ISME2011-1270

بررسی ارتعاشات پیچشی شفت‌های غیریکنواخت مخروطی با روش مدل‌سازی هیبریدی

انوشیروان فرشیدیان‌فر [۱]، امین ثقفی [۲]، سید یوسف احمدی بروغنی [۳]، ایمان ثقفی [۴]

[۱] دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، Farshid@um.ac.ir
[۲] دانشجوی دکتری مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، a.i.saghafi@gmail.com
[۳] استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، syahmadi@birjand.ac.ir
[۴] دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، me.i.saghafi@gmail.com

چکیده

این مقاله به بررسی و تحلیل ارتعاشات پیچشی شفت‌های غیریکنواخت مخروطی به روش مدل‌سازی هیبریدی [۱] می‌پردازد. روش هیبریدی یک روش تحلیلی و بر اساس روش مدل‌سازی به کمک المان‌های گسترده و متمرکز (DLMT) [۲] می‌باشد. ماتریس انتقال برای یک المان گسترده مخروطی محاسبه و در روش DLMT به کار گرفته می‌شود. ارتعاشات پیچشی چند سیستم تحلیل می‌گردد. برای بررسی صحت و دقت روش ارائه‌شده، نتایج عددی بدست آمده از این روش با نتایج روش‌هایی مانند روش اجزاء محدود و روش تحلیلی ارائه شده در مقالات دیگر مقایسه می‌گردد.

واژه های کلیدی

ارتعاشات پیچشی، مدلسازی هیبریدی، DLMT، ماتریس انتقال

۱- مقدمه

سیستم‌های دوار، امروزه بخش اعظم و بسیار مهمی از ماشین‌آلات و دستگاه‌های صنعتی را تشکیل می‌دهند. نظر به اهمیت و گستردگی کاربرد این سیستم‌ها، ملاحظات طراحی، بخصوص محاسبات ارتعاشی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

با توجه به اهمیت موضوع بسیاری از محققان به بررسی و تحلیل ارتعاشات پیچشی سیستم‌های دوار پرداخته‌اند. به عنوان مثال Koser و Pasin [1] و Chen [2]، ارتعاشات پیچشی محورهای دوار را با استفاده از روش‌های تحلیلی بررسی نموده‌اند. Chen و Wu [3]، Mohiuddin و Khulief [4]، Qing و Cheng [5]، Mohiuddin و Khulief [6] و Wu [7]، با استفاده از روش المان محدود (FEM) به بررسی ارتعاشات پیچشی محورها پرداختند. Yang و Wu [8]، نیز ارتعاشات پیچشی و عرضی محورهای دوار را با استفاده از روش ماتریس انتقال (TMM) بررسی کرده‌اند. Farshidianfar [9]، ارتعاشات پیچشی شفت‌های دوار را به روش هیبریدی، FEM و تحلیلی بررسی و با یکدیگر مقایسه نموده‌اند.

با توجه به موارد اشاره شده در فوق تنها مراجع [2,6,7]، تاثیرات یک شفت پیوسته با سطح مقطع غیریکنواخت را در نظر گرفته‌اند. در مرجع [2]، ارتعاشات پیچشی یک سیلندر با سطح مقطع متفاوت به صورت تحلیلی بررسی شده است. روش‌های تحلیلی با وجود اینکه از دقت بالایی برخوردارند لیکن تنها در موارد محدودی قابل استفاده‌اند. در مراجع [6] و [7]، پس از بدست آوردن ماتریس‌های سختی و جرمی محور مخروطی برای تحلیل ارتعاشات از روش FEM استفاده شده است. روش‌های عددی، نظیر FEM و TMM تقریبی بوده و دقت این روش‌ها بستگی به تعداد المان‌های در نظرگرفته شده در مدل مربوطه دارد.

در این مقاله از روش هیبریدی برای بررسی ارتعاشات پیچشی محورهای غیریکنواخت دارای المان‌های مخروطی استفاده می‌گردد. اساس این روش استفاده از مدل‌سازی المان‌های گسترده و متمرکز (DLMT) می باشد که نخستین بار توسط Whalley [10]، مطرح شد. این روش مشابه روش ماتریس انتقال می‌باشد با این تفاوت که از معادلات تحلیلی استفاده شده، بنابراین از هیچگونه تقریبی استفاده نمی‌گردد و جواب‌ها از دقت بالایی برخوردار می‌باشند.

