی از مباحث ریاضی همچون مشتق، انتگرال و معادلات دیفرانسیل است. مطالعه‌ی این مباحث در حالت‌های کلی‌تر و به شکل بسیار مجردتر، آنالیز ریاضی نامیده می‌شود.

همانند اغلب مباحث دیگر، حسابان در اقتصاد کاربردهای زیادی دارد و در ابتدائی‌ترین متون اقتصادی از آن استفاده شده است. به لحاظ تاریخی، اوج استفاده از حسابان در اقتصاد در کتاب مبانی تحلیل اقتصادی ساموئلسون (1974) است و در شرایط فعلی به عنوان یکی از متعارف‌ترین ابزار ریاضی برای بیان تئوری‌های اقتصادی شناخته می‌شود.

آنالیز ریاضی نیز در برخی از مباحث اقتصادی برای تبیین علمی تئوری‌های اقتصادی استفاده می‌شود. برای مثال، در فضای نامتناهی البعد (مثلاً به عنوان تقریبی از تعداد بسیار زیاد کالاها یا مصرف کننده‌ها) لازم است از مطالب آنالیز ریاضی استفاده شود.

همچنین، در مطالعات کاربردی اقتصاد (به ویژه اقتصادسنجی) از مباحث آنالیز عددی در خصوص روش‌های تکراری، بررسی همگرایی و نرخ همگرایی، ارائه‌ی الگوریتم‌های عددی و بررسی خطاهای ایجاد شده استفاده شده است.

نکته‌ی دیگر آن است که حسابان تصادفی یا فرآیندهای تصادفی در تحلیل مدل‌های اقتصادی، در شرایط فعلی بیشتر استفاده می‌شود. اقتصاددانان از دهه‌ی شصت میلادی به بعد دریافتند که حسابان تصادفی ابزار مناسبی برای مطالعه‌ی پدیده‌هایی مانند تغییرات نرخ سهام، نرخ بهره و نرخ ارز می‌باشد. این مباحث به گونه‌ای است که مطالعه‌ی بخشی از متون اقتصادی بخصوص مباحث اقتصاد مالی بدون آشنایی با حسابان تصادفی غیر ممکن است.

3-2- برنامه‌ریزی خطی و غیر خطی

برنامه ریزی خطی روشی است که برنامه‌ی مطلوب از میان فعالیت‌های مرتبط با هم و با وجود محدودیت منابع در یک دوره‌ی معین تعیین می‌شود. به عبارت دیگر، برنامه‌ریزی خطی یکی از فنون ریاضی برای تعیین حد مطلوب و بهینه سازی[34] (ماکزیمم و مینیمم) یک تابع خطی با توجه به محدودیت‌های مختلف خطی است. این روش پس از جنگ جهانی دوم توسط دانتزینگ و درفمن توسعه یافته است و به عنوان یکی از روش‌های بهینه‌سازی ایستا در اقتصاد شناخته می‌شود (جعفری صمیمی و طهرانچیان، 1384، ص 146).

در بسیاری از مطالعات کاربردی، اقتصاددانان مجبورند مسائل بهینه سازی با متغیرها و محدودیت‌های زیاد را حل نمایند. برای مثال، یک اقتصادان می‌خواهد بررسی نماید که در یک منطقه‌ی کشاورزی، الگوی بهینه‌ی کشت چگونه است. ابزار مناسب برای حل چنین مسأله‌ای، برنامه‌ریزی خطی و یا غیرخطی است. اقتصاد دانان علاوه بر آن‌که در توسعه‌ی این روش‌ها نقش داشته‌اند، آن را به گونه‌ای تعدیل کرده‌اند که ضمن در نظر گرفتن ریسک در این مدل‌ها برای حل مسائل اقتصادی مناسب‌تر شود.

مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیر خطی[35] نیز تعیین مقادیر غیر منفی از متغیر معینی است که به وسیله‌ی آن، تابع هدف غیر خطی مفروضی، نسبت به قیود نامعادله‌ی داده شده (که برخی از آنها غیر خطی هستند) ماکزیمم یا می‌نیمم شود،

---

[34] در ریاضیات مبحث بهینه‌سازی به دو گروه عمده‌ی ایستا و پویا تقسیم می‌شود. بهینه‌سازی ایستا شامل بهینه‌سازی کلاسیک، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی غیرخطی و نظریه‌ی بازی‌ها است. همچنین، بهینه‌سازی پویا حساب تغییرات، اصل ماکزیمم، برنامه‌ریزی پویا و بازی‌های دیفرانسیلی (تفاضلی) را شامل می‌شود (پور کاظمی، 1371، ص 173).

[35] Non-Linear Programming

اما در برنامه‌ریزی خطی، هدف تعیین مقادیر غیر منفی از متغیرهـای معینـی اسـت که تابع خطی مفروضی را نسبت به قیود خطی ماکزیمم یا می‌نیمم می‌نماید.

3-3-داده - ستاده

تحلیل داده- ستاده مرهون مطالعات لئون تیف اقتصاددان امریکـایی روسـی تبار است. لئون تیف کارهای متعددی در زمینه‌ی داده - ستاده انجام داد و سرانجام موفق به دریافت جایزه‌ی نوبل اقتصاد در سال 1973 گردید.

جدول داده - ستاده در نگاه اول حالت گسترده‌ای از حساب‌هـای ملـی اسـت که توانست جایگاه ویژه‌ای در تحلیل‌های اقتصادی پیدا کنـد. موضـوع مهمـی کـه تحلیل داده - ستاده به آن می‌پردازد، تأکید بر روابط بین بخشی است کـه مجموعـه فعالیت‌های اقتصادی را به صورت نظام واحدی در نظر مـی‌گیـرد، بـه گونـه‌ای کـه نوعی از تعادل عمومی اقتصاد را در بطن خود همراه دارد (سوری، 1384، ص 10).

تحلیل داده - ستاده در حال حاضر در زمینه‌های نظری و کاربردی، توسعه‌ی قابل توجهی یافته است و بسیاری از مباحث اقتصادی را در بر می‌گیرد. از جنبـه‌ی نظری می‌توان جدول داده - ستاده را به مباحث تعادل عمومی والراس ربـط داد کـه در واقع بیان دیگری از نظریه‌ی تعادل عمومی است که قابلیت کاربرد نیز دارد.

3-4- توپولوژی

در اواسط قرن نوزدهم، مبحث جدیدی در عرصه‌ی هندسه مطـرح شـد، کـه پس از مدت کوتاهی به یکی از ابزارهای مهم در ریاضیات نوین تبدیل گردید. ایـن موضوع، تحلیـل مکـان یـا توپولـوژی نـام گرفـت و هـدف آن مطالعـه‌ی بخـشی از ویژگی‌های هندسی شکل‌ها است که حتـی اگـر شـکل در معـرض چنـان تغییـرات شدیدی قرار گیرد که همه ویژگی‌های متری و تصویری‌اش را از دست بدهد، پایـدار بماند.

