

بررسی دوشاخه‌شدگی و آشوب در سیستم ارتعاشات غیرخطی چرخنده‌ای با استفاده از روش بالانس هارمونیک افزاینده (IHB)

انوشیروان فرشیدیان^۱، امین ثقفی^۲، ایمان ثقفی^۳

^۱ دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، Farshid@um.ac.ir

^۲ دانشجوی دکتری مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، a.i.saghafi@gmail.com

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، me.i.saghafi@gmail.com

چکیده

این پژوهش به بررسی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی چرخنده‌ای و بیان پدیده دوشاخه‌شدگی^۱ و آشوب^۲ در اینگونه از سیستم‌های غیرخطی می‌پردازد. یک مدل دینامیکی از سیستم چرخنده‌ای با در نظر گرفتن عامل غیر خطی لقی ارائه و روش بالانس هارمونیک افزاینده^۳ (IHB) برای بررسی پاسخ معادلات مربوطه به کار گرفته می‌شود. نتایج بدست آمده از پاسخ دینامیکی سیستم بیانگر رفتار دوشاخه‌شدگی و آشوب به ازای برخی از پارامترهای سیستم می‌باشد. این رفتار در نمودارهای دوشاخه‌شدگی ارائه می‌گردد. همچنین پاسخ زمانی سیستم، نمودار صفحه- فاز و نگاشت پوانکاره نیز برای نمایش این پدیده‌ها بیان می‌شود. برای تصدیق صحت روش IHB نتایج بدست آمده با حل عددی نیز مقایسه می‌گردند.

واژه‌های کلیدی

دوشاخه‌شدگی، آشوب، بالانس هارمونیک، ارتعاشات چرخنده

مقدمه

سیستم‌های چرخنده‌ای از مهمترین اجزای مکانیکی می‌باشند. در زمینه دینامیک غیرخطی چرخنده‌ها تحقیقات گسترده‌ای صورت پذیرفته است. Ozguven [1]، به طور جامع به بررسی مدل‌های ریاضی و دینامیک چرخنده‌ها پرداخته است. با پیشرفت دینامیک غیرخطی، مشخصه‌های غیرخطی سیستم از قبیل پاسخ‌های پرریز، دوشاخه‌شدگی و آشوب مورد توجه بیشتری قرار گرفت. به این منظور روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشی برای بررسی پاسخ ارتعاشی چرخنده‌ها به کار گرفته شد. بعنوان مثال Comparin و Singh [2] و Padmanabhan و Singh [3]، از روش پرتوربیشن برای بررسی پایداری جواب‌ها استفاده کردند. Theodossiades [4]، نیز از روش multi-scale با تقریب مرتبه دوم برای بررسی ارتعاشات چرخنده‌ها استفاده کرد.

بر اساس تحقیقات Kamada, Sato و Takatsu [5]، که وقوع پدیده‌های پرش، نوسانات ساب و سوپر هارمونیک را یافتند،

Yamamoto و Kawakami [6]، یک مدل غیرخطی دارای لقی و سختی وابسته به زمان را ارائه و دوشاخه‌شدگی و همچنین پدیده‌های گذار آشوب را با استفاده از روش عددی بررسی کردند. Kahraman و Blankenship [7]، به صورت آزمایشی سیستم‌های چرخنده‌ای دارای لقی را بررسی نمودند. در نتایج بدست‌آمده، پدیده‌هایی شامل عدم پیوستگی در منحنی‌های پاسخ، رزونانس‌های ساب‌هارمونیک و سوپرهارمونیک، انشعابات و حرکت آشفته، مشاهده گردید. روش IHB نیز یک روش موثر برای حل معادلات غیرخطی می‌باشد. با استفاده از روش IHB [8, 9]، Narayanan و Raghothama [10]، سیستم چرخنده‌ای غیرخطی روتور- یاتاقان با لقی و سختی‌های درگیری متغیر با زمان را بررسی کردند.

با توجه به کارایی روش IHB، در این پژوهش نیز این روش به منظور بررسی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی چرخنده‌ای و بیان پدیده دوشاخه‌شدگی و آشوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. معادلات ارتعاشی برای یک مدل چرخنده‌ای دارای لقی استخراج و روش IHB برای بررسی پاسخ معادلات غیرخطی مربوطه به کار گرفته می‌شود. نمودار دوشاخه‌شدگی سیستم و همچنین پاسخ زمانی، نمودار صفحه- فاز و نگاشت پوانکاره نیز برای نمایش این پدیده‌ها بیان می‌گردد. برای بررسی دقت روش IHB، نتایج با نتایج عددی نیز مقایسه می‌گردند.

