چکیده مبسوط چهل و یکمین کنفرانس ریاضی ایران
۲۱–۲۴ شهریور ۱۳۸۹، دانشگاه ارومیه

رهیافتی نو برای بدست آوردن نقاط تعادل یک سیستم دینامیکی

علی وحیدیان کامیاد
مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد ، دانشکده ریاضی، *avkamyad@yahoo.com*
مهران مازندرانی
مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه برق ، *me.mazandarani@gmail.com*

چکیده

تعیین نقاط تعادل سیستم های دینامیکی اهمیت بسیار زیادی دارد به خصوص در تعیین پایداری سیستم های دینامیکی و ناحیه جذب،که در نظریه کنترل نقش بسزایی دارند،واز سویی دیگر تعیین این نقاط در سیستم های غیرخطی چند ورودی چند خروجی به مراتب مشکل تر از سیستم های خطی می باشد. در این مقاله قصد داریم رهیافتی نو،برای بدست آوردن کلیه نقاط تعادل دستگاه معادلات جبری غیرخطی هموار را مورد مطالعه قرار دهیم . بر اساس این رهیافت، مسئله بدست آوردن نقاط تعادل یک سیستم دینامیکی با استفاده از تغییر متغیر مناسب که آنها را متغیرهای کنترلی اختیار می کند به یک سیستم ساده تر منجر می گردد که نقاط تعادل را به صورت تقریبی بدست می دهد.

واژه های کلیدی: نقاط تعادل ،برنامه ریزی غیرخطی ،سیستم های دینامیکی .
رده بندی موضوعی: ۳۷N۳۰ ، ۴۹M۳۷ .

۱ مقدمه

در بحث پایداری تعیین کلیه نقاط تعادل سیستم های دینامیکی بسیار اهمیت دارد در این مقاله قصد داریم با رهیافتی نو،تعیین نقاط تعادل یک سیستم دینامیکی را مورد مطالعه قرار دهیم . در مقالات متعدد روش های مختلفی، برای بدست آوردن نقاط تعادل استفاده شده است اما هریک بنا به دلیلی در بدست آوردن نقاط تعادل ضعف دارند به عنوان مثال [۲] تنها بدست آوردن نقاط تعادل توابع خاصی را مورد بررسی قرار داده است، روش استفاده شده در [۳] تضمین نمی کند که هواره به نقطه تعادل همگرا شود و تمامی نقاط تعادل را بتواند بدست آورد [۴]،و یا روش استفاده شده در [۱],[۴] قیود و پیچیدگی زیادی را در بدست آوردن نقاط تغادل شامل می شوند.یکی از روش های حل دستگاه معادلات جبری آنست که به کمک تغییر متغیر می توان دستگاه معادلات را ساده تر حل کرد در این مقاله قصد داریم رهیافتی نو را معرفی کنیم که به کمک آن بتوان تغییر متغیر مناسب را برگزید و بااستفاده از این نوع تغییر متغیر،که ذر واقع متغیرهای کنترل مصنوعی می باشند،چگونگی بدست آوردن ریشه های دستگاه معادلات جبری غیرخطی را مورد بررسی قرار دهیم.

۲ بیان مسئله‌و ارائه رهیافت نو برای بدست آوردن نقاط تعادل

۱.۲ لم. کلیه جواب‌های دستگاه (۱) از حل تنها یک معادله (۲) بدست می آیند.

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f_i : R^k \longrightarrow R \\ i=1,\ldots,n \end{array}\right. \qquad (1) \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} {f_i}^2(x)=0 \\ f_i : R^k \longrightarrow R \end{array}\right. \qquad (2)$$

برهان. فرض می‌کنیم $x=(x_1,\ldots,x_k)$ یک ریشه دستگاه معادله (۱) باشد یعنی :

$$f_1(x_1,\ldots,x_k)=0,\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_k)=0$$

پس داریم که:

$${f_1}^2(x_1,\ldots,x_k)=0,\ldots,{f_n}^2(x_1,\ldots,x_k)=0$$

و

$${f_1}^2(x_1,\ldots,x_k)+\ldots+{f_n}^2(x_1,\ldots,x_k)=0$$

یعنی $x = (x_1, \ldots, x_k)$ یک ریشه معادله (۲) نیز می‌باشد.

بالعکس فرض می کنیم $x = (x_1, \ldots, x_k)$ یک ریشه معادله (۲) باشد یعنی :

$$\sum_{i=1}^{n} {f_i}^2(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

چون در حالت کلی $0 \geq {f_i}^2(x_1, \ldots, x_k)$ بنابراین معادله بالا هنگامی برقرار است که $0 = {f_1}^2(x_1, \ldots, x_k)$ و... و $0 = {f_n}^2(x_1, \ldots, x_k)$ که این خود بیانگر آنست که $0 = f_1(x_1, \ldots, x_k)$ و... و $0 = f_n(x_1, \ldots, x_k)$ پس $x = (x_1, \ldots, x_k)$ یک ریشه دستگاه معادلات (۱) است.

□

۲.۲ قضیه. جواب دستگاه معادلات (۱) را می توان از حل مسئله حساب تغییرات (۳) بدست آورد .

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f_i : R^k \longrightarrow R \\ i = 1, \ldots, n \qquad (1) \end{cases}$$

$$\min_{u_1(t), \ldots, u_k(t)} \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{n} 2{f_i}^2(u_1(t), \ldots, u_k(t)) \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(u_1(t), \ldots, u_k(t)).\frac{du_1}{dt} + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(u_1(t), \ldots, u_k(t)).\frac{du_k}{dt} \right] \right\} dt \qquad (3)$$

برهان.اثبات قضیه در مقاله مشروح آمده است . □

۳ گسسته سازی

گسسته سازی مسئله (۳) بدین صورت می باشد که ابتدا بازه $t \in [a, b]$ را به m زیر بازه متساوی افراز می کنیم وسپس مشتق را به صورت زیر تقریب می زنیم

$$\delta t = \frac{b-a}{m}$$

$$\frac{du_l(t)}{dt} \cong \frac{u_l(t+\delta t)-u_l(t)}{\delta t} \qquad l=۱,\dots,kj=۱,\dots,m$$

و بااستفاده از تعریف زیر

$$u_{l,j}=u_l\left(\frac{j(b-a)}{m}\right)$$

مسئله (۳) به صورت (۴)،که یک مسئله حساب تغییرات است و می توان آنرا با استفاده از برنامه ریزی غیرخطی حل نمود در می آید

$$\min_{u_{۱,j},\dots,u_{k,j}} c+\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{n}\left\{f_i(u_{۱,j},\dots,u_{k,j})\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_۱}(u_{۱,j},\dots,u_{k,j}).(u_{۱,j+۱}-u_{۱,j})\right.\right.$$

$$\left.+,\dots,\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(u_{۱,j},\dots,u_{k,j}).(u_{۱,j+۱}-u_{k,j})\right]+$$

$$f_i(u_{۱,j-۱},\dots,u_{k,j-۱})\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_۱}(u_{۱,j-۱},\dots,u_{k,j-۱}).(u_{۱,j}-u_{۱,j-۱})\right.$$

$$\left.\left.+,\dots,\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(u_{۱,j-۱},\dots,u_{k,j-۱}).(u_{۱,j}-u_{k,j-۱})\right]\right\}$$

در مسئله بالا c بر اساس حدس اولیه به ازای $t=۰$ (که اختیاری می باشد) به صورت زیر بدست می آید

$$G(a)=\sum_{i=۱}^{n} {f_i}^{۲}(۰,\dots,۰)=c$$

نکته. شرط کافی برای یک جواب تقریبی مسئله (۱) آنست که جواب بهینه مسئله حساب تغییرات (۴) تقریبا صفر باشد.

مراجع

[1] E.Ahmed, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, *Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models*, J.Math.Anal.Appl, **325** (2007) 542-553.

[2] V.Venkatasubramanian, A.Saberi, Z.Lin, *A notion of Solutions and Equilibrium points for non smooth systems*, Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, 1993.

[3] Z.L.Xiu, A.P.Zeng,W.D.Deckwer, *Multiplicity and stability analysis microooganisms in continuous culture :effects of metabolic overflow and groth inhibi*,Biotechnol.Bioeng, **57** (1998) 251-261.

[4] J.Ye, E.Feng, H.Lian, Z.Xiu, *Existence of equilibrium points and stability of the nonlinear dynamical system in microbial continuous cultures*, Applied Mathematics and Computation, **207** (2009) 307-318.