به بیان ریاضـی، یـک فـضای توپولوژیـک عبـارت اسـت از یـک زوج (X,A) متشکل از یک مجموعه‌ی X و یک مجموعـه‌ی A از زیـر مجموعـه‌هـای بـاز X کـه اصول موضوعه‌ی زیر را برقرار سازد:

الف- هر اجتماعی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است؛

ب- اشتراک دو مجموعه‌ی باز، مجموعه‌ای باز است؛

ج- مجموعه‌های A و X باز هستند.

در تعریف فوق، توپولوژی A فضای توپولوژی (X,A) نامیده می‌شود. در فضای توپولوژی، مفاهیمی چون فضای متریک، فضای برداری توپولوژیک و بستارها وجود دارند که در مباحث اقتصاد ریاضی کاربرد فراوان دارند. با توجه به اهمیت فضای متریک در مباحث اقتصاد ریاضی، در ادامه به تعریف این فضا پرداخته می‌شود.

در توپولوژی معمولی، زیر مجموعه‌ی R^n را باز می‌نامیم، هرگاه هر نقطه‌ی آن مرکز گوی مشمول همان مجموعه باشد. این تعریف را می‌توان به گونه‌ای تعمیم داد که به جای R^n، مجموعه‌ی X که در آن مفهوم فاصله تعریف شده، قرار گیرد و چنین فضایی همواره یک فضای توپولوژی را پدید می‌آورد. بر اساس مفاهیم فوق، فضای متریک عبارت است از یک زوج (X,d) متشکل از یک مجموعه‌ی X و تابع حقیقی $d:X\times X\to R$ به نام متریک به گونه‌ای که:

1- برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)\geq 0$ و $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$ باشد؛

2- برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)=d(y,x)$؛

3- نابرابری مثلثی برای هر $x,y,z\in X$ برقرار باشد؛ یعنی:

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. یک زیرمجموعه‌ی $V\subset X$ را باز گوئیم هرگاه به ازای هر نقطه‌ی $x\in V$ عددی مانند $e>0$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که گوی به مرکز x و شعاع e یعنی $K_e(x)=\{y\in X \mid d(x,y)<e\}$ نیز مشمول V باشد. مجموعه‌ی $A(d)$ متشکل از همه‌ی مجموعه‌های باز X را توپولوژی فضای متریک (X,d) می‌نامند.

در حدود دهه‌ی چهل با پیشگامی ریاضی‌دان مشهور فون نیومن، اقتصاددانان دریافتند که برخی از مسائل مشکل اقتصاد را می‌توان با استفاده از توپولوژی جبری در حالت‌های بسیار کلی حل کرد. اوج استفاده از این مسأله را می‌توان در اثبات وجود تعادل عمومی و قضایای اول و دوم رفاه توسط ارو مشاهده نمود. هر چند این قضایا نشان می‌داد که نقطه‌ی تعادلی وجود دارد که دارای نوعی خاصیت بهینگی است، ولی در مورد رفتار نقطه‌ی تعادل (مانند آن‌که آیا تعادل منحصر به فرد است یا این که انتقال از نقطه‌ی غیر تعادل به تعادل چگونه است)

مطلبی ارائه نکرده است. در دهه‌ی هفتاد میلادی اقتصاددانان با پیشگامی دبرو دریافتند که با به کارگیری توپولوژی دیفرانسیلی می‌توان به برخی از سوالات پاسخ داد. برای مثال اثبات شد که تحت شرایطی عام، نقطه‌ی تعادل در مدل ارو-دبرو به طور موضعی یکتا است و یا اسمیل[36] نشان داد که می‌توان مبادلات را از یک نقطه‌ی عدم تعادل شروع نمود و به تدریج به تعادلی دست یافت که دارای خاصیت بهینگی است.

3-5- تئوری کنترل و برنامه‌ریزی پویا

هدف بهینه‌یابی ایستا تخصیص منابع کمیاب بین عوامل رقیب در یک لحظه‌ی معین از زمان است. به بیان ریاضی، مسأله تعیین مقادیری از متغیرهای وضعیت[37] از میان مجموعه مقادیر ممکن به نام فضای ممکن است، به طوری که تابع مفروضی موسوم به تابع هدف را حداکثر کند. ارائه‌ی مسأله به صورت فوق، مسأله‌ی برنامه‌ریزی نام دارد. مسأله‌ی بهینه‌سازی پویا، تخصیص منابع کمیاب بین عوامل رقیب در یک فاصله‌ی زمانی، از زمان اولیه تا زمان نهایی است. به بیان دیگر، مسأله‌ی تعیین مسیرهای زمانی برای متغیرهای معین شامل متغیرهای وضعیت و متغیرهای کنترل[38] است. این مسیرهای زمانی از مجموعه‌ای موسوم به مجموعه‌ی فضای ممکن و مجموعه‌ی کنترل انتخاب می‌شوند. انتخاب و تعیین مسیرهای زمانی برای متغیرهای کنترل با استفاده از مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل صورت می‌گیرد که معادلات حرکت[39] نامیده می‌شوند. مسیرهای زمانی برای متغیرهای معین که تشریح کننده‌ی سیستم هستند، متغیرهای وضعیت[40] نامیده می‌شوند. مسیرهای زمانی متغیرهای کنترل طوری انتخاب می‌شوند که تابع مفروضی که وابسته به مسیرهای زمانی و متغیرهای وضعیت است، ماکزیمم شود. این تابع را "تابع هدف"[41] می‌نامند. اگر مسأله‌ای بدین صورت ارائه شود، مسأله‌ی کنترل نامیده می‌شود. در حالت کلی، یک مسأله‌ی کنترل به صورت زیر است:

---

[36] Smile
[37] -state variable
[38] Control Variable
[39] Equation of motion
[40] State variables
[41] Objection Function

$$\max u(t) = \int_{t_\circ}^{t_1} I(u,x,t) + F(x_1,t_1) \qquad (1)$$

به طوری که داشته باشیم،

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_\circ) = x_\circ \\ (x(t),t) \in T \\ \{u(t)\} \in U \end{cases}$$

مسأله‌ی کنترل ذکر شده در رابطه‌ی (1) مشتمل بر زمان t، متغیرهای وضعیت $x(t)$، متغیرهای کنترل $u(t)$، معادلات حرکت $\dot{x} = f(x,u,t)$ ، زمان انتهایی و تابع هدف است که در ادامه به طور خلاصه به هر کدام اشاره می‌شود.