مدلسازی و استخراج معادلات حاکم

در این بخش یک مدل ارتعاشی برای سیستم چرخنده‌ای دارای لقی ارائه و معادلات غیرخطی حاکم استخراج می‌شود. برای مدل چرخنده نشان داده شده در شکل (۱)، گشتاور تحریک $T_e(t)$ اعمال شده به سیستم را می‌توان به دو جزء متوسط (T_m) و آشفستگی (T_p) با فرکانس ω_p به صورت سری فوریه زیر بیان نمود [11]:

$$T_e(t) = T_m + \sum_{j=1}^{\infty} T_{pj} \cos(j\omega_p t + \varphi_j) \quad (1)$$

معادلات حاکم بر سیستم نیز به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + r_1 [C(r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2) + K_f(r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2)] = T_e(t) \quad (2)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 - r_2 [C(r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2) - K_f(r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2)] = -T_D(t) \quad (3)$$

در این روابط θ_1 و θ_2 جابجایی زاویه‌ای، C ضریب دمپینگ و K سختی پیچشی دندانه می‌باشد. با جایگذاری شرایط اولیه $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$ و $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ ، داریم، $T_m = T_D$ ، با جمع r_1/I_1 برابر معادله‌ی اول با $-r_2/I_2$ برابر معادله‌ی دوم و جایگذاری $x = r_1\theta_1 - r_2\theta_2$ خواهیم داشت:

$$\ddot{x} + c \left(\frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2} \right) \dot{x} + k \left(\frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2} \right) f_s(x) = \frac{r_1 T_e}{I_1} + \frac{r_2 T_D}{I_2} \quad (4)$$

حال با تغییر متغیر $I = I_1 I_2 / (r_1^2 I_2 + r_2^2 I_1)$ داریم:

$$\ddot{x} + \frac{C}{I} \dot{x} + \frac{k}{I} f_s(x) = F(t) \quad (5)$$

$$= F_m + \sum_{j=1}^{\infty} F_{pj} \cos(j \omega_p t + \phi_j)$$

که $F_{pj} = T_{pj} (r_1/I_1)$ و $F_m = T_m (r_1/I_1 + r_2/I_2)$ ، $k f_s(x)$ نیروی فنر با در نظر گرفتن لقی b می‌باشد. $f_s(x)$ تابع پله‌ای خطی و به صورت زیر بیان می‌گردد [12]:

$$f_s(x) = \begin{cases} x - (1-\alpha)b & b < x \\ \alpha x & -b \leq x \leq b \\ x + (1-\alpha)b & b < -x \end{cases} \quad (6)$$

تقریب تابع $f_s(x)$ با یک تابع درجه‌ی سوم با در نظر گرفتن $\alpha = 0$ و $b = 0.1745$ ، به صورت $f_s(x) = -0.1422x + 5.8093x^3$ بدست می‌آید. معادله (5) با در نظر گرفتن یک ترم تحریک و جایگذاری تقریب بدست آمده، به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\ddot{x} + \hat{\mu}\dot{x} + \hat{k}(-0.1422x + 5.8093x^3) = \hat{F}_m + \hat{F}_p \cos \Omega t \quad (7)$$

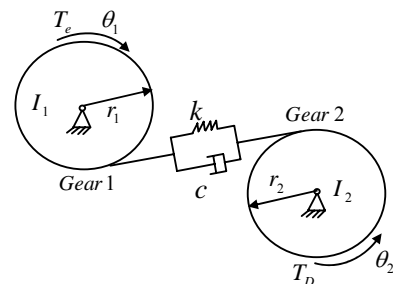
$\hat{\mu}$ متناظر با نسبت دمپینگ، \hat{k} متناظر با سختی می‌باشد. با تغییر متغیر $\tau = \Omega t$ رابطه (7) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\Omega^2 \ddot{x} + \hat{\mu}\dot{x} + \hat{k}(-0.1422x + 5.8093x^3) = \hat{F}_m + \hat{F}_p \cos \tau \quad (8)$$

یا

$$\Omega^2 \ddot{x} + \Omega \hat{\mu}\dot{x} + f(x) = F(\tau) \Rightarrow H(\ddot{x}, \dot{x}, x, \Omega, \tau) = 0 \quad (9)$$

در ادامه برای حل معادله فوق از روش IHB استفاده می‌گردد.



شکل ۱: مدل جفت چرخنده‌ی ساده

شمای کلی روش بالانس هارمونیک افزایشنده (IHB)

از آنجایی که روش بالانس هارمونیک افزایشنده در برخی از مقالات مانند [11-8] به کار گرفته شده است، در این قسمت فرمولاسیون

مربوطه به اختصار بیان می‌گردد. برای فرم کلی معادلات به شکل $H(\ddot{x}, \dot{x}, x, \Omega, \tau)$ پارامترهای x و Ω به صورت ترم‌های افزایشنده به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \Delta x(\tau) \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega \quad (10)$$

با جایگذاری روابط (10) در معادله (9) و پس از ساده‌سازی داریم:

$$\Omega_0^2 \frac{d^2 \Delta x}{d\tau^2} + \Omega_0 \hat{\mu} \frac{d \Delta x}{d\tau} + f'(x_0) \Delta x = R + \Delta \Omega P \quad (11)$$

$$R = -[\Omega_0^2 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \Omega_0 \hat{\mu} \frac{dx_0}{d\tau} + f(x_0) - F(\tau)]$$

$$P = -2\Omega_0 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} - \hat{\mu} \frac{dx_0}{d\tau}$$

جواب مسئله به صورت تابع پرریودیک به صورت زیر فرض می‌شود:

$$x(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\tau) + b_n \sin(n\tau)] \quad (12)$$

$$\Delta x = \Delta a_0 + \sum_{n=1}^N [\Delta a_n \cos(n\tau) + \Delta b_n \sin(n\tau)] \quad (13)$$

با در نظر گرفتن بردارهای مختصات کلی Δa_n و Δb_n و اعمال روش گالرکین برای رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi} [\Omega_0^2 \frac{d^2 \Delta x}{d\tau^2} + \Omega_0 \hat{\mu} \frac{d \Delta x}{d\tau} + f'(x_0) \Delta x] \delta(\Delta x) d\theta \quad (14)$$

$$= \int_0^{2\pi} [R + \Delta \Omega P] \delta(\Delta x) d\theta$$

بردار ضرایب $x(\tau)$ و بردار افزایشی آن به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n] \quad (15)$$

$$\Delta a = [\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_n, \Delta b_1, \dots, \Delta b_n]$$

با ساده‌سازی رابطه (14)، یک دستگاه معادلات خطی با $2N+1$

معادله دارای ترم های Δa_n و Δb_n به فرم زیر حاصل می‌گردد.

$$\tilde{C} \Delta a = \tilde{R} + \Delta \Omega \tilde{P} \quad (16)$$

برای بدست آوردن پاسخ مسئله مورد نظر پس از اعمال شرایط اولیه و با فرض اولیه از ضرایب $x(\tau)$ ، دستگاه معادلات برای هر مرحله به صورت زیر بازنویسی می‌گردد. برای ساده سازی بیشتر مسئله با ثابت نگه داشتن Ω از ترم افزایشنده آن صرف نظر می‌گردد.

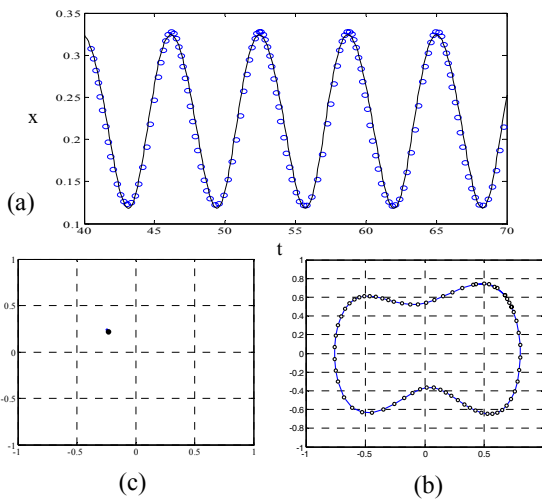
$$\tilde{C}^{(i)} \Delta a^{(i+1)} = \tilde{R}^{(i)} \quad a^{(i+1)} = a^{(i)} + \Delta a^{(i+1)} \quad (17)$$

پس از هر مرحله ضرایب جدید بردار a بدست آمده و برای مرحله بعد ضرایب جدید بردار a وارد می‌شود. با تکرار مراحل، ضرایب a به یک مقدار ثابت همگرا می‌شوند که ضرایب پاسخ مسئله می‌باشند.

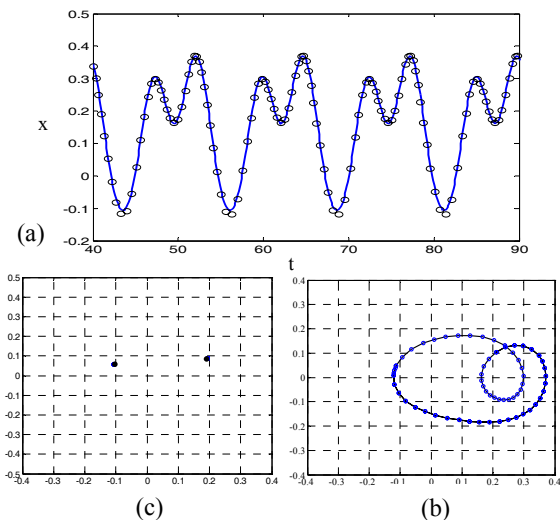
نتایج عددی

در این قسمت با استفاده از روش IHB به بررسی پاسخ سیستم چرخنده‌ای که با معادله‌ی (9) بیان شد، می‌پردازیم. در ابتدا نمودار دوشاخه‌شدگی برای سیستم مزبور رسم می‌گردد. با توجه به این نمودار، پدیده دوشاخه‌شدگی و آشوب قابل تشخیص می‌باشد. برای درک بهتر این رفتارها برای برخی از نقاط نمودار، پاسخ زمانی، نگاشت پوانکاره و نمودار صفحه- فاز ارائه می‌گردد. برای بررسی دقت روش IHB، حل عددی نیز ارائه و با نتایج حاصل مقایسه می‌گردند.

جواب به یک مقدار ثابت همگرا می‌شود که در نمودار صفحه فاز به صورت یک سیکل حدی و در نگاشت پوانکاره به صورت یک نقطه مشخص می‌باشد. نتایج حاصل از حل عددی در نمودارهای پاسخ زمانی و صفحه- فاز نشان دهنده دقت روش IHB می‌باشند. برای $F_p = 0.1$ با توجه به شکل (۲) سیستم دارای دو مقدار می‌باشد که این امر بیانگر وجود دو پرپود در پاسخ سیستم می‌باشد. در نمودار پاسخ زمانی، جواب به دو مقدار ثابت همگرا می‌شود که در نمودار صفحه فاز به صورت دو سیکل حدی و در نگاشت پوانکاره به صورت دو نقطه مشخص می‌باشد (شکل ۴). در شکل (۵) پاسخ برای $F_p = 0.1385$ بررسی شده است. با توجه به نمودار دوشاخه‌شدگی، سیستم دارای چهار مقدار می‌باشد. حل عددی معادلات در $F_p = 0.175$ بیانگر پاسخ آشفته سیستم می‌باشد، که این پدیده در شکل (۶) قابل رویت است. شکل (۷) نیز برای $F_p = 0.195$ وجود یک پاسخ با دو دامنه ثابت را تصدیق می‌کند.

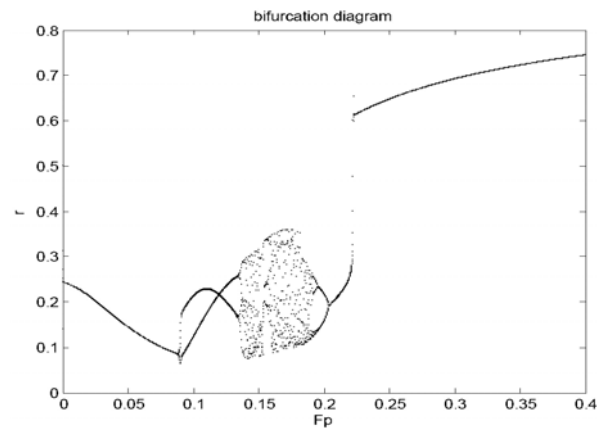


شکل ۳: (a) پاسخ زمانی، (b) نمودار صفحه- فاز، (c) نگاشت پوانکاره به ازای $F_p = 0.04$. (حل عددی 0، روش IHB --)



شکل ۴: (a) پاسخ زمانی، (b) نمودار صفحه- فاز، (c) نگاشت پوانکاره به ازای $F_p = 0.1$. (حل عددی 0، روش IHB --)

در بدست آوردن نمودار دوشاخه‌شدگی نیاز به تعیین پارامتر کنترل می‌باشد. هر کدام از پارامترهای متغیر در معادله می‌تواند به عنوان یک پارامتر کنترل انتخاب گردد. در این مسئله با در نظر گرفتن F_p به عنوان پارامتر کنترل و انتخاب $\hat{\mu} = 0.03$ ، $F_m = 0.05$ و $\Omega = 1$ نمودار دوشاخه‌شدگی مطابق شکل (۲) بدست می‌آید. با توجه به این شکل، سیستم در ابتدا دارای یک مقدار می‌باشد که بیانگر وجود یک جواب پرپودیک با دامنه ثابت است. با افزایش F_p در حدود 0.084 سیستم دوشاخه می‌گردد که اشاره به وجود دو پرپود مختلف در پاسخ سیستم دارد. با افزایش بیشتر F_p دوشاخه‌شدگی‌ها ادامه یافته تا سیستم دچار آشوب می‌شود و سپس در حدود 0.2 سیستم دوباره به حالت یک پرپودی باز می‌گردد. برای بررسی صحت این نمودار پاسخ زمانی، نمودارهای صفحه فاز و پوانکاره به ازای چند مقدار F_p ارائه می‌گردد. پاسخ سیستم برای مقادیر F_p برابر با 0.04، 0.1، 0.1385 و 0.195 با استفاده از روش IHB محاسبه می‌گردد. ضرایب بدست آمده برای پاسخ مسئله در جدول (۱) نشان داده شده است.



شکل ۲: نمودار دوشاخه‌شدگی با پارامتر کنترل F_p

جدول ۱: ضرایب پاسخ سیستم برای مقادیر مختلف F_p

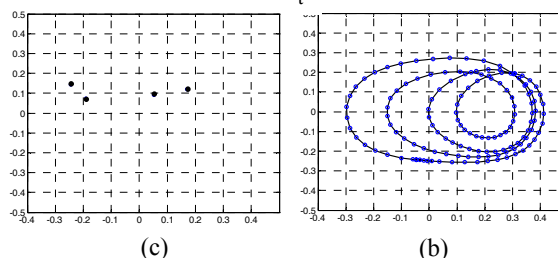
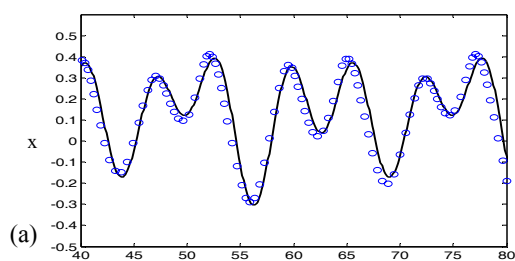
ضرایب پاسخ سیستم با روش IHB	F_p
$a_0 = 0.2231$ $a_1 = -0.065, a_2 = -0.0024, a_3 = 0.003$ $b_1 = 0.0799, b_2 = 0.0054, b_3 = 0.0002$	0.04
$a_0 = 0.1535$ $a_1 = 0.1665, a_2 = -0.1075, a_3 = -0.01511$ $b_1 = -0.01483, b_2 = 0.07223, b_3 = 0.02051$	0.1
$a_0 = 0.1211$ $a_1 = 0.0097, a_2 = 0.1614, a_3 = 0.0385, a_4 = -0.2007$ $b_1 = -0.0261, b_2 = 0.0041, b_3 = 0.0341, b_4 = 0.0524$	0.1385
$a_0 = 0.0853$ $a_1 = 0.0527, a_2 = -0.2518, a_3 = -0.0061$ $b_1 = -0.0029, b_2 = 0.1029, b_3 = 0.0009$	0.195

با توجه به شکل (۲)، به ازای $F_p = 0.04$ نمودار دارای یک مقدار می‌باشد. در شکل (۳) پاسخ زمانی، نمودار صفحه فاز و همچنین نگاشت پوانکاره مربوطه رسم شده است. با توجه به پاسخ زمانی،

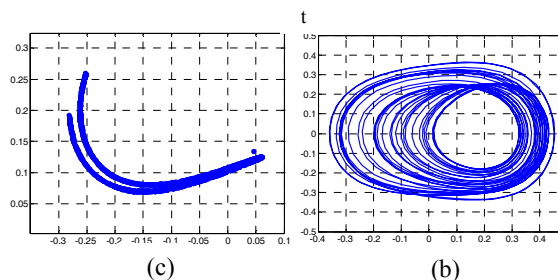
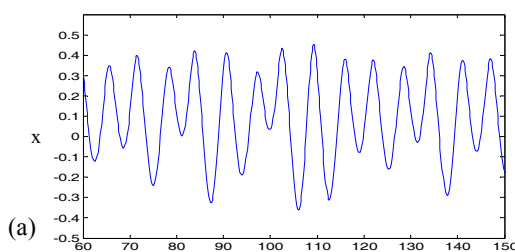
ترسیم و پدیده‌هایی مانند دوشاخه‌شدگی و آشوب در این سیستم ارتعاشی غیرخطی بررسی شد. نتایج حاصل از روش IHB با نتایج بدست آمده از حل عددی مقایسه گردید. مشاهده شد که در بازه‌های خاصی از ارتعاش، سیستم دارای پاسخی با چند دامنه حرکت و یا ارتعاشی آشفته می‌شود. طراحی و انتخاب پارامترها با توجه به این نمودارها و برای حذف و کنترل آشوب، صورت می‌پذیرد.

مراجع

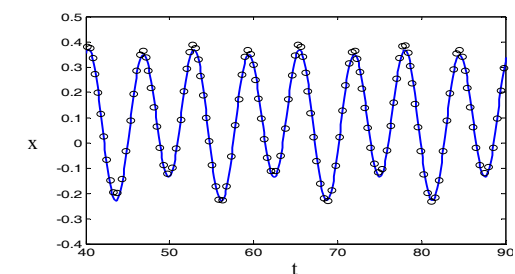
- [1] Ozguven HN., Houser DR. 1988, "Mathematical models used in gear dynamics—a review". *J. Sound Vib.*, 121(3), 383–411.
- [2] Comparin, R.J. Singh, R. 1990, "Frequency response characteristics of a multi-degree-of freedom system with clearances", *J. Sound Vib.* 142(1), 101–124.
- [3] Padmanabhan, C. Singh, R. 1992, "Spectral coupling issues in a two-degree-of freedom system with clearance non-linearities", *J. Sound Vib.* 155(2), 209–230.
- [4] Theodossiadis S, Natsiavas S. 2000, "Nonlinear dynamics of gear-pair systems with backlash". *J. Sound Vib.* 229(2), 287–310.
- [5] Sato, K. Kamada, O. Takatsu, N. 1979, "Jump phenomena in geared system to random excitation", *Bull. JSME*, 28, 1271–1278.
- [6] Sato, K. Yamamoto, S. Kawakami, T. 1991, "Bifurcation sets and chaotic states of a geared system subjected to harmonic excitation", *Computational Mech., Berlin* 7, 173–182.
- [7] Kahraman, A. Blankenship, G.W. 1997, "Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters", *ASME J. Appl. Mech.* 64, 217–226.
- [8] Wong, C.W. Zhang, W.S. Lau, S.L. 1991, "Periodic forced vibration of unsymmetric piecewise-linear system by incremental harmonic balance method", *J. Sound Vib.* 149, 91–105.
- [9] Lau, S.L. Zhang, W.S. 1992, "Non-linear vibrations of piecewise linear systems by incremental harmonic balance method", *ASME J. Appl. Mech.* 59, 153–160.
- [10] Raghothama, A. Narayanan, S. 1999, "Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method", *J. Sound Vib.* 226(3), 469–492.
- [11] Kim, T.C. Rook, T.E. Singh, R. 2005, "Super- and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method", *J. Sound Vib.* 281, 965–993.
- [12] Kim, T.C. Rook, T.E. Singh, R. 2002, "Effect of smoothening function on the frequency response of an oscillator with clearance non-linearity", *J. Sound Vib.* 263, 665–678.



شکل ۵: (a) پاسخ زمانی، (b) نمودار صفحه-فاز، (c) نگاشت پوانکاره به ازای $F_p = 0.1385$. (حل عددی 0، روش IHB --)



شکل ۶: (a) پاسخ زمانی، (b) نمودار صفحه-فاز، (c) نگاشت پوانکاره به ازای $F_p = 0.175$. (حل عددی --)



شکل ۷: پاسخ زمانی به ازای $F_p = 0.195$. (حل عددی 0، روش IHB -)

نتیجه‌گیری

در این پژوهش روش بالانس هارمونیک افزایشده (IHB) برای حل معادلات غیرخطی یک سیستم چرخنده‌ای دارای لقی، استفاده گردید. نمودار دوشاخه‌شدگی سیستم با توجه به پارامتر کنترل