شبیه‌سازی جریان‌های لزج با استفاده از روش حجم محدود – شبکه بولتزمن

احد ضرغامی[۱]، محمد جواد مغربی[۲]، جلال قاسمی[۳]
ahad.zarghami@gmail.com

دریافت مقاله: ۸۹/۰۹/۱۲ پذیرش مقاله: ۸۹/۱۲/۰۱

چکیده

در این تحقیق با استفاده از معادله شبکه بولتزمن، یک شبیه‌سازی برای جریان‌های لزج ارائه شده است که در آن از روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول برای گسسته‌سازی معادله بولتزمن بر روی شبکه چهار ضلعی با شکل دلخواه استفاده شده است. در این مقاله از طرح گسسته‌سازی بالادست به منظور افزایش همگرایی جمله شار و از طرح‌های مرتبه بالا برای محاسبه جمله برخورد مورد استفاده قرار گرفته‌اند و شرایط مرزی با توجه به طرح مرکزیت سلول ارائه شده‌اند. به منظور بررسی صحت و دقت نتایج، جریان‌های لایه مرزی و انبساط ناگهانی متقارن مورد شبیه‌سازی قرار گرفته‌اند. برای هر کدام از جریان‌های فوق، نتایج حاصل با نتایج دقیق تحلیلی یا تجربی معتبر مقایسه شده‌اند که بیانگر دقت بالای روش ارائه شده به منظور تحلیل جریان‌های مختلف سیال می‌باشد.

کلید واژه :

معادله شبکه بولتزمن - حجم محدود – زمان آرامش یگانه – جریان لایه مرزی – جریان انبساط ناگهانی

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات فارس، دانشکده مهندسی مکانیک، فارس، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی مکانیک، مشهد، ایران mjmaghrebi@um.ac.ir
۳- استادیار، دانشگاه زنجان دانشکده مهندسی، زنجان، ایران ghasemi.j@znu.ac.ir

۱- مقدمه

در تحلیل جریان سیال سه دیدگاه میکروسکوپیک، مزوسکوپیک[1] و ماکروسکوپیک به کار می‌رود. از دیدگاه میکروسکوپیک، حرکت منفرد ذرات در مسافت آزاد متوسط[2] آنها بررسی می‌شود. این روش مدل‌سازی برای حل مسایل مهندسی غیرممکن بوده و یا مقرون به صرفه نیست. دیدگاه مزوسکوپیکی میان دو دیدگاه میکروسکوپیکی و ماکروسکوپیکی قرار دارد و به جای یک مولکول یا یک ذره منفرد از سیال، مجموعه‌ای از مولکول‌ها به عنوان یک ذره در نظر گرفته می‌شوند. این ذرات می‌توانند در هر جهتی حرکت کنند، بطوریکه معادله حرکت آن‌ها (برخورد و ارتباطشان) به صورت آماری و به‌وسیله معادلات توزیع بیان می‌گردد.

روش شبکه بولتزمن[3] یکی از مهمترین روش‌های مزوسکوپیک در تحلیل جریان سیالات می‌باشد. در این روش، تعداد ذرات توزیع شده در میدان، با تعداد ملکول‌ها نسبتی ندارد و فقط به شبکه و تعداد گره‌ها بستگی دارد.

در سال‌های اخیر روش شبکه بولتزمن به‌عنوان یک نگرش جدید برای حل مسایل پیچیده دینامیک سیالات مورد توجه قرار گرفته است. ساده بودن برنامه‌نویسی و قابلیت ترکیب کردن تعاملات میکروسکوپیک، این روش را به عنوان روشی جذاب برای شبیه‌سازی جریان سیالات با هندسه پیچیده معرفی کرده‌است. استفاده از این روش در بسیاری از مسایل مهم و پیچیده مهندسی از جمله جریان‌های تراکم ناپذیر [۱] - [۳]، جریان‌های چندفازی[۴]، [۵]، جریان‌های حباب‌دار[۶] ، جریان‌های عبور کننده از محیط‌های متخلخل[۷] و غیره رواج یافته است.