زمان t به صورت پیوسته اندازه‌گیری می‌شود و در فاصله‌ی زمانی اولیه $t_\circ$ و زمان انتهایی t_1 قرار دارد به طوری که $t_\circ \le t \le t_1$ باشد. در هر زمان، متغیر وضعیت سیستم به وسیله‌ی n عدد حقیقی $x_1(t),....,x_n(t)$ که متغیرهای وضعیت هستند، مشخص می‌شود و به وسیله‌ی بردار وضعیت $x(t)=(x_1(t),....,x_n(t))$ نشان داده می‌شود و فرض می‌شود که هر یک از متغیرهای وضعیت، تابعی پیوسته از زمان هستند. بنابراین، مسیر متغیر وضعیت به صورت $\{x(t)\} = \{ x(t) \in E^n \mid t_\circ \le t \le t_1 \}$ تعریف می‌شود. از نظر هندسی، مسیر وضعیت مسیری از نقاط در E^n است که از وضعیت اولیه $x(t_\circ) = x_\circ$ که اغلب معلوم است تا وضعیت انتهایی $x(t_1) = x_1$ که اغلب تعیین می‌شود، ادامه دارد.

در هر لحظه از زمان t (واقع در فاصله‌ی زمانی مورد نظر)، تصمیم به وسیله‌ی اعداد حقیقی $u_1(t),u_2(t),...,u_r(t)$ که متغیرهای کنترل هستند، مشخص می‌شود و به صورت بردار کنترل زیر بیان می‌شود.

$$U(t) = (u_1(t),u_2(t),...,u_r(t))$$

$U(t)$ برداری r بعدی است و از نظر هندسی نقطه‌ای در E^r است. متغیرهای کنترل از مجموعه‌ی مقادیر ممکن و نیز با توجه به قیدهای معین انتخاب می‌شوند و بردار کنترل در تمامی زمان‌های واقع در فاصله‌ی زمانی مورد نظر باید متعلق به مجموعه‌ی مفروضی مانند Ω که زیرمجموعه‌ای از E^r است، باشد، به طوری که $t_\circ \le t \le t_1$ و $U(t) \in E^n$ باشد و در آن Ω همواره

مجموعه‌ای فشرده (بسته و کراندر)، محدب و نسبت به زمان پایا فرض می‌شود. مسیرهای وضعیت $\{x(t)\}$ نیز به وسیله‌ی معادلات حرکت مشخص می‌شوند و مجموعه‌ای از n معادله‌ی دیفرانسیل است که نرخ تغییر هر یک از متغیرهای وضعیت نسبت به زمان به صورت تابعی از متغیرهای وضعیت و کنترل و زمان به صورت $\dot{x} = f(x,u,t)$ نشان داده می‌شود و شکل کامل آن به صورت زیر است:

$$\frac{dx_j}{dt} = \dot{x}_j(t) = f_j(x_1(t),....,x_n(t),u_1(t),.....,u_r(t),t) \qquad (2)$$

شرایط مرزی معادلات حرکت نیز به وسیله‌ی روابط زیر معین می‌شود:

$$\begin{aligned} x(t_\circ) &= x_\circ \\ x(t_1) &= x_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

با معلوم بودن مقادیر مربوط به شرایط اولیه و مسیر کنترل $U(t)$، مسیر وضعیت یکتای $\{x(t)\}$ وجود دارد که در معالات حرکت و شرایط مرزی صدق می‌کند و می‌توان آن را با انتگرال‌گیری از مسأله‌ی معادلات دیفرانسیل از $x_\circ$ به بعد محاسبه کرد (پورکاظمی، 1371، ص 214).

در مساله‌ی کنترل ذکر شده در بالا، $I(u,x,t)$ تابع میانی نامیده می‌شود و تابعی از مسیرهای زمانی، متغیرهای وضعیت و کنترل است و شکل ریاضی آن به صورت زیر است:

$$I(u,x,t) = I(x_1(t),....,x_n(t),u_1(t),.....,u_r(t),t) \qquad (4)$$

تابع انتهایی است و به صورت تابعی از متغیر وضعیت و زمان انتهایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x_1,t_1) = F(x_1(t),....,x_n(t),t_1) \qquad (5)$$

که توابع F توابعی داده شده و پیوسته و مشتمل‌پذیر هستند.

در مجموع، در شرایطی که بخواهیم مسائل بهینه‌سازی را به صورت پویا مطالعه کنیم، استفاده از این ابزارها الزامی است به گونه‌ای که مطالعه‌ی اقتصاد منابع طبیعی و مدل‌های رشد اقتصادی بدون آشنایی با کنترل بهینه غیر ممکن است.

قابل ذکر است از روش حساب تغییرات، اصل ماکزیمم و اصل بلمن می‌توان بسته به شرایط مسأله برای تعیین مسیر بهینه استفاده نمود (چیانگ، 1387).

3-6- نظریه‌ی بازی‌ها

نظریه‌ی بازی‌ها یکی از موضوعات مهم ریاضی است که در علم اقتصاد کاربرد فراوانی دارد. اساس این موضوع برکنش و واکنش رقبا و یا بازیکنان استوار است. آن بخش از نظریه‌ی بازی‌ها که در اقتصاد کاربرد دارد، از توپولوژی برای اثبات اصول خود استفاده کرده و بر اساس قوانین احتمالات، نقطه تعادل ناش[42] را دنبال می‌کند. به عبارتی دیگر، این نظریه در شرایطی که بیش از یک تصمیم گیرنده‌ی وجود داشته و تابع هدف هر فرد تنها به انتخاب آن فرد بستگی نداشته باشد، استفاده می‌شود. این نظریه به عنوان یکی از روش‌های متداول تصمیم‌گیری در شرایط رقابتی است که توسط فون نیومن و مورگنسترن[43] معرفی و توسعه یافته است.

کلمه‌ی بازی که در میان عوام به کار می‌رود، در برگیرنده‌ی مفاهیمی چون بازی‌های ورزشی، انواع قمار، شطرنج و شرط بندی است و کمتر در حوزه‌های سیاسی، اقتصادی، روابط کار و .... استفاده می‌شود. در این بازی‌های عامیانه، حداقل دو نفر حضور دارند و هر یک از دو طرف برای برد تلاش می‌کنند، اما نتیجه ممکن است برد، باخت یا تساوی باشد. اما آنچه که در نظریه‌ی بازی‌ها به آن بازی اطلاق می‌شود عبارت است از تعاملات یا روابط متقابلی که در آنها بین تصمیم دو نفر وابستگی و ارتباط متقابل وجود دارد. به عبارتی دیگر، هرگاه مطلوبیت، سود، درآمد، رفاه و هر آنچه که فرد بازیکن به دنبال آن است، علاوه بر تلاش و تصمیم فرد، تحت تأثیر (مثبت یا منفی) تلاش و تصمیم طرف مقابل نیز باشد به آن بازی اطلاق می‌شود.

