مساله مکانیابی ماکزیمم پوشش با سیستم صف $M/M/k$ و با قید های اضافی

فروغ معین مقدس، دانشگاه فردوسی مشهد – دانشکده علوم ریاضی– fo_mo59@stu-mail.um.ac.ir
حسین تقی زاده کاخکی، دانشگاه فردوسی مشهد – دانشکده علوم ریاضی– taghizad@math.um.ac.ir

چکیده: ما در این مقاله مساله مکانیابی ماکزیمم پوشش با سیستم صف M/M/k (فرایند پواسون با k سرویس دهنده) را مورد بررسی قرار می دهیم. هدف ماکزیمم کردن جمعیت پوشش داده شده است. محدودیت هایی برروی حداکثر تعداد مراکز سرویس انتخاب شده، تعداد سرویس دهندگان در هر مرکز سرویس و تعداد کل سرویس دهندگان وجود دارد. مراکز سرویس با سیستم صف M/M/k (با k متغیر) به متقاضیان سرویس ارائه می دهند. محدودیتی نیز برای کل هزینه های احداث و نگهداری مراکز سرویس و هزینه های قرار دادن سرویس دهندگان در این مراکز وجود دارد. تعیین محل مراکز سرویس و تخصیص نقاط تقاضا به این مراکز بگونه ای بایستی صورت گیرد که میانگین زمان انتظار در صف در هر مرکز سرویس از مقدار مطلوب تجاوز نکند. در ابتدا مدل ریاضی مساله را بررسی کرده و سپس به ارائه یک روش تقریبی برای حل مساله می پردازیم. در ادامه دو الگوریتم جستجوی محلی برای بهتر شدن جواب های بدست آمده پیشنهاد می دهیم و در نهایت نتایج محاسباتی را مورد بررسی قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: مساله مکانیابی ماکزیمم پوشش، روش تقریبی، سیستم صف M/M/k .

۱- مقدمه

مساله پوشش تصادفی نخستین بار توسط Marianov وReVelle [4] تحت عنوان qeueing maximal avaibility location problem مورد بررسی قرار گرفت. Marianov و Serra [6] مساله ماکزیمم پوشش احتمالی (probabilistic maximal covering) با محدودیت هایی بر روی حداکثر طول صف در هر مرکز سرویس و حداکثر زمان انتظار را مورد مطالعه قرار دادند. آنها در مقاله خود مساله را برای دو حالت یک سرویس دهنده و حالت m سرویس دهنده (با m ثابت) مدل کرده و روش های حلی برای آنها ارائه داده اند. تعمیمی از این مدل با ظرفیت محدود و کاربرد آن در مساله سیستم های تلفن گویا توسط Marianov و Rios [5] مورد بررسی قرار گرفت. Marianov وSerra [7] مساله پوشش مجموعه ای (set covering) با محدودیت هایی بر روی طول صف و میانگین زمان انتظار درصف در هر مرکز سرویس را بررسی کردند. آنها مساله را ابتدا برای حالت تعداد ثابت سرویس دهنده در هر مرکز سرویس و سپس برای تعداد متغیر سرویس دهنده در هر مرکز مورد بررسی قرار دادند. Marianov [3] مساله چند سرویس دهنده برای سیستم های متراکم با هدف ماکزیمم کردن تقاضای مورد انتظار را بررسی کرد. ما در این مقاله مساله ماکزیمم پوشش که در آن مراکز سرویس با سیستم صف M/M/k (با تعداد متغیر سرویس دهنده) به متقاضیان سرویس می دهد و با قید هایی برای تعداد سرویس دهندگان در مراکز سرویس و میانگین زمان انتظار در این مراکز و هزینه های آنها را مورد بررسی قرار می دهیم. ابتدا مدل ریاضی مساله را ارائه می کنیم و سپس یک روش تقریبی (heuristic) و دو الگوریتم جستجوی محلی برای مساله پیشنهاد می دهیم. در انتها با ارائه نتایج محاسباتی بدست آمده، به تحلیل این نتایج خواهیم پرداخت.