در عین حال استفاده از روش شبکه بولتزمن دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشد. از آن جمله می‌توان به این موضوع اشاره کرد که این روش برای شبکه‌های یکنواخت و سازمان یافته بنا شده است. استفاده از شبکه یکنواخت در بسیاری از مسایل مهندسی مشکل و شاید غیرممکن باشد. در سال‌های اخیر، محققان بسیاری سعی در استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان نموده‌اند تا به نحوی بر این مشکل غلبه کنند. هی و همکاران [۸] در تحقیقی مدلی برای شبکه‌بندی مربعی دلخواه ارائه کردند که در آن الگوریتمی ارائه شد که به‌واسطه آن یک گام میانیابی به روش استاندارد بولتزمن اضافه گردید. سوشی و همکاران [۲]، [۹] برای اولین بار فرمول‌بندی حجم محدود را در ترکیب با شبکه بولتزمن پیشنهاد کردند. در این فرمول‌بندی اگرچه نقاط شبکه تشکیل یک شبکه مربعی را نمی‌دهند اما از دیدگاه توپولوژیک، روش‌های فوق احتیاج به شبکه‌سازی باسازمان دارند. پنگ [۱۰] انتگرال‌گیری از فرم دیفرانسیلی معادله شبکه بولتزمن را در ترکیب با روش حجم محدود در اطراف گره‌های شبکه را پیشنهاد کرد. این طرح به Cell-Vertex FV معروف می‌باشد. وی در این روش از شبکه D_2Q_7 استفاده نمود و برای محاسبه متغیرهای میکروسکوپیکی هر شبکه از شش نقطه مجاور استفاده کرد و بیان کرد با این روش می‌توان دامنه محاسباتی را به دامنه‌ای با شبکه مثلثی یا مربعی بی‌سازمان تجزیه کرد. خطای این روش در بیشترین حالت به ۱٪ می‌رسید اما با وجود دقت خوب، زمان محاسبه در این روش بسیار زیاد می‌باشد. علاوه اینکه این روش دارای اشکالات زیادی در پایداری عددی نیز می‌باشد.

برای رفع مشکل پایداری عددی تحقیقات مختلفی انجام گرفت، که از آن جمله می‌توان به تحقیق انجام شده توسط *استیبلر* و همکاران [۱۱] اشاره کرد. این محققان اپراتور جابجایی (جمله شار) را بر خلاف ایده گسسته‌سازی مرکزی انجام گرفته توسط *پنگ* [۱۰]، با ایده بالادست[4] گسسته نمودند. آنها ثابت کردند که پایداری عددی روش پیشنهادی آنها در مقایسه با فرمول‌بندی‌های دیگر بهبود یافته است اما در عین حال هزینه محاسباتی ۵۰٪ افزایش می‌یابد.

اعمال شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن و سازگار نمودن آن با قوانین پایستاری جرم، اندازه حرکت و انرژی بر حسب متغیرهای ماکروسکوپیکی نیز از مسایل مهم در این روش می‌باشد. *چن* و همکار [۱۲] شرط مرزی عدم لغزش در دیواره و شرط فشار در جریان اطراف استوانه را با استفاده از برونیابی و بر حسب متغیرهای میکروسکوپیکی بر معادله بولتزمن اعمال و نتایج خوبی را در مقایسه با روش تفاضل محدود بدست آوردند. *زاه* و همکاران [۱۳] شرط مرزی انعکاسی[5] در روش شبکه بولتزمن را با تقریب BGK بررسی نمودند و نشان دادند که شرط مرزی انعکاسی برای شرط عدم لغزش در دیواره ساکن بسیار مناسب است. علاوه بر آن روش‌هایی را برای اعمال شرایط ورودی، خروجی و فشار ارائه دادند.

برای توسعه روش شبکه بولتزمن و استفاده از این روش در هندسه‌های پیچیده تحقیقات دیگری در ترکیب این روش با روش تفاضل محدود [۱۴]- [۱۶] و المان محدود [۱۷]- [۱۹] نیز انجام گرفته است که برای مطالعه بیشتر می توان به مراجع ذکر شده رجوع کرد. در نهایت می‌توان گفت که امروزه ترکیب روش حجم محدود با روش شبکه بولتزمن و تکنولوژی شبکه بی‌سازمان بدلیل توانمندی، انعطاف پذیری زیاد و سازگاری فیزیکی آن در تحلیل مسایل پیچیده، مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است[۲۰]- [۲۴].

۲- معادله شبکه بولتزمن

از لحاظ تاریخی روش شبکه بولتزمن از روش شبکه گاز بدست آمده‌است. این روش مرتبط با نسخه معادله انتقالی بولتزمن می‌باشد که در فضا، زمان و مومنتوم گسسته شده است. در روش شبکه

1 - Mesoscopic
2 - Mean free path
3 - Lattice Boltzmann Equation (LBE)
4 - Upwind
5- Bounce-back