ویژگی عمده‌ی تصمیم‌گیری در شرایط بازی این است که هر بازیکن قبل از تصمیم‌گیری و انتخاب، باید واکنش و عکس‌العمل دیگران را نسبت به انتخاب و تصمیم خود مورد تجزیه و تحلیل قرار دهد و سپس تصمیمی را اتخاذ کند که بهترین نتیجه را برای او به همراه داشته باشد. به تعبیری دیگر، هر بازیکن باید

---

[42] Nash equilibrium
[43] Von-Neumann and Morgenstern

طوری تصمیم گیری نماید که تصمیم وی با در نظر گرفتن واکنش طرف مقابل بیشترین عایدی را برای وی داشته باشد (عبدلی، 1386، ص 15).

امروزه بدون آشنایی با تئوری بازی‌ها فهم بخش عمده‌ای از اقتصاد مانند سازماندهی صنعتی،[44] انتخاب عمومی،[45] اقتصاد سیاسی و ... غیر ممکن است.

3-7- بازی‌های دیفرانسیلی

بازی دیفرانسیلی[46] وضعیتی از تقابل یا همکاری است که در آن بازیکنان استراتژی‌هایی را در طول زمان انتخاب می‌کنند. در بازی دیفرانسیلی بر خلاف نظریه‌ی کنترل، بیش از یک بازیکن وجود دارد و پرداخت به هر بازیکن بستگی به مسیرهای کنترل انتخابی به وسیله‌ی تمامی بازیکنان دارد. به عبارتی دیگر، در بازی‌های دیفرانسیلی بازیکنان در طول زمان، حرکات خود را می‌سازند. بنابراین، تعداد حرکت و در نتیجه تعداد استراژی‌ها نامحدود است.

بازی‌های دیفرانسیلی را می‌توان به روش‌های مختلف دسته‌بندی کرد. یک روش طبقه‌بندی، بر مبنای تعداد بازی‌ها است؛ مانند بازی دیفرانسیلی دو نفره، سه نفره، .... و n نفره.

مسأله‌ی کنترل را می‌توان حالت خاصی از بازی‌های دیفرانسیلی دانست که در آن تنها یک بازیکن وجود دارد. دسته‌بندی دیگر با توجه به ماهیت تابع پرداخت[47] است؛ مانند بازی‌های مجموع صفر یا مجموع غیر صفر. در بازی‌های مجموع صفر، مجموع پرداخت‌ها به بازیکن برابر صفر و در بازی‌های مجموع غیر صفر، مجموع پرداخت‌ها مخالف صفر (یا در حالت کلی‌تر هر ثابت دلخواهی) است.

در روش دیگر برای طبقه‌بندی بازی‌های دیفرانسیلی، آنها به دو دسته‌ی دارای متغیرهای تصادفی[48] و دارای متغیرهای مشخص[49] تقسیم می‌شوند.

روش دیگر برای دسته‌بندی بازی‌های دیفرانسیلی که در بازی‌های ایستا وجود ندارد، دسته‌بندی به وسیله‌ی ماهیت زمان است. اگر زمان به صورت

---

[44] Industrial Organization
[45] Public Choice
[46] Differential Game
[47] Pay-off Function
[48] Stochastic
[49] Deterministic

واحدهای گسسته اندازه گیری شود، این بازی، بازی دیفرانسیلی گسسته[50] نامیده می‌شود و اگر زمان به صورت واحدهای پیوسته در نظر گرفته شود، بازی را بازی دیفرانسیلی پیوسته[51] می‌نامند.

3-8- نظریه‌ی آشوب

از دیدگاه نظریه آشوب،[52] هر چند که امور جهان بی‌نظم، تصادفی و در نتیجه غیرقابل پیش‌بینی به نظر می‌رسند، اما در عین حال از یک نظم و قطعیت برخوردار هستند. هدف این نظریه شناسایی راه‌های تشخیص نظم نهفته در سیستم‌های بسیار پیچیده است که در صورت موفقیت اجازه می‌دهد تا روند آتی حرکت آنها بر خلاف باورهای قبلی پیش‌بینی شوند. در نظریه‌ی آشوب، بیان می‌شود که سیستم‌های پیچیده صرفاً ظاهری پر آشوب دارند و در نتیجه نامنظم و تصادفی به نظر می‌رسند، در حالی که در واقعیت تابع یک جریان معین با یک فرمول ریاضی مشخص هستند. از این رو، موضوع آشوب در ریاضیات معمولاً تحت عنوان آشوب معین مطرح می‌شود که بر پایه‌ی نظریه‌ی رشد غیرخطی با بازخورد[53] شکل گرفته است (مشیری، 1381، ص 12).

نظریه‌ی آشوب در دهه‌های اخیر در تحقیقات علمی اقتصاد برای پیش‌بینی متغیرهای بازارهای پولی، مالی و مدل‌های اقتصاد کلان (مدل‌های سیکل‌های تجاری و مدل‌های عدم تعادل بلند مدت) استفاده می‌شود. بازارهای پولی و مالی یکی از موارد بسیار مناسب برای به کارگیری نظریه‌ی آشوب هستند، زیرا نظریه‌های موجود و مسلط در اقتصاد مالی و پولی حاکی از آنند که متغیرهای پولی، مانند نرخ ارز، تصادفی و در نتیجه تغییرات آنها غیر قابل پیش‌بینی هستند. همچنین، در صورت کشف نظم نهایی در روند متغیرهای پولی، امکان دستیابی به اطلاعات قابل توجهی فراهم می‌شود.

از مهمترین مدل‌های اقتصاد کلان که از نظریه‌ی آشوب برای بیان آن استفاده شده است، می‌توان به مدل دوران زندگی گراندمونت[54] (1986)، الگوی

---

[50] Discrete Differential game
[51] Continuous Differential game
[52] Chaos Theory
[53] Nonlinear growth with feedback
[54] Grandmont

اسکارس[55] (1996) برای بیان مدل رشد سولو، لبارون[56] (1989) برای ارزیابی نرخ بازدهی بازار سهام اشاره نمود (قدیمی و مشیری، 1381، ص 149).

قابل ذکر است که در سال‌های اخیر اقتصاددانان سعی نموده‌اند که بعضی از فرضیات محدود کننده‌ی مدل‌های نئوکلاسیکی مانند عقلانیت کامل، همگنی افراد و اطلاعات کامل را کنار بگذارند. بنابراین، ریاضیات لازم برای بیان چنین تئوری‌هایی بسیار پیچیده‌تر می‌شود. برای مثال، برخی از این مدل‌ها بیش از اندازه غیرخطی می‌شوند و رفتارهایی نظیر ناپایداری و آشوب را از خود نشان می‌دهند. بنابراین، مطالعه‌ی نظریه‌ی آشوب برای بیان واقعی‌تر الگوهای اقتصادی الزامی است.