این مقاله در ۵ بخش تنظیم شده است. در بخش دوم روش مدل‌سازی هیبریدی به اختصار معرفی می‌گردد. در بخش سوم ماتریس انتقال ارتعاشات پیچشی یک المان گسترده مخروطی محاسبه می‌گردند. در انتها نیز برای بررسی و کاربرد روش ارائه شده، ارتعاشات پیچشی چند سیستم مورد تحلیل قرار می‌گیرد و نتایج بدست آمده از این روش با نتایج مراجع دیگر مقایسه می‌گردد.

۲- مدل‌سازی هیبریدی

در این بخش روش مدل‌سازی هیبریدی جهت بررسی ارتعاشات پیچشی شفت‌های دوار، تشریح می‌گردد [9]. یک محور دوار را می‌توان ترکیبی از المان‌های گسترده و متمرکز که بصورت سری در کنار یکدیگر قرارگرفته و خروجی هر المان، ورودی المان دیگر را تشکیل می‌دهد، در نظر گرفت (شکل ۱). المان گسترده عمومًا محور شفت و المان متمرکز نیز شامل اجزا و قطعاتی می‌باشد که بر روی محور قرار می‌گیرند. در این مدل، برای هر المان گسترده و متمرکز معادلات ارتعاشی مربوطه استخراج و بصورت ماتریس‌های مجزا به فرم کلی زیر ارائه می‌گردند.

$$\{Z\}_i = [H]_i \{Z\}_{i-1} \tag{۱}$$

---

[۱] hybrid modeling
[۲] Distributed Lumped Modeling Technique (DLMT)

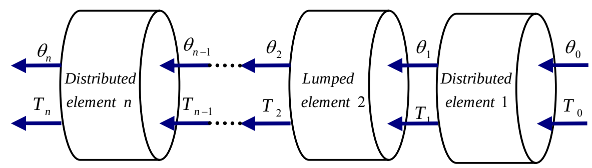
ماتریس‌های ستونی $\{Z\}_i$ و $\{Z\}_{i-1}$ بردارهای حالت بوده که در تحلیل ارتعاشات پیچشی شامل متغییرهای زاویه‌ی پیچش (θ) و گشتاور پیچشی (T) می‌باشند. ماتریس $[H]_i$ ماتریس انتقال المان i ام می‌باشد. با بسط رابطه فوق برای المان اول و دوم، داریم:

$$\{Z\}_1 = [H]_1 \{Z\}_0$$
$$\{Z\}_2 = [H]_2 \{Z\}_1 = [H]_2 [H]_1 \{Z\}_0 \qquad (۲)$$

و به طور مشابه برای المان n ام نیز خواهیم داشت:

$$\{Z\}_n = [H]_n [H]_{n-1} \ldots [H]_2 [H]_1 \{Z\}_0 = [H]\{Z\}_0 \qquad (۳)$$

$[H]$ ماتریس انتقال کل سیستم می‌باشد. طبق رابطه (۳) مشخصات سیستم با توجه به شرایط مرزی ابتدا و انتهای آن مشخص می‌گردد. در بخش بعد ماتریس انتقال المان گسترده مخروطی محاسبه و در تحلیل به روش هیبریدی به کار گرفته می‌شود.



شکل ۱: محور دوار به صورت ترکیبی از المان های گسترده و متمرکز

۳- ماتریس انتقال المان گسترده‌ی مخروطی

در این بخش ماتریس انتقال برای ارتعاشات پیچشی یک المان گسترده مخروطی استخراج می‌گردد. معادله ارتعاشات پیچشی یک محور غیر یکنواخت به صورت زیر می باشد [11] :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\tilde{\theta}(x,t)}{\partial x}\right] + M_t(x,t) = I(x)\frac{\partial\tilde{\theta}^2(x,t)}{\partial t^2} \qquad (۴)$$

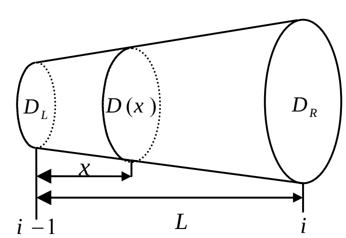
که G مدول برشی، $J(x)$ ممان اینرسی سطحی و $I(x)$ ممان اینرسی جرمی واحد طول محور در موقعیت x می‌باشد. $\tilde{\theta}(x,t)$ زاویه پیچش سطح مقطع و $M_t(x,t)$ لنگر پیچشی خارجی بر واحد طول محور می‌باشد. برای گشتاور خارجی صفر معادله به صورت زیر باز نویسی می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\tilde{\theta}(x,t)}{\partial x}\right] = I(x)\frac{\partial\tilde{\theta}^2(x,t)}{\partial t^2} \qquad (۵)$$

شکل (۲) المان یک محور مخروطی را نشان می‌دهد. D_L، D_R و l به ترتیب قطر سمت چپ، قطر راست و طول کل المان مخروطی می‌باشد. برای قطر المان در موقعیت x داریم.

$$D(x) = D_L(1-(\alpha x / l)) \qquad (۶)$$

α شیب المان و به صورت $\alpha = (D_L - D_R)/D_L$ می‌باشد.



شکل ۲: المان گسترده یک محور مخروطی

$I(x)$ و $J(x)$ برای این المان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J(x) = \frac{1}{32}\pi D(x)^4 = \frac{\pi D_L^4}{32}[1-\alpha(\frac{x}{l})]^4$$
$$I(x) = \frac{1}{2}m(x)(\frac{D(x)}{2})^2 = \frac{\rho\pi D_L^4}{32}[1-\alpha(\frac{x}{l})]^4 \qquad (۷)$$

که ρ چگالی و $m(x)$ جرم واحد طول می‌باشد. برای حل معادله (۵) با استفاده از روش تفکیک متغیرها با فرض جواب معادله به صورت $\tilde{\theta}(x,t) = \theta(x)q(t)$ و با در نظرگرفتن حرکت هارمونیک برای پاسخ مسئله داریم:

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{dt^2} = -\omega^2\theta(x)q(t) \qquad (۸)$$

با جایگذاری روابط (۷) و (۸) در معادله (۵) داریم:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - (\frac{4\alpha}{l-\alpha x})\frac{d\theta}{dx} + \beta^2\theta(x) = 0 \qquad (۹)$$

که $\beta^2 = \rho\omega^2/G$. معادله فوق با تغییر متغیر $X = \beta((l-\alpha)/\alpha$، به صورت زیر ساده می‌گردد.

$$X\frac{d^2\theta}{dX^2} + 4\frac{d\theta}{dX} + X\theta = 0 \qquad (۱۰)$$

معادله (۱۰) شکل کلی معادله بسل می‌باشد که جواب این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta(X) = c_1 X^{-3/2} J_{-3/2}(X) + c_2 X^{-3/2} J_{3/2}(X)$$
$$\theta(x) = (\beta(\frac{l}{\alpha}-x))^{-\frac{3}{2}}[c_1 J_{-\frac{3}{2}}(\beta(\frac{l}{\alpha}-x)) + c_2 J_{\frac{3}{2}}(\beta(\frac{l}{\alpha}-x))] \qquad (۱۱)$$

رابطه بین تغییر زاویه و لنگر پیچشی یک محور به صورت $T(x) = GJ(x)(\partial\theta(x)/\partial x)$ می‌باشد. برای مشتق $\theta(x)$ داریم:

$$\frac{\partial\theta(x)}{\partial x} = -\beta\frac{\partial\theta(X)}{\partial X} =$$
$$-\beta(c_1 X^{-\frac{3}{2}} J_{-\frac{5}{2}}(X) - c_2 X^{-\frac{3}{2}} J_{\frac{5}{2}}(X)) =$$
$$-\beta^2(\frac{l}{\alpha}-x))^{-\frac{3}{2}}[c_1 J_{-\frac{5}{2}}(\beta(\frac{l}{\alpha}-x)) - c_2 J_{\frac{5}{2}}(\beta(\frac{l}{\alpha}-x))] \qquad (۱۲)$$

در نتیجه لنگر پیچشی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T(x) = \frac{-G\beta\pi D_L^4}{32}(1-\alpha\frac{x}{l})^4(\beta(\frac{l}{\alpha}-x))^{-\frac{3}{2}}$$
$$\times[c_1 J_{-\frac{5}{2}}(\beta(\frac{l}{\alpha}-x)) - c_2 J_{\frac{5}{2}}(\beta(\frac{l}{\alpha}-x))] \qquad (۱۳)$$

معادلات (۱۱) و (۱۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر ارائه نمود:

$$\begin{Bmatrix}\theta(x)\\T(x)\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\end{Bmatrix} \Rightarrow \{Z(x)\} = \left[\tilde{H}(x)_{td}\right].\{C\} \qquad (۱۴)$$

$$b_{11} = (\beta((l/\alpha)-x))^{-3/2} J_{-3/2}(\beta((l/\alpha)-x))$$
$$b_{12} = (\beta((l/\alpha)-x))^{-3/2} J_{-3/2}(\beta((l/\alpha)-x))$$
$$b_{21} = (\beta((l/\alpha)-x))^{-3/2}\frac{-G\beta\pi D_L^4}{32}(1-\alpha\frac{x}{l})^4 J_{-5/2}(\beta((l/\alpha)-x))$$
$$b_{22} = (\beta((l/\alpha)-x))^{-3/2}\frac{G\beta\pi D_L^4}{32}(1-\alpha\frac{x}{l})^4 J_{5/2}(\beta((l/\alpha)-x))$$

$\{Z(x)\}$ بردار حالت و $\{C\}$ بردار ضرایب می‌باشد. برای المان مخروطی شکل (۲) برای گره $i-1$ ($x=0$)، بردار حالت $\{Z(0)\}=\{Z_{i-1}\}$ می‌باشد. در نتیجه طبق رابطه (۱۴) داریم:

$$\{Z_{i-1}\}=\left[\tilde{H}(0)_{td}\right].\{C\}\Rightarrow\{C\}=\left[\tilde{H}(0)_{td}\right]^{-1}.\{Z_{i-1}\}$$

با جایگذاری بردار ضرایب $\{C\}$ در رابطه (۱۴)، بردار حالت $\{Z(x)\}$ به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\{Z(x)\}=\left[\tilde{H}(x)_{td}\right].\left[\tilde{H}(0)_{td}\right]^{-1}.\{Z_{i-1}\} \qquad (۱۵)$$

در نقطه $x=l$، بردار حالت $\{Z(l)\}=\{Z_i\}$خواهد بود که با جایگذاری در رابطه (۱۵) به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\{Z_i\}=\left[\tilde{H}(l)_{td}\right].\left[\tilde{H}(0)_{td}\right]^{-1}.\{Z_{i-1}\}=\left[H_{td}\right]_i.\{Z_{i-1}\} \qquad (۱۶)$$

$[H_{td}]_i$ ماتریس انتقال المان گسترده مخروطی در روش هیبریدی یا DLMT می‌باشد. ماتریس انتقال ارتعاشات پیچشی برای المان گسترده محور یکنواخت به صورت زیر می‌باشد [11,12].

$$\left[H_{ud}\right]_i=\begin{bmatrix}\cos(\beta \mathrm{L}) & \sin(\beta \mathrm{L})/\mathrm{GJ}\beta \\ -\mathrm{GJ}\beta\sin(\beta \mathrm{L}) & \cos(\beta \mathrm{L})\end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

برای المان متمرکز ماتریس انتقال به صورت حاصلضرب دو ماتریس نقطه و میدان به صورت ارائه می‌گردد [11,12].

$$\left[H_l\right]_i=\left[H_p\right]_i.\left[H_f\right]_i=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\omega^2 J & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1/K_i\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

۴- نتایج عددی

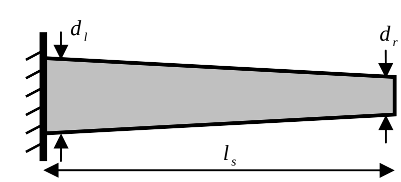
این بخش با ارائه چند مثال، به کاربرد روش DLMT درتحلیل ارتعاشات پیچشی محورهای غیریکنواخت مخروطی می‌پردازد. نتایج بدست آمده، با نتایج سایر روش‌ها از جمله روش FEM و روش تحلیلی مقایسه می‌گردند

۴-۱- محور مخروطی یک سرگیردار

شکل (۳) یک محور مخروطی یک سرگیردار را نشان می‌دهد. خواص فیزیکی و هندسی محور در جدول (۱) لیست شده‌اند.

جدول ۱: خواص فیزیکی و هندسی محور مخروطی

مدول برشی	$G=8.01\times10^{10}\,N/m^2$
چگالی	$\rho_s=7820\,kg/m^3$
طول محور	$l_s=1.8m$
قطر چپ محور	$d_l=0.045m$
قطر راست محور	$d_r=0.03686m$



شکل ۳: محور مخروطی یک سردرگیر

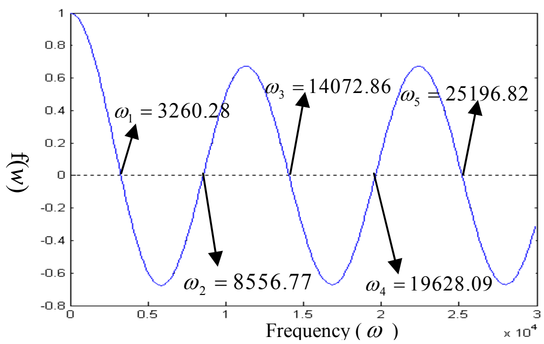
با توجه به روش مدل‌سازی هیبریدی این شفت شامل یک المان گسترده مخروطی می‌باشد. شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\theta\\ T\end{Bmatrix}_{x=0}=\begin{Bmatrix}0\\ T(0)\end{Bmatrix},\qquad \begin{Bmatrix}\theta\\ T\end{Bmatrix}_{x=L}=\begin{Bmatrix}\theta(l)\\ 0\end{Bmatrix}$$

با توجه به رابطه (۱۶) و با اعمال شرایط مرزی، داریم:

$$\{Z_1\}=\left[H_{td}\right]_1.\{Z_0\}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\theta(l)\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ T(0)\end{Bmatrix}$$

در معادله فوق شرط وجود جواب $a_{22}=f(\omega)=0$ می‌باشد. معادله فرکانسی سیستم $a_{22}=f(\omega)$ در شکل(۴) رسم شده است. چهار فرکانس طبیعی اول که از حل $a_{22}=0$ بدست می‌آیند در جدول (۲) لیست شده اند. مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از مرجع [7] (FEM)، بیانگر صحت و دقت این روش می‌باشد.



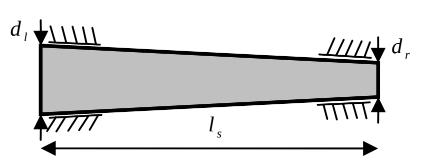
شکل ۴: معادله فرکانسی سیستم مخروطی یک سر درگیر

جدول ۲: چهار فرکانس اول محور مخروطی یک سردرگیر

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
DLMT	3260.28	8556.77	14072.86	19628.09
مرجع [7]	3260.32	8557.58	14076.53	19638.06

۴-۲- محور مخروطی دوسر آزاد

به عنوان دومین مثال یک محور مخروطی دو سر آزاد بررسی می‌گردد (شکل ۵). $d_l=0.041m$ و $d_r=0.05125m$ به ترتیب قطر سمت چپ و راست می‌باشد. سایر مشخصات مشابه مثال قبل است. جدول (۳) چهار فرکانس اول سیستم را نشان می‌دهد. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از مراجع [2,6,7] مطابقت دارد.



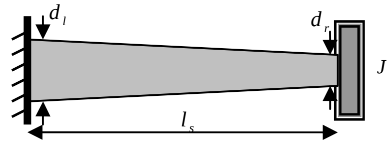
شکل ۵: محور مخروطی دو سر آزاد

جدول ۳: چهار فرکانس اول محور مخروطی دو سر آزاد

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
DLMT	0	49.5669	02.11214	84.16785
مرجع [7]	0	15.5670	16.11219	15.16803
مرجع [2]	0	77.5666	49.11208	57.16777
مرجع [6]	0	14.5670	15.11219	12.16803

۴-۳- محور مخروطی یک سرگیردار با جرم متمرکز

شکل (۶) یک محور یک سر گیردار مخروطی با یک دیسک در انتهای آن را نشان می‌دهد. مشخصات محور مشابه مثال اول می‌باشند. ممان اینرسی دیسک $J = 3.904\times10^{-3}\,kgm^2$ است. در مدلسازی هیبریدی، شفت مخروطی به صورت یک المان گسترده و دیسک انتهایی به صورت یک المان متمرکز در نظر گرفته می‌شوند. جدول (۴)، چهار فرکانس طبیعی اول سیستم را نشان می‌دهد.



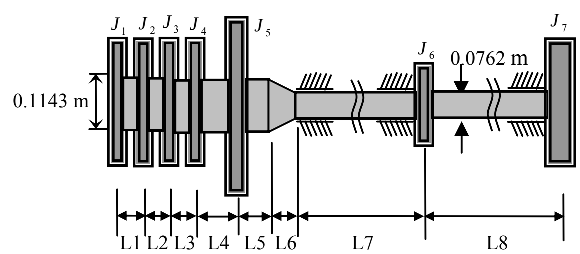
شکل ۶ : محور مخروطی با جرم انتهایی

جدول ۴: چهار فرکانس اول محور مخروطی با جرم انتهایی

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
DLMT	1573.3	5956.81	11365.03	16887.52
مرجع [7]	1573.39	5957.49	11370.22	16904.89

۴-۴- محور انتقال یک ژنراتور

به منظور نشان دادن کارایی و کاربرد روش مذکور، شفت انتقال یک ژنراتور (شکل ۷) مورد تحلیل قرار می‌گیرد. این شفت ترکیبی از المان های گسترده و متمرکز می‌باشد. مشخصات فیزیکی و هندسی این شفت در جدول (۵) لیست شده است. جدول (۶)، چهار فرکانس طبیعی اول این سیستم را نشان می‌دهد.



شکل ۷ : محور انتقال یک ژنراتور

جدول ۵: مشخصات فیزیکی و هندسی محور ژنراتور

مدول برشی	$G = 8.01\times10^{10}\,N/m^2$
چگالی	$\rho_s = 7820\,kg/m^3$
ممان اینرسی دیسک ۱، ۲، ۳، ۴	$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0.0308\,kgm^2$
ممان اینرسی دیسک ۵	$J_5 = 1.4322\,kgm^2$
ممان اینرسی دیسک ۶	$J_6 = 0.0279\,kgm^2$
ممان اینرسی دیسک ۷	$J_7 = 0.4894\,kgm^2$
طول محورها	$L1 = L2 = L3 = 0.1016m$ $L4 = 0.1270, L5 = 0.1194$ $L6 = 0.1169, L7 = 1.143, L8 = 1.397$

جدول ۶: چهار فرکانس اول محور انتقال ژنراتور

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
DLMT	0	509.87	2843.28	6205.82
مرجع [7]	0	510.41	2845.85	6211.09

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

روش هیبریدی یا DLMT به عنوان یک روش تحلیلی قوی در مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده ارتعاشی دارای المان‌های غیریکنواخت مخروطی به کار گرفته شد. ماترس انتقال برای المان گسترده مخروطی به صورت تحلیلی استخراج و در روش DLMT به‌کار گرفته شد. مقایسه نتایج بدست آمده از روش DLMT با نتایج حاصل از روش‌های دیگر بیانگر صحت و دقت روش مذکور می‌باشد. دقت و قدرت بالای مدل‌سازی و سادگی کاربرد برای هر محور و هر شرایط مرزی از مزایای این روش می‌باشد.

مراجع

[1] Koser, K., Pasin, F., 1997. Torsional vibrations of the drive shafts of mechanisms. *J. Sound Vib*., 199, 559– 565.

[2] Chen, Y.Z., 2001. Torsional free vibration of a cylinder with varying cross-section and adhesive masses. *J. Sound Vib*., 241, (3), 503–512.

[3] Wu, J.S., Chen, C.H., 2001. Torsional vibration analysis of gear-branched systems by finite element method. *J. Sound Vib.,* 240, 159–182.

[4] Khulief, Y.A., Mohiuddin, M.A., 1997. On the dynamic analysis of rotors using modal reduction. *Finite Elements in Analysis and Design*, 26, 41–55.

[5] Qing, H.Q., Cheng, X.M., 1996. Coupled torsional-flexural vibration of shaft systems in mechanical engineering—I. *Finite Element Model, Computers & Structures*, 58, 835–843.

[6] Mohiuddin, M.A., Khulief, Y.A., 1994. Modal characteristics of rotors using a conical shaft finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115, 125–144.

[7] Wu, J.Jang., 2007. Torsional vibration analyses of a damped shafting system using tapered shaft element. *J. Sound Vib.,* 306, 946–954.

[8] Wu, J.S., Yang, I.H., 1995. Computer method for torsion-and-flexure-coupled forced vibration of shafting system with damping. *J. Sound Vib*., 180, (3), 417–435.

[9] Farshidianfar, A, Dalir, H.,Shayan Amin, S., 2003. Frequency investigation of rotating rotors torsional vibration using hybrid modeling technique. *Proceedings of Annual Conference of Manufacturing Engineering, Tehran, Amirkabir University*.

[10] Whalley, R., 1988. The response of Distributed-Lumped parameter system. *proc.IMechE*, 202,No.C6, 421-428 .

[11] Meirovitch, L., 1967. *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan, Company, London.

[12] Thomson, W.T., 1988. *Theory of Vibration with application*. Prentice-Hall, 3 rd ed..