بولتزمن متغیرهای بولین با متغیرهای حقیقی $f_i = \langle n_i \rangle$ جایگزین شده‌است که $\langle \ \rangle$ بیانگر میانگین مجموع می‌باشد. یعنی مجموعه‌ای از تابع توزیع سرعت ذرات بجای یک شبه ذره بکار می‌رود و محاسبات دینامیکی بر روی این مجموع انجام می‌شود. معادله بولتزمن یک معادله آماری از حرکت و برخورد ذرات می‌باشد که در واقع خصوصیات میکروسکوپی ملکول‌ها را بیان می‌کند. در اینجا برای توصیف ذرات از یک متغیر اسکالر نامنفی، بنام تابع توزیع ذرات $f(\vec{x},\vec{v},t) = f(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t)$ استفاده می‌شود که در فضای فازی تعریف شده و نشان دهنده تعداد ذراتی است که در زمان t، در مکان x با سرعت v در حال حرکتند. سرعت ذرات در این روش متغیرهای بولین نبوده بلکه اعداد حقیقی می‌باشند [۲۵]. با توجه به این موارد شکل گسسته معادله جنبشی توزیع ذرات بولتزمن به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i.\nabla f_i = -\frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{eq}\right) \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (۱)$$

سمت راست معادله فوق، اپراتور برخورد بوده که بیانگر نرخ تغییر f_i در اثر برخورد می‌باشد. که τ زمان آرامش بوده و تابعی از لزجت سیال می‌باشد. در معادله ۱، n جهت‌های ممکن سرعت را برای شبکه مورد نظر نشان می‌دهد و dt گام زمانی و v_i سرعت گسسته در فضای فازی می‌باشد.

گام اول در استفاده از روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی، معرفی یک مدل شبکه مناسب می‌باشد. مدل‌های متفاوتی تاکنون برای شبیه‌سازی جریان‌های دوبعدی و سه‌بعدی توسط دانشمندان مختلف معرفی شده است که در این تحقیق گسسته‌سازی معادله با استفاده از مدل D_2Q_9 انجام گرفته است [۲۶]. شکل (۱) شبکه D_2Q_9 را که بیانگر یک شبکه دو بعدی با ۹ مولفه سرعت به صورت زیر می‌باشد را نشان می‌دهد.

$$\vec{v}_i = \left\{ \begin{array}{l} (0,0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i=0 \\ \left[\cos\left(\frac{i-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi\right)\right]c \ldots\ldots\ldots\ldots i=1,2,3,4 \\ \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{i-5}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi, \sin\left(\frac{i-5}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi\right]c \ldots\ldots i=5,6,7,8 \end{array} \right\}$$

(۲)

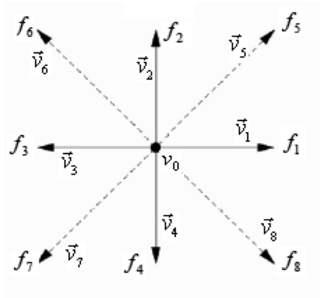
که در آن $c = \sqrt{3R\overline{T}} = \delta x/\delta t$ سرعت صوت در شبکه و $\overline{T}$ دمای متوسط می‌باشد. در حل عددی تابع f^{eq} نیز گسسته می‌شود که برای مدل D_2Q_9 به‌صورت زیر خواهد بود [۱] :

$$f_i^{eq}(\vec{x},t) = w_i \rho\left[c_1 + c_2(\vec{v}_i.\mathbf{u}) + c_3(\vec{v}_i.\mathbf{u})^2 + c_4(\mathbf{u}.\mathbf{u})\right] \qquad (۳)$$

در عبارت فوق ضرایب $c_1 = 1, c_2 = 1/c_s^2, c_3 = 1/\left(2c_s^4\right), c_4 = -1/2c_s^2$ ثابت‌های شبکه می‌باشند و $c_s = c/\sqrt{3}$ سرعت صوت در شبکه می‌باشد. همچنین:

$$w_i = \left\{ \begin{array}{l} 4/9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i=0 \\ 1/9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i=1,2,3,4 \\ 1/36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i=5,6,7,8 \end{array} \right\} \qquad (۴)$$

توابع وزنی می‌باشند.



شکل (۱): مولفه‌های تابع توزیع ذرات و سرعت در مدل D_2Q_9

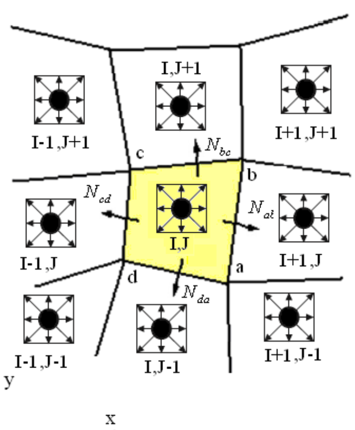
در روش بولتزمن متغیرهای ماکروسکوپیک چگالی ρ و سرعت با مجموع‌گیری از تابع توزیع ذره بدست می‌آیند.

$$\rho(x,t) = \int mf(\vec{x},\vec{v},t)d\vec{v} \qquad (۵)$$
$$\rho\vec{u}(x,t) = \int m\vec{v}f(\vec{x},\vec{v},t)d\vec{v}$$

در این روش، فشار با توجه با رابطه $p = \rho c_s^2$ بدست می‌آید و ویسکوزیته با $\upsilon = c_s^2 \delta t(\tau - 0.5)$ متناسب می‌باشد.