3-9- مجموعه‌ی فازی و منطق فازی

نظریه‌ی مجموعه و منطق فازی ابتدا در سال 1965 توسط پروفسور لطفی‌زاده ریاضی‌دان ایرانی تبار دانشگاه برکلی مطرح شد. این نظریه کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های کامپیوتر، تحلیل سیستمی، الکترونیک، برق و اخیراً در علوم اجتماعی و اقتصاد پیدا کرده است. منطق فازی نظریه‌ای برای شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد (شکیبایی، 138، ص 208 و بیگدلی و همکاران، 1385).

در منطق صریح و قطعی، ارزش هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد که کامپیوتر آن را با صفر یا یک نشان می‌دهد. در رابطه با منطق گزاره‌ها، نظریه‌ی مجموعه‌ها نیز مطرح می‌شود و هر مجموعه با اعضایش به طور کامل شناخته می‌شود. به عبارتی دیگر، یک مجموعه هنگامی به طور کامل معرفی می‌شود که هر عضو را به طور قطعی عضو آن مجموعه باشد یا خارج از آن مجموعه تعریف شود. هر مجموعه یک صفت مشخص کننده‌ی مربوط به خود دارد. معیار عضویت عناصر در مجموعه، صفت مشخص کننده‌ی مجموعه است و هر عنصری که دارای آن صفت باشد، عضو مجموعه است و در صورت دارا نبودن آن صفت، خارج از

---

[55] Scarth
[56] Lebaron

مجموعه شناخته می‌شود. این معیار عضویت را تابع عضویت می‌نامیم که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$m(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ \circ & x\notin A\end{cases} \qquad (6)$$

حال اگر روزهای هفته قبل را در نظر بگیریم و مجموعه مفروضی را روزهای ابری قرار دهیم، می‌توان مقدار (شنبه) m را معین کرد. اگر آسمان شنبه کاملا پوشیده از ابر باشد (شنبه) m مقدار یک، اگر آفتابی باشد، مقدار آن صفر و اگر نصف آسمان ابری باشد خواهیم گفت 50 درصد ابری است که این ارزش گذاری غیرصریح فازی است.

مجموعه‌های فازی به مفاهیم و متغیرهای زبانی تقسیم می‌شوند. برای مثال، "قیمت" یک مفهوم است و قیمت نسبتاً پایین یک متغیر زبانی[57] است. یک مجموعه‌ی فازی از یک مجموعه‌ی منظم به یک بازه‌ی [1 و 0] نگاشت[58] می‌کند. عضو یک مجموعه‌ی فازی غیر منعطف[59] نیست. یک نمونه از این نگاشت در ادامه ارائه می‌شود.

قیمت یک کامپیوتر شخصی 15 هزار دلار است و این یکی از گرانبهاترین کامپیوترهایی است که من دیده‌ام. بنابراین، قیمت آن را به میزان 0/98 قرار می‌دهیم که عدد 0/98 درجه‌ی عضویت نام دارد. نباید این مقدار را با یک احتمال اشتباه گرفت و لزومی ندارد جمع درجات عضویت برابر با یک شود. به عبارتی دیگر، به منظور شبیه‌سازی و به دست آوردن مدل ریاضی برای منطق زبانی، منطق فازی به ما اجازه می‌دهد به تابع عضویت مقداری بین صفر و یک را نسبت دهیم و ابهام را جایگزین قطعیت کنیم.

نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی را می‌توان به عنوان تکنیکی برای مدل‌سازی یا تخمین هر نوع رابطه‌ی تابعی و هر نوع سیستمی مورد استفاده قرار داد (احمدی، 1381، ص 175).

---

[57] Linguistic Variable
[58] Map
[59] Crisp

هر سیستم فازی سه جزء دارد: پایگاه قواعد فازی،[60] مجموعه‌های ورودی و خروجی فازی[61] و موتور استنتاج فازی.[62]

تعیین متغیرهای ورودی و خروجی اولین گام در طراحی سیستم فازی است. به عنوان مثال، در یک سیستم اقتصادی خرد، قیمت متغیر ورودی و عرضه یا تقاضا متغیر خروجی آن است و خروجی اقتصادی به شکل ریاضی $q^d = f(p)$ نمایش داده می‌شود. پس از تعیین متغیرهای ورودی و خروجی نوبت به تعیین مجموعه‌های فازی می‌رسد. این کار مستلزم آن است که دامنه نوسان هر کدام از متغیرها مشخص گردد. مجموعه‌های فازی همان مفاهیم مبهم و غیرکمی هستند که در مورد سیستم مورد نظر بیان می‌شوند. (مانند مجموعه‌های خیلی زیاد، زیاد، متوسط، کم و خیلی کم یا سرد، خنک، متعادل، گرم و داغ. برای هر یک از عناصر این مجموعه‌ها لازم است محدوده‌های آنها بر اساس منحنی‌هایی با ارتفاع واحد و شکل‌های مثلثی، نرمال، ذوزنقه‌ای و ... تعیین شوند و در عمل معمولاً از منحنی‌های مثلثی بیشتر استفاده می‌شود.

گام سوم در طراحی سیستم‌های فازی، به دست آوردن مجموعه‌ای از قواعد منطقی فازی با استفاده از دانش افراد خبره یا دانش حوزه‌ی مورد بررسی و ترکیب آنها در یک چارچوب معین برای نتیجه‌گیری از مجموعه قواعد است. مجموعه‌ی این قواعد که به صورت "اگر ... آن‌گاه ..." بیان می‌شوند، پایگاه قواعد فازی نام دارند. استنتاج مجموعه‌ی قواعد فازی از طریق آنچه که موتور استنتاج نامیده می‌شود و بر اساس معیارهایی نظیر معنی‌داری شهودی، بازده‌ی محاسباتی و ویژگی‌های خاصی انتخاب می‌شوند (آذری و فرجی، 1386، ص 28).

موتور استنتاج فازی، قواعد موجود در پایگاه قواعد فازی را به وسیله‌ی نگاشتی از یک مجموعه‌ی فازی مشخص به مجموعه‌ی فازی مشخص دیگر ترکیب می‌نماید. از آنجایی که در اغلب کاربردها، ورودی‌ها و خروجی سیستم فازی اعداد حقیقی هستند، لازم است واسطه‌هایی بین موتور استنتاج فازی و محیط ایجاد

---

[60] Fuzzy Rule Base
[61] Fuzzy input-output
[62] Fuzzy inference engine

شود. این واسطه‌ها را فازی سازها[63] و غیرفازی سازها[64] می‌نامند که این دو نیز جزئی از سیستم فازی هستند.

3-10- شبکه‌های عصبی

استفاده از روش‌های غیر کلاسیک در شناسایی مدل و پیش‌بینی رفتار سیستم‌های پیچیده، در محافل علمی و حتی حرفه‌ای متداول و معمول شده است. در بسیاری از سیستم‌های پیچیده و به ویژه غیرخطی که مدل‌سازی و به تبع آن پیش‌بینی و کنترل آنها از طریق روش‌های کلاسیک و تحلیلی امری دشوار و حتی در برخی موارد غیرممکن می‌نماید، امروزه از روش‌های غیر کلاسیک که از خصوصیاتی همچون هوشمندی مبتنی بر معرفت و خبرگی بهره‌مند می‌باشند، استفاده می‌شود.

شبکه‌های عصبی یکی از روش‌های جدیدی است که در موضوعات متنوعی همچون مدل‌سازی، شناخت الگو، خوشه‌بندی و پیش‌بینی به کار برده می‌شود و نتایج مفیدی از آن حاصل می‌گردد.

گرچه هنوز بیش از 50 سال از تولد روش‌های محاسباتی مبتنی بر شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN)[65] نمی‌گذرد، ولی شبکه‌ها به دلیل ویژگی‌هایی چون پردازش موازی، هوشمندی و انعطاف‌پذیری جایگاه ویژه‌ای در مسائل پیچیده مانند شناخت الگو، خوشه‌بندی،[66] مدل‌سازی، تخمین و شناسایی و پیش‌بینی یافته‌اند (اصغری، 1381، ص 122).

شبکه‌ی عصبی مانند یک "ذهن زنده" عمل می‌کند. بدین معنا که از مشاهدات خود انتزاعی می‌نماید و سپس بر اساس انتزاعی که نموده است اقدام به قضاوت می‌نماید. بنابراین، شبکه‌ی عصبی مدتی را صرف آموزش می‌نماید و سپس به صورت عملیاتی به کار گرفته می‌شود. شبکه‌ی عصبی آنچه را مشاهده می‌کند، در قالب پارامترهای درونی خود به خاطر می‌سپارد. در واقع، تکرار هر یک از مشاهدات سبب تغییر پارامترهای درونی شبکه، در جهت حفظ روابط حاکم بر مشاهدات می‌شود. آن‌چه در حافظه‌ی شبکه‌ی عصبی نگهداری می‌شود، تک تک

---

[63] Fuzzifier
[64] Defuzzifier
[65] Artificial Neural Nets
[66] Clustering

مشاهدات نیست، بلکه آهنگ و برداشت کلی از مشاهدات است. از این رو، شبکه‌ی عصبی گاهی در مواجهه‌ی مجدد با نمونه‌های آموزشی، با خطای قابل اغماضی عکس‌العمل نشان می‌دهد، اما این استواری و ثبات در عمل را دارد که در مواجهه با عموم نمونه‌های مشابه، عملکردی مناسب و همراه با خطای قابل اغماض داشته باشد.

در ادبیات شبکه‌های عصبی، به جای اصطلاح تخمین ضرائب از اصطلاح یادگیری[67] یا آموزشی[68] برای پیدا کردن ارزش‌های وزن‌های شبکه استفاده می‌شود. دو نوع یادگیری در این ادبیات مورد بحث قرار می‌گیرد: یادگیری تحت نظارت[69] و یادگیری بدون نظارت.[70] یادگیری اول که به یادگیری با معلم نیز معروف است، ارزش‌های متغیر هدف که شبکه باید بر اساس ارزش‌های متغیرهای ورودی و از طریق محاسبات، آنها را باز تولید نماید، مشخص و سپس خطای پیش‌بینی برای هر مشاهده به وسیله‌ی محاسبه‌ی اختلاف خروجی شبکه با ارزش‌های متغیرهای هدف اندازه‌گیری می‌شود. پس از آن، با استفاده از الگوریتم‌های مختلف تکرار[71] وزن‌های شبکه تعدیل می‌شود به گونه‌ای که خطای پیش بینی شده داخل نمونه که به وسیله‌ی مجموع مربعات خطاها یا میانگین خطای مطلق اندازه‌گیری می‌شود، حداقل شود. زمانی که وزن‌ها با هر تکرار تغییر می‌کند (شبکه آموزش داده می‌شود)، در اصطلاح گفته می‌شود که شبکه در حال آموزش است (بیل و جکسون، 1386).

---

[67] Learning
[68] Training
[69] Supervised learning
[70] Unsupervised learning
[71] Iteration

4- ارزیابی تجربی

در این بخش سعی شده است تا به دو سوال زیر پاسخ داده شود.

1- میزان تسلط دانشجویان تحصیلات تکمیلی در ایران بر مباحث اقتصاد ریاضی به چه میزان بوده است؟

2- از دیدگاه دانشجویان اقتصاد کدامیک از مباحث اقتصاد ریاضی نقش مهمی در تبیین تئوری‌های اقتصادی داشته است؟

برای پاسخ به سوالات ذکر شده، براساس تاریخچه‌ی اقتصاد ریاضی ارائه شده در بخش دوم مقاله چهار متغیر به ترتیب مربوط به دوره‌های اول تا چهارم سیر تکوین اقتصاد ریاضی در نظر گرفته شد. برای ارزیابی هر متغیر تعدادی از موضوعات ریاضی در دوره‌های ذکر شده به عنوان پروکسی،[72] مورد سوال قرار گرفت که متغیرها و پروکسی‌ها در جدول (2) ذکر شده‌اند.

جدول2: متغیرها و پروکسی‌های سنجش میزان تسلط دانشجویان با اقتصاد ریاضی

متغیر	دوره	پروکسی
X_1= ریاضیات دوره‌ی اول	1947 - 1938	حسابان و آنالیز (حساب دیفرانسیل و انتگرال)
X_2= ریاضیات دوره‌ی دوم	1960 - 1948	برنامه‌ریزی خطی و غیر خطی، جدول داده - ستاده، نظریه‌ی مجموعه‌ها و توپولوژی
X_3= ریاضیات دوره‌ی سوم	1990 - 1961	معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، نظریه‌ی کنترل و برنامه‌ریزی پویا، تئوری بازی‌ها
X_4= ریاضیات دوره‌ی چهارم	2007 - 1990	نظریه‌های آشوب، بازی‌های دیفرانسیلی (تفاضلی)، منطق فازی، شبکه‌های عصبی، محاسبات عددی

سپس از طریق طراحی یک پرسشنامه براساس دو سوال فوق، با توجه به جامعه‌ی آماری دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشکده‌های اقتصاد دانشگاه‌های تهران (علامه طباطبایی، تهران، شهید بهشتی، الزهرا و صنعتی شریف) و با در نظر گرفتن جدول مورگان، یک نمونه‌ی 135 تایی مورد ارزیابی قرار گرفت و در قالب 16 سوال هر کدام از پروکسی‌های ذکر شده برای دوره‌های چهارگانه، به دو صورت زیر مورد سوال قرار گرفت.

1- میزان تسلط شما بر هر یک از موضوعات اقتصاد ریاضی (حسابان و آنالیز، داده - ستاده، نظریه‌ی مجموعه‌ها و توپولوژی و ...) چه میزان است؟ 2- تا چه

[72] Proxy

حد تسلط بر مباحث (حسابان و آنالیز، داده ستاده، نظریه‌ی مجموعه‌ها و توپولـوژی و ...) را در تبیین تئوری‌های اقتصادی ضروری می‌دانید؟

هر کـدام از دو سـوال فـوق بـرای چهـار دوره‌ی مـورد اشـاره بررسـی شـد. داده‌های به دست آمده براساس طیف لیکرد کمی گردید و براساس آزمـون برابـری میانگین‌ها و آماره‌ی t مورد آزمون قرار گرفت.

میزان تسلط دانشجویان اقتصاد بر دانش ریاضی مرتبط با دوره های مختلـف با متغیرهای X_1، X_2، X_3 و X_4 مـشخص شـدند (X_i نـشان دهنـده‌ی میـزان تـسلط دانشجویان بر ریاضیات در دوره‌ی iام است).

مطابق جدول (3) برای آزمون سوالات فوق فروض H_0 و فرضیه‌ی مقابـل آن (H_1) به صورت زیر تعریف شده است.

H_0: میزان تسلط دانشجویان بر دانش اقتصاد ریاضی بـالاتر از متوسـط بـوده است.

H_1 : میزان تسلط دانشجویان بر دانش اقتصاد ریاضی کمتر از متوسـط بـوده است.

نتایج آزمـون در جـدول (3) ذکـر شـده اسـت. همـان گونـه کـه ملاحظـه می‌شود، فرض H_0 برای متغیرهای X_1 و X_2 تاییـد و بـرای X_3 و X_4 رد شـده اسـت. یعنی میزان تسلط دانشجویان تحصیلات تکمیلی بر دانش اقتصاد ریاضی دوره‌هـای اول و دوم بالاتر از متوسط و برای دوره‌های بعد کمتر از متوسط بوده است و همـان طور که مشاهده می‌شود، برای دو متغیر X_3 و X_4 فـرض H_0 حتـی در سـطح معنـی داری 99 درصد نیز رد شـده اسـت. بـه عبـارت دیگـر، میـزان تـسلط دانـشجویان تحصیلات تکمیلی بر دانش ریاضیات در دوره‌های سوم و چهـارم (ریاضـیات بعـد از سال‌های 1960) بسیار پایین بوده است. این در حالی است که مطالعه‌ی مقـالات و کتب لاتین اقتصاد بیانگر آن اسـت کـه ریاضـیاتی کـه امـروزه در اقتـصاد بـه طـور گسترده‌ای به کار گرفته می‌شود و نقش مهمی در تبیین تئـوری‌هـا دارد، ریاضـیات بعد از دهه‌ی 60 و به ویژه ریاضیات دوره‌ی چهارم است.

جدول 3: میزان تسلط دانشجویان بر دانش اقتصاد ریاضی دوره‌های اول تا چهارم

متغیرها	MEAN	ST.D	BOUND	t	P -value
$X_۱$	۳/۳۲	۰/۶۴	۳/۴۱	۱۴/۶۵	۱/۰۰۰
$X_۲$	۲/۶۲	۰/۵۷	۲/۷۱	۲/۵۲	۰/۹۹
$X_۳$	۲/۳۸	۰/۵۹	۲/۴۶	-۲/۳۵	۰/۰۱
$X_۴$	۱/۷۸	۰/۶۷	۱/۸۸	-۱۲/۱۸	۰/۰۰۰۰

مأخذ: نتایج تحقیق

در بخش دوم از دانشجویان سوال شد که تا چه میزان هر کدام از موضوعات ریاضی مطرح شده در دوره‌های اول تا چهارم در تبیین تئوری‌های اقتصادی مهم بوده است. در این بخش سوالات به گونه‌ای مطرح شد که دانشجو میزان ضرورت هر کدام از موضوعات اقتصاد ریاضی برای فهم دانش اقتصاد را ذکر نماید.

فروض $H_۰$ و $H_۱$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$H_۰$: مباحث ذکر شده اهمیت زیادی در تبیین تئوری‌های اقتصادی داشته است.

$H_۱$: مباحث ذکر شده اهمیت کمی در تبیین تئوری‌های اقتصادی داشته است.

بر اساس نتایج جدول (4) که در آن X_i بیانگر میزان ضرورت ریاضیات دوره‌ی iام در تبیین تئوری‌های اقتصادی بوده است، فرض $H_۰$ برای سه متغیر $H_۱$، H_2 و $H_۳$ پذیرفته شده است، یعنی دانشجویان نقش ریاضیات دوره‌های اول تا سوم را در تبیین تئوری‌های اقتصادی مهم داشته‌اند. اما بر اساس رد فرض $H_۰$ در مورد متغیر $H_۴$ دانشجویان معتقد بوده‌اند که ریاضیات دوره‌ی چهارم نقش موثری در تبیین تئوری‌ها نداشته است و این برخلاف واقعیات مشهود است، زیرا به جرات می‌توان گفت امروزه ریاضیات عصر چهارم (سال‌های پس از 1990) نقش بسیار موثری در تبیین و توسعه‌ی دانش اقتصاد داشته است. نتایج خلاف واقع بدان علت است که دانشجویان هنوز اهمیت این موضوعات را درک ننموده اند و ممکن است نتیجه‌ی به دست آمده به دلیل عدم آشنایی دانشجویان تحصیلات تکمیلی با مباحث مطرح شده در کتب و مقالات جدید دانش اقتصاد باشد.

جدول 4: ارزیابی اهمیت ریاضیات دوره‌های اول تا چهارم در تبیین تئوری‌های اقتصادی

متغیرها	*MEAN*	*ST.D*	*BOUND*	*t*	*P -value*
X_1	3/18	0/66	3/28	11/67	1/000
X_2	2/56	0/56	2/63	1/14	0/87
X_3	2/64	0/66	2/72	2/21	0/98
X_4	2/26	0/72	2/36	-3/84	0/000

مأخذ: نتایج محققان

5- نتیجه گیری و پیشنهادها

در این مقاله به بررسی حوزه و وسعت ریاضی در اقتصاد و کاربرد هر یک از مباحث ریاضی در تئوری‌های اقتصادی پرداخته شد. همچنین، در راستای ارزیابی میزان تسلط دانشجویان تحصیلات تکمیلی در ایران با مهمترین مباحث ریاضی که در علم اقتصاد استفاده شده، پرسشنامه‌ای تدوین گردیده است که در آن میزان آشنایی دانشجویان با مباحث حساب دیفرانسیل، مجموعه‌ها، توپولوژی، برنامه ریزی خطی و غیر خطی، سری‌ها، توابع، معادلات دیفرانسیل کلاسیک و معادلات تفاضلی، محاسبات عددی، تئوری کنترل، منطق فازی، ماتریس‌ها، مدل‌های آشوب، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، نظریه‌ی بازی‌ها و بازی‌های دیفرانسیلی مورد ارزیابی قرار گرفت.

با وجود اهمیتی که ریاضیات دوره‌های سوم و چهارم در تبیین تئوری‌های اقتصادی و فهم کتب و مقالات جدید اقتصادی دارند، میزان تسلط دانشجویان تحصیلات تکمیلی کشور با این موضوعات پایین تر از متوسط بوده است.

دانشجویان تحصیلات تکمیلی کشور بر ریاضیاتی مسلط هستند که مربوط به دوره‌ی قبل از 1960 بوده است (دوره‌ی اول و دوم) و این دانش ریاضی علیرغم اهمیت آن، امروزه نقش بسیار ضعیفی در فهم کتب و مقالات اقتصادی دارد.

دانشجویان تحصیلات تکمیلی کشور نقش ریاضیات دوره‌های اول تا سوم را در تبیین تئورهای اقتصادی و فهم مقالات و کتب اقتصادی جدید موثر دانسته‌اند، اما از دیدگاه آنان ریاضیات دوره‌ی چهارم نقش چندانی در بیان تئوری‌های اقتصادی نداشته است.

نتایج فوق نشان دهنده‌ی ضعف دانش ریاضی دانشجویان تحصیلات تکمیلی اقتصاد در کشور بوده است و این یافته تا حد زیادی قابل دفاع است. مطالعه‌ی کتب، مقالات اقتصادی چاپ شده و رساله‌های دانشجویان به خوبی بیانگر عدم استفاده یا استفاده‌ی محدود از دانش اقتصاد ریاضی جدید در کشور است.

در مجموع یافته‌های تحقیق بیانگر آن است که با وجود آن که ریاضیات دوره‌ی چهارم نقش بسزایی در تبیین و توسعه‌ی تئوری‌های جدید اقتصادی داشته است، ولی دانشجویان اقتصاد در کشور، آشنایی چندانی با این مباحث نداشته و به ضرورت آن نیز پی نبرده‌اند.

عدم آشنایی و تسلط دانشجویان با ابزارهای جدید ریاضی نه تنها موجب تضعیف کیفیت (از بعد تکنیک‌های بکار گرفته شده) رساله‌ها و مقالات ارائه شده توسط آنها می‌شود، بلکه مطالعه و فهم ادبیات تئوریک جدید مطرح شده در کتب اقتصادی (به عنوان مثال کتب خرد و کلان پیشرفته، کتب نظریه‌ی بازی‌ها و غیره) را برای دانشجویان ناممکن یا دشوار می‌نماید. بنابراین، توصیه می‌شود که مباحث ذکر شده در سرفصل درس اقتصاد ریاضی دوره‌های تحصیلات تکمیلی گنجانده شود و یا حتی دروس ریاضی جدیدی برای پوشش دادن این مباحث گردد.

فهرست منابع

احمدی، اکبر. (1381). سیستم‌های فازی عصبی: آشنایی و کابرد آن‌ها در تخمین توابع اقتصادی. مجموعه مقاله‌های اولین همایش معرفی و کاربرد مدل‌های، ناخطی پویا و محاسباتی در اقتصاد، دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی، 206- 175.

آذر، عادل و حجت فرجی. (1386). علم مدیریت فازی. تهران: مؤسسه کتاب مهر ایران.

اصغری اسکویی، محمد رضا. (1381). کاربرد شبکه‌های عصبی در پیش‌بینی سری‌های زمانی. مجموعه مقاله‌های اولین همایش معرفی و کاربرد مدل‌های ناخطی پویا و محاسباتی در اقتصاد، دانشکده اقتصاد علامه طباطبائی، 145- 121.

بیگدلی، علی، منصور زراءنژاد و محمد امین اسودار. (1385). مقایسه‌ی سطح توسعه‌ی مکانیزاسیون کشاورزی به روش فازی در استان همدان. بررسی‌های اقتصادی، 3(4): 23-51.

بیل، آر و تی جکسون. (1386). آشنایی با شبکه‌های عصبی. ترجمه‌ی محمود البرزی، چاپ دوم، تهران: مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

پورکاظمی، محمد حسین. (1371). بهینه سازی ریاضی. تهران: انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.

پورکاظمی، محمد حسین. (1381). نقش ریاضیات در مدیریت و اقتصاد. فصلنامه پیام مدیریت، (2)2: 71- 35.

جعفری صمیمی، احمد و امیر منصور طهرانچیان. (1384). اقتصاد ریاضی. بابلسر: انتشارات دانشگاه مازندران.

چیانگ، آلفا، سی. (1371). روش‌های بنیادی اقتصاد ریاضی. ترجمه‌ی مجید کوپاهی جلد اول. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

چیانگ، آلفا، سی. (1387). اصول بهینه‌یابی پویا. ترجمه‌ی عباس شاکری و فریدون اهرابی. تهران: انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی.

دادگر، یداله. (1382). ریاضیات در اقتصاد. نامه مفید، 2: 22- 5.

سوری، علی. (1384). تحلیل داده- ستاده. تهران: انتشارات نور علم.

شکیبایی، علیرضا. (1381). معرفی منطق فازی برای اندازه‌گیری سری‌های زمانی مبهم. مجموعه مقاله‌های اولین همایش معرفی و کاربرد مدل‌های ناخطی پویا و محاسباتی در اقتصاد، دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی، 224- 207.

عبدلی، قهرمان. (1386). نظریه بازی‌ها و کاربردهای آن: بازی‌های ایستا و پویا با اطلاعات کامل. تهران: سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی.

قدیمی، محمدرضا و سعید مشیری. (1381). مدل‌سازی و پیش‌بینی رشد اقتصادی در ایران با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی. مجموعه مقالات اولین همایش معرفی و کاربرد مدل‌های ناخطی پویا و محاسباتی در اقتصاد. دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی، 173- 147.

کورنات، ریچارد و هربرت رابینز. (1386). ریاضیات چیست. ترجمه سیامک کاظمی، نشر نی، چاپ سوم.

مشیری، سعید. (1381). آشنایی با نظریه آشوب و کاربردهای اقتصادی آن. مجموعه مقالات همایش معرفی و کاربرد مدل‌های ناخطی پویا و محاسباتی در اقتصاد. دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی، 51- 11.

Arrow K.J. & M.D. Inteligater. (2000). Handbook of Mathemaical Economics. Mary Ward Books. United Kingdom.

Chiang, A.C. (1974). Fundamental Methods of Mathematical Economics. Second Edition, Mc Graw Hill.