۲- مدل ریاضی مساله و روش حل

به منظور مدل کردن مساله، نمادهای زیر را تعریف می کنیم:

I: مجموعه نقاط تقاضا

J: مجموعه مراکز کاندید برای سرویس رسانی

p: ماکزیمم تعداد مراکز سرویس که می توان انتخاب کرد

a_i : جمعیت نقطه تقاضای i ام

N_i: مجموعه مراکز سرویس کاندید که در فاصله استاندارد از نقطه تقاضای i قرار دارند.

$\bar{k}$: ماکزیمم تعداد سرویس دهندگان

$k_{\max}$: ماکزیمم تعداد سرویس دهندگان در هر مرکز سرویس

τ_j : ماکزیمم زمان انتظار در مرکز jام

Fs_j: هزینه قرار دادن یک سرویس دهنده در مرکز jام

Fc_j: هزینه احداث و نگهداری یک مرکز سرویس در محل کاندید j

C: ماکزیمم هزینه احداث و نگهداری مراکز سرویس و قرار دادن سرویس دهندگان

λ_j : نرخ ورود برای مرکز سرویس j

μ_j : نرخ خروج (نرخ سرویس) برای مرکز سرویس j

$W(\lambda,\mu,k)$: میانگین زمان انتظار در یک مرکز سرویس با k سرویس دهنده و نرخ ورود و خروج به ترتیب λ و μ

متغیرهای مساله را بصورت زیر تعریف می کنیم:

k_j : تعداد سرویس دهندگان در مرکز سرویس j

y_j : برابر ۱ اگر مرکز کاندید j به عنوان یک مرکز سرویس انتخاب شود و ۰ در غیر اینصورت.

x_{ij} : برابر ۱ اگر نقطه تقاضای i به مرکز سرویس j تخصیص داده شود و ۰ در غیر اینصورت.

مدل ریاضی مساله بصورت زیر خواهد شد:

$$P)\ Max \sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} a_i x_{ij}$$

$$s.t \quad \sum_{j\in N_i} x_{ij} \le 1 \qquad \forall i\in I \qquad (1)$$

$$x_{ij} \le y_j \qquad \forall i\in I, j\in N_i \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in J} y_j \le p \qquad (3)$$

$$\sum_{j\in J} k_j \le \bar{k} \qquad (4)$$

$$k_j \le k_{\max} y_j \qquad \forall j\in J \qquad (5)$$

$$W(\lambda_j,\mu_j,k_j) \le \tau_j \qquad \forall j\in J \qquad (6)$$

$$\sum_{j\in J} Fs_j k_j + \sum_{j\in J} Fc_j y_j \le C \qquad (7)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \qquad \forall i\in I\ ,\ j\in J \qquad (8)$$

$$k_j = 0,1,\ldots,k_{\max} \qquad \forall j\in J \qquad (9)$$

اگر λ و μ به ترتیب نرخ ورود و نرخ خروج برای یک مرکز سرویس با k سرویس

دهنده باشد و با فرض اینکه نسبت λ/μ عدد بزرگی باشد، میانگین زمان انتظار در این مرکز را می توان بصورت زیر نوشت[9] :

$$W(\lambda,\mu,k)=\frac{\lambda}{(k\mu-\lambda)^2\left(a_k+\dfrac{\lambda}{k\mu-\lambda}\right)} \qquad (10)$$

که در آن : $i \geq 2$

$$a_1=1 \quad , \quad a_i=1+\frac{\mu}{\lambda}(i-1)a_{i-1}$$

با جایگزین کردن رابطه(10) در قید (6) ، مساله بصورت یک مساله برنامه ریزی عدد صحیح غیر خطی در خواهد آمد.

برای هر مرکز سرویس کاندید j زیر مساله $v_j(t)$ (با فرض اینکه t سرویس دهنده در آن قرار داده شده است) شامل تنها قید میانگین زمان انتظار در صف (قید (6)) و با تابع هدف ماکزیمم جمعیت پوشش داده شده را تعریف می کنیم.

ایده اصلی الگوریتم ، تجزیه مساله P به زیر مساله هایی کوچکتر می باشد([2] را ببینید) . در این الگوریتم با مقایسه جواب های بدست آمده از حل زیر مساله های $v_j(t)$ برای مراکز سرویس کاندید (و با تعداد متفاوت سرویس دهنده) ، مرکز سرویسی را انتخاب می کنیم که علاوه بر اینکه دارای بیشترین جمعیت پوشش داده شده در همسایگی استاندارد از خود باشد ، موجب نقض هیچ یک از قیود مساله نیز نشود.

تعداد سرورهای هر مرکز سرویس و همینطور نحوه تخصیص نقاط تقاضا به مراکز سرویس در حین اجرای الگوریتم تعیین می شود. این روند را تا زمانی ادامه می دهیم که اولا ، تعداد مراکز سرویس انتخاب شده کمتر از ماکزیمم تعداد مراکز مجاز (p) باشد ، ثانیا ، تعداد سرورهای تعیین شده از حد مجاز ($\bar{k}$) تجاوز نکند ، ثالثا، قید هزینه نیز نقض نشود و رابعا، حداقل یک نقطه تقاضا بدون تخصیص به مرکز سرویسی باقی مانده باشد.

ما به کمک لمی نشان می دهیم که اگر $W(\lambda,\mu,k)$ مطابق رابطه (10) تعریف شده باشد و اگر λ ، μ و k بگونه ای باشند که $\left(k.k!\,\mu^k-\lambda^k\right)>0$ ، در آنصورت

$$W(\lambda,\mu,k)\leq\frac{\lambda^k}{\mu\left(k.k!\,\mu^k-\lambda^k\right)} \qquad (11)$$

تابع $G(\lambda,\mu,k)$ را بصورت $G(\lambda,\mu,k)=\dfrac{\lambda^k}{\mu\left(k.k!\,\mu^k-\lambda^k\right)}$ تعریف می کنیم. برای حل زیر مساله های $v_j(t)$ به کمک خواص دو تابع W وG و با بکارگیری طول گام مناسب ، ابتدا یک جواب شدنی برای این زیرمساله پیدا می کنیم و سپس تلاش می کنیم دنباله ای از جواب های شدنی برای این زیر مساله که تابع هدف را بهبود می بخشند پیدا کنیم.

در ادامه به کمک دو الگوریتم جستجوی محلی تلاش می کنیم جواب های بدست آمده را بهبود ببخشیم. در الگوریتم اول با فرض اینکه مرکز j دارای k_j سرویس دهنده باشد t $\left(1\leq t\leq k_j\right)$ سرویس دهنده را به مرکزی (از میان مراکز سرویس انتخاب شده و یا از میان مراکز انتخاب نشده) منتقل می کنیم تا جواب بهتری را بدست آوریم. در الگوریتم جستجوی محلی دوم t سرویس دهنده بین دو مرکز سرویس (مشابه قبل از میان مراکز سرویس انتخاب شده و یا از میان مراکز کاندید انتخاب نشده) پخش می شود. در هر دو الگوریتم جستجوی محلی، از میان حالت های ممکن ، حالتی که دارای بیشترین سود باشد را انتخاب می کنیم.

۳ - نتایج محاسباتی

ما مساله را برای دو دسته از نمونه های عددی حل کرده ایم. دسته اول نمونه هایی هستند که بصورت تصادفی ساخته شده اند و دسته دوم نمونه های عددی آورده شده در سایت OR-Library [1]، برای مساله های پوشش و میانه می باشد. ما این مساله ها را برای مقادیر متفاوت $k_{\max}$ و $\bar{k}$ حل و در هر مورد درصد پوشش را بدست می آوریم. بعنوان نمونه درصد های پوشش بدست آمده برای مثال ۱۰۰ نقطه ای و برای $\bar{k}=5$ و مقادیر متفاوت $k_{\max}$ را در جدول (۱) آورده ایم.

جدول (۱)- نمونه ای از نتایج محاسباتی برای مثال ۱۰۰ نقطه ای

روش حل	$\bar{k}=5$		
	$k_{\max}=1$	$k_{\max}=3$	$k_{\max}=5$
بدون جستجوی محلی	74.20	77.42	92.42
به کمک جستحوی محلی ۱	-	90.31	-
به کمک جستحوی محلی ۲	-	90.10	-

نتایج اصلی بدست آمده از روش تقریبی (با استفاده و بدون استفاده از الگوریتم جستجوی محلی) بصورت زیر است:

۱- همانگونه که انتظار می رود برای مقادیر ثابت p و $\bar{k}$ و با افزایش $k_{\max}$، درصد پوشش در اغلب موارد افزایش پیدا می کند. بعلاوه اینکه درصدهای پوشش با مقادیر ثابت $k_{\max}$ و $\bar{k}$ و با افزایش p افزایش پیدا می کند.

۲- با مقادیر ثابت p و $k_{\max}$ و با افزایش $\bar{k}$ ، درصد های پوشش در اغلب موارد افزایش پیدا می کند ولی در برخی از موارد نیز با کاهش درصد پوشش مواجه می شویم. این امر به دلیل فرم خاص μ انتخاب شده وهمینطور وجود قید هزینه در مساله می باشد.

۳- هر چند بکارگیری جستجوی محلی در برخی از موارد موجب بهبود درصد های پوشش می شود ولی بازهم تضمینی برای بهینگی جواب های بدست آمده وجود ندارد. بعلاوه اینکه زمان اجرای الگوریتم در برخی از موارد نسبتا زیاد شده است.

۴- مراجع

[1] Beasley, J.,E.; "*distributing test problems by electronic mail"*. Journal of the Operational Research Society, vol 41, pp. 1069-1072, 2004.

[2] Lorena, L.,A.,N.; Senne, E.,L.,F.; "*Local Search Heuristic for Capacitated P- median Problems",* Networks and Spatial Economics, vol. 3(4), pp. 407-419, 2003.

[3] Marianov, V.; "*Location of multiple-server congestible facilities for maximizing expected demand, when services are non-essential*", Annals of Operations Research, vol. 123, pp. 125–141 , 2003.

[4] Marianov, V.; ReVelle, C.; "*The queuing maximal availability location problems: A model for the siting of emergency vehicles*", European Journal of Operational Research, vol. 93, pp. 110-120 ,1996.

[5] Marianov, V.; Rios, M.; "*A probabilistic quality of service constraint for a location model of switches in ATM communications networks*", Annals of Operations Research, vol. 96, pp. 237-243 ,2000.

[6] Marianov, V.; Serra, D.; "*Probabilistic, maximal covering location-allocation models for congested systems*", Journal of Regional Science, vol. 38(3), pp. 401-424 ,1998.

[7] Marianov, V.; Serra, D.; "*Location–allocation of multiple-server service centers with constrained queues or waiting times*", Annals of Operations Research, vol. 111, pp. 35–50 ,2002.

[8] Marianov, V.; Serra, D.; "*Location models for airline hubs behaving as M/D/c queues*", Computers & Operations Research, vol. 30, pp. 983-1003, 2003.

[9] Pasternack B.,A .; Drezner, Z.; "*A note on calculating steady state results for an M/M/k queuing system when The ratio of the arrival rate to the service rate is large*", Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences, vol. 2(2), pp. 201-203 , 1998.