۳- گسسته سازی معادلات

در این قسمت گسسته‌سازی معادله شبکه بولتزمن را به روش حجم محدود و با استفاده از طرح مرکزیت سلول برای یک شبکه چهارضلعی با شکل دلخواه انجام خواهیم داد. شکل (۲) موقعیت قرار گرفتن شبکه‌های چهار ضلعی در اطراف سلول هاشور خورده (I,J) را نشان می‌دهد.



شکل (۲): گسسته‌سازی معادله بولتزمن به روش حجم محدود- مرکزیت سلول

حال از معادله بولتزمن بر روی حجم چهارضلعی دلخواه انتگرال‌گیری می‌کنیم. اولین جمله بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\int_{abcd} \frac{\partial f_i}{\partial t} ds \approx \left[\frac{\partial f_i}{\partial t}\right]_{I,J} .A_{abcd} \qquad (۶)$$

A_{abcd} بیانگر مساحت حجم محدود $abcd$ می‌باشد و جمله داخل کروشه بیانگر پیشرفت زمانی معادله می‌باشد. گسسته‌سازی جمله شار به صورت زیر خواهد بود.

$$\int_{abcd} v_i.\nabla f_i \, dA = \int_{abcd} \{v_{ix}\frac{\partial f_i}{\partial x} + v_{iy}\frac{\partial f_i}{\partial y}\} dA \qquad (۷)$$

از آنجا که v_{ix} و v_{iy} ثابت هستند و با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\begin{aligned}\int_{abcd} v_i.\nabla f_i \, ds &= \int_{abcd} \{\frac{\partial (v_{ix}.f_i)}{\partial x} + \frac{\partial (f_i.v_{iy})}{\partial y}\} dx\, dy = \\ &\oint_{around\ I,J} (v_{ix}\, f_i\, dy - v_{iy}\, f_i\, dx) \approx \{\frac{[f_i]_{I,J} + [f_i]_{I+1,J}}{2} v_i.N_{ab} \\ &+ \frac{[f_i]_{I-1,J} + [f_i]_{I,J}}{2} v_i.N_{bc} + \frac{[f_i]_{I,J} + [f_i]_{I,J+1}}{2} v_i.N_{cd} \\ &+ \frac{[f_i]_{I,J-1} + [f_i]_{I,J}}{2} v_i.N_{da}\end{aligned} \qquad (۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&N_{ab} = \Delta y_{ab}\bar{i} - \Delta x_{ab}\bar{j}, ... \\ &\therefore\ \Delta y_{ab} = y_b - y_a \ \ , \ \ ... \\ &\therefore\ \Delta x_{ab} = x_b - x_a \ \ , \ \ ...\end{aligned} \qquad (۹)$$

$\bar{i}, \bar{j}$ جهات محورهای مختصات می‌باشند. در تقریب فوق اگر توابع $(f_i)_1,(f_i)_2,(f_i)_3$ را در لحظه n محاسبه شود فرمول‌بندی را صریح، و اگر در لحظه $n+1$ محاسبه شوند، فرمول‌بندی را ضمنی می‌نامند. تقریب فوق در شبکه کارتزین دقت مرتبه دوم دارد. اما نشان داده شده است که اگر جمله شار ضعیف باشد، این تقریب از لحاظ عددی پایدار نمی‌باشد [۲۷]. به منظور افزایش همگرایی، جمله شار را با استفاده از از تئوری دیورژانس و طرح بالادست به صورت زیر تقریب می‌زنیم.

$$\begin{aligned}&\int_{abcd} v_i.\nabla f_i \, dA = \int_{abcd} \left[\frac{\partial(\bar{v}_{ix} \cdot f_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_{iy} \cdot f_i)}{\partial y}\right] dxdy = \\ &\begin{cases}[f_i]_{I,J} v_i.N_{ab} & if\ \ v_i.N_{ab} \geq 0 \\ [f_i]_{I+1,J} v_i.N_{ab} & if\ \ v_i.N_{ab} < 0\end{cases} + \begin{cases}[f_i]_{I,J} v_i.N_{bc} & if\ \ v_i.N_{bc} \geq 0 \\ [f_i]_{I,J+1} v_i.N_{bc} & if\ \ v_i.N_{bc} < 0\end{cases} + \\ &\begin{cases}[f_i]_{I,J} v_i.N_{cd} & if\ \ v_i.N_{cd} \geq 0 \\ [f_i]_{I-1,J} v_i.N_{cd} & if\ \ v_i.N_{cd} < 0\end{cases} + \begin{cases}[f_i]_{I,J} v_i.N_{da} & if\ \ v_i.N_{da} \geq 0 \\ [f_i]_{I,J-1} v_i.N_{da} & if\ \ v_i.N_{da} < 0\end{cases} \\ &\approx \sum_k \bar{v}_i \cdot N_k (f_i)_k\end{aligned}$$

(۱۰)

در این تقریب اطلاعات در جهت جریان با سرعت میکروسکوپیکی v_i تعیین می‌گردد. این تقریب نوسانات عددی را به طور موثری کاهش می‌دهد.

اپراتورهای مختلفی برای تابع برخورد ارائه شده‌اند که مهمترین آنها خطی فرض کردن آن و استفاده از زمان آرامش یگانه[۶] (مدل BGK[۷]) می‌باشد [۲۸]. بنابراین انتگرال‌گیری از جمله برخورد به صورت زیر خواهد بود:

$$-\int_{abc} \frac{1}{\tau}(f_i - f_i^{eq}) dA = -\frac{1}{\tau}\left[f_i - f_i^{eq}\right]_4 .A_{abc} \qquad (۱۱)$$

به منظور افزایش دقت جمله برخورد و تاثیرپذیری آن از شبکه‌های مجاور، با فرض اینکه f_i, f_i^{eq} در هر سلول به صورت خطی رفتار می‌کنند، انتگرال‌گیری از جمله برخورد را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\int_{abcd} \frac{1}{\tau}(f_i - f_i^{eq}) dA = -\frac{A_{I,J}}{\tau}\Big[\frac{1}{4}[\Delta f_i]_{I,J} + \\ \quad \frac{1}{8}\left\{[\Delta f_i]_{I+1,J} + [\Delta f_i]_{I,J+1} + [\Delta f_i]_{I-1,J} + [\Delta f_i]_{I,J-1}\right\} + \\ \quad \frac{1}{16}\left\{[\Delta f_i]_{I+1,J-1} + [\Delta f_i]_{I+1,J+1} + [\Delta f_i]_{I-1,J+1} + [\Delta f_i]_{I-1,J-1}\right\}\Big] \end{cases}$$

(۱۲)

که در آن $\Delta f_i = f_i - f_i^{eq}$ می باشد. توجه شود که انتگرال گیری از جمله برخورد در سلول‌های مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$-\int_{abcd} \frac{1}{\tau}(f_i - f_i^{eq}) dA = -\frac{A_{I,J}}{\tau}\left[(f_i)_{I,J} - (f_i^{eq})_{I,J}\right] \qquad (۱۳)$$

در این شبیه‌سازی از روش رانگ – کوتای مرتبه پنجم برای افزایش گام زمانی معادله (۱) استفاده شده‌است. این روش دارای دقت بالایی بوده و به صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$\begin{aligned}&f_i^{n+1} = f_i^n + \alpha_k \Delta f_i^{k-1} \\ &\therefore k = 1,2,...,5 \\ &\therefore \alpha_1 = 0.0695, \alpha_2 = 0.1602, \\ &\alpha_3 = 0.2898, \alpha_4 = 0.5, \alpha_5 = 1.\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که n بیانگر گام زمانی است و

$$\begin{aligned}&\Delta f_i^{k-1} = \frac{\Delta t}{A_{I,J}} Q_i^{k-1} \\ &\therefore Q_i^{k-1} = \sum \left(f_i^{k-1}\right)_{Collisions} - \sum \left(f_i^{k-1}\right)_{Fluxes}\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

بنابراین تابع توزیع در زمان جدید به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \alpha_k \frac{\Delta t}{A_{I,J}}\left[\sum \left(f_i^{k-1}\right)_{Collisions} - \sum \left(f_i^{k-1}\right)_{Fluxes}\right] \qquad (۱۶)$$

قابل ذکر است که گام زمانی بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

6 - Single relaxation time
7 - Suggested by Bhatnagar , Gross and Krook

$$\Delta t = CFL\,\frac{\mathrm{Min}\left(\sqrt{\Delta x_{I,J}^2+\Delta y_{I,J}^2}\right)}{\mathrm{Max}\left(\sqrt{u_{I,J}^2+v_{I,J}^2}\right)} \qquad (۱۷)$$

که برای افزایش دقت، عدد CFL کمتر از ۰.۷ در نظر گرفته شده- است. معیار همگرایی شبیه‌سازی نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

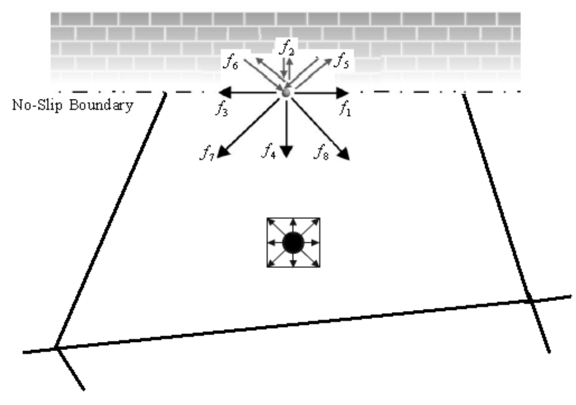
$$\mathrm{Res} = \frac{\sum_{I,J}\left|\sqrt{\left(u_{I,J}^2+v_{I,J}^2\right)^{n+1}}-\sqrt{\left(u_{I,J}^2+v_{I,J}^2\right)^{n}}\right|}{\sum_{I,J}\left|\sqrt{\left(u_{I,J}^2+v_{I,J}^2\right)^{n}}\right|} < 10^{-6} \qquad (۱۸)$$

۴- شرایط مرزی و اولیه

از ویژگی‌های مهم روش حجم محدود – شبکه بولتزمن قابلیت اعمال شرایط مرزی گوناگون برای هندسه‌های مختلف می‌باشد. لذا تعیین شرط مرزی و معلوم کردن مشخصه هر گره در شبکه، مهمترین گام در شبیه‌سازی در این روش می‌باشد.

روش بازتاب آینه‌ای روشی متداول در اعمال شرط مرزی دیوار یا عدم لغزش می‌باشد که در آن توابع توزیع مجهول، از توابع توزیع معلومی که در خلاف جهت آنها می‌باشند، بدست می‌آید (شکل (۳)). در واقع از مفهوم صفر بودن مجموع اندازه حرکت ذرات در دیوار استفاده می‌شود. این بدان معنی است ذرات پس از برخورد به همان گره‌هایی که از آن جاری شده‌اند، باز خواهند گشت. با در نظر گرفتن یک شبکه D_2Q_9 فرضی بر روی مرز دیواره سلول مرزی خواهیم داشت:

$$f_2 = f_4 \quad , \quad f_5 = f_7 \quad , \quad f_6 = f_8 \qquad (۱۹)$$



شکل (۳): شکل شماتیک روش بازتاب آینه ای روی دیوار جامد

در روش شبکه بولتزمن، مرزهای آزاد تحت عنوان شرط مرزی لغزش آزاد معرفی می‌شوند. در این حالت، اصطکاک در مرزها ناچیز بوده و حرکت مماسی سیال در مرز به سادگی و بدون هیچگونه مقاومتی انجام می‌گیرد یا به عبارت دیگر، تبادل مومنتوم در اثر حرکت مماسی ذرات سیال و مرز ، صفر می‌باشد. لذا تعیین توابع توزیع با توجه به شکل (۴) ، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$f_8 = f_5 \quad , \quad f_4 = f_2 \quad , \quad f_7 = f_6 \qquad (۲۰)$$

بدلیل ماهیت هایپربولیکی معادله بولتزمن، بعضی از توابع توزیع ذرات، اطلاعاتی را از داخل و برخی دیگر، از خارج از دامنه بدست می‌آورند. لذا برای شرط مرزی ورودی (شکل ۵-الف) سرعت ماکروسکوپیکی و چگالی بصورت زیر اعمال می‌شوند:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 + \frac{2}{3}(\rho u)_{in} \\ f_5 &= f_7 + \frac{1}{2}(f_4 - f_2) + \frac{1}{6}(\rho u)_{in} \\ f_8 &= f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}(\rho u)_{in} \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

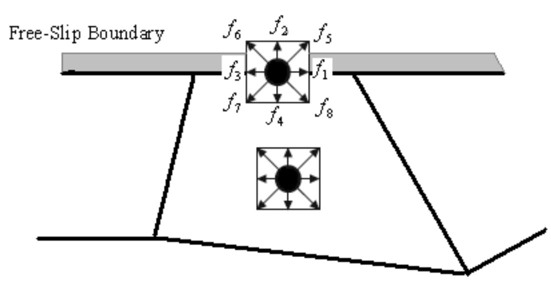
در مرز خروجی (شکل ۵-ب)، فشار به صورت جملاتی از تابع توزیع تعادل، اعمال می‌شود. سایر توابع توزیع مجهول در مرز ورودی و خروجی نیز به صورت زیر و با استفاده از برونیابی بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} f_i(1,J) &= 1.5 f_i(2,J) - 0.5 f_i(3,J) \\ f_i(N_x,J) &= 1.5 f_i(N_x-1,J) - 0.5 f_i(N_x-2,J) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

شرط اولیه را می‌توان با شروع از حالت تعادل توصیف کرد. این بدان معنی است که چگالی سیال در تمام نقاط شبکه مقدار ثابتی است، به عبارتی دیگر:

$$\rho(\vec{x},t) = m\sum_{i=0}^{n} f_i^{eq}(\vec{x},t) \qquad (۲۳)$$

و سرعت در هر گره و قبل از انجام اولین انتقال و هرگونه برخوردی برابر با صفر می‌باشد. سپس با اعمال یک سرعت ثابت در مرزی ورودی، می‌توان جریان را به راه انداخت.

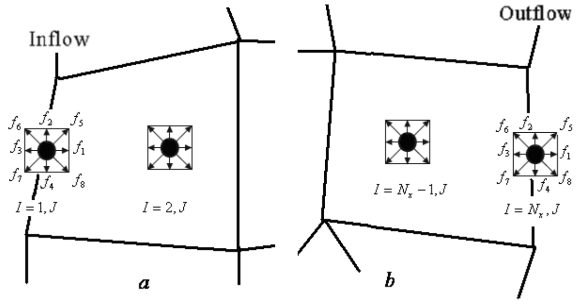


شکل (۴): شکل شماتیک مرز آزاد بدون لغزش

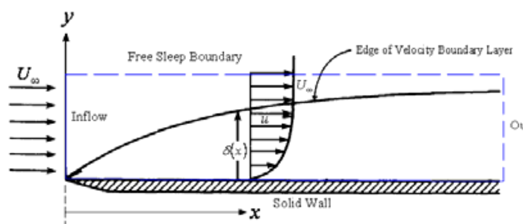
۵- نتایج شبیه‌سازی

جریان لایه مرزی دوبعدی (شکل (۶)) را می‌توان به عنوان ساده‌ترین جریان که دارای یک مرز آزاد و یک مرز جامد به همراه شرایط ورودی و خروجی است، معرفی کرد. در این جریان مرزهای

ورودی، خروجی و دیوار جامد نیز وجود دارند که برای بررسی صحت اعمال شرایط مرزی معرفی شده، مورد توجه می‌باشند. همچنین به‌دلیل وجود حل تحلیلی برای این جریان [۲۹]، به راحتی می‌توان دقت روش شبیه‌سازی را مورد بررسی قرار داد.

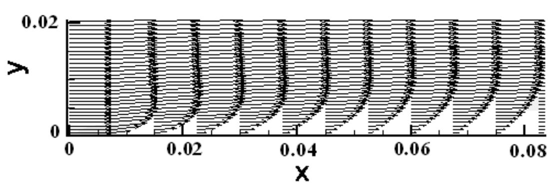


شکل (۵): شبکه قرار گرفته بر روی مرز ورودی و خروجی

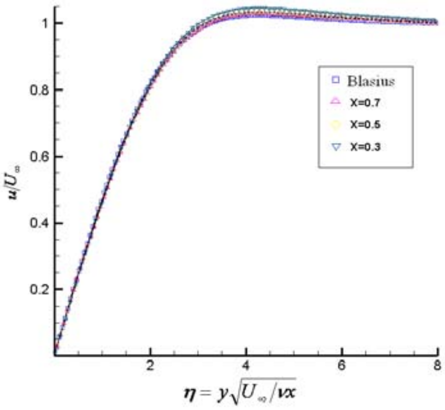


شکل (۶): شکل شماتیک جریان لایه مرزی و شرایط مرزی مربوط به آن

شکل (۷) بردارهای سرعت را در قسمتی از دامنه محاسباتی نشان می‌دهد که در آن رشد لایه مرزی آرام در رینولدزهای پایین، به وضوح قابل رویت می‌باشد. برای انجام مقایسه با نتایج تحلیلی، نتایج خودتشابهی نیز مورد بررسی قرار گرفته اند. شکل (۸) رفتار خود تشابه پروفیل سرعت را نشان می‌دهد که با نتایج تحلیلی بلازیوس [۲۹] مقایسه شده است که تطابق رضایت بخشی بین آنها وجود دارد. قابل ذکر است که در اینجا تمام کمیت‌ها با مقیاس‌های مناسب، بی‌بعد شده اند. به عنوان نمونه تمام طول‌ها با ضخامت لایه مرزی δ وتمام سرعت‌ها با سرعت جریان ورودی U_∞ بی‌بعد شده اند. شکل (۹) نیز رشد ضخامت لایه مرزی را نشان می‌دهد که تطابق بسیار عالی با نتایج تحلیلی دارد.

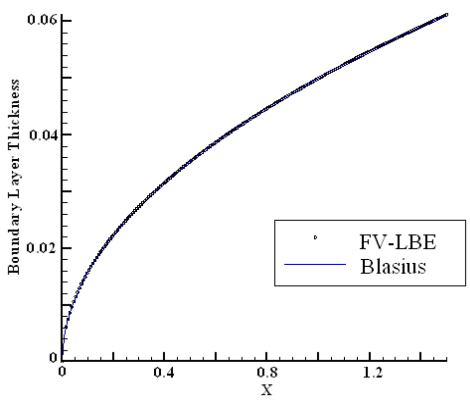


شکل (۷): بردارهای سرعت در جریان لایه مرزی در Re = 25

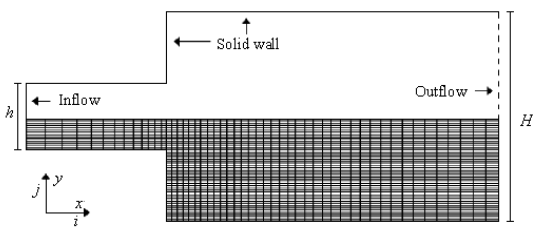


شکل (۸): رفتار خودتشابهی پروفیل سرعت لایه مرزی

به منظور بررسی بیشتر نتایج شبیه‌سازی، جریان انبساط ناگهانی در یک کانال متقارن انتخاب شده است. انبساط در بسیاری از کاربردهای مهندسی مانند تبرید و جت‌های آزاد کاربرد دارد. علاوه بر این از آنجا که این جریان توسط محققین مختلف به صورت تجربی و روش‌های متداول عددی مورد بررسی قرار گرفته است، به عنوان دومین مساله نمونه انتخاب شده است تا بتوان دقت و صحت نتایج شبیه‌سازی را با نتایج معتبر، مقایسه نمود. شکل (۱۰) هندسه جریان انبساط ناگهانی و شرایط مرزی دیوار مربوط به آن را نشان می‌دهد. در ادامه، نتایج شبیه‌سازی با استفاده از روش شبکه بولتزمن – حجم محدود برای این جریان ارائه خواهد شد.



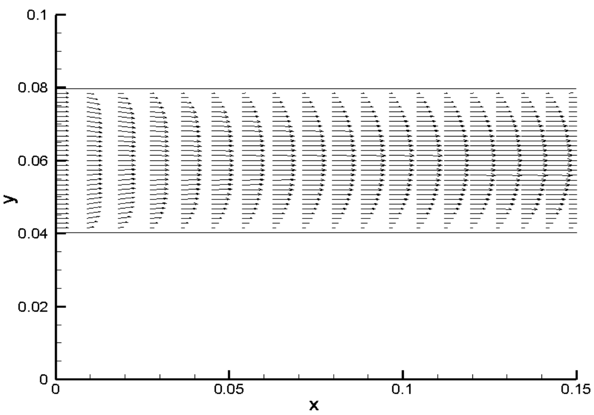
شکل (۹): رشد ضخامت لایه مرزی و مقایسه آن با نتایج تحلیلی



شکل (۱۰): هندسه جریان انبساط ناگهانی و شرایط مرزی مربوط به آن

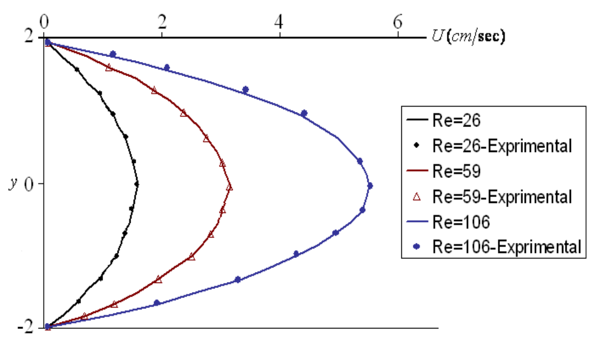
در شبیه‌سازی انجام شده، نسبت انبساط به عنوان پارامتر مستقل و به‌صورت $ER = H/h$ در نظر گرفته شده‌است. در ابتدا برای اعتبار سنجی روش، جریان درون کانال با $ER=3$ بررسی شده است. در اینجا، طول کانال کوچک به اندازه‌ای در نظر گرفته شده است که پروفیل سرعت در ورودی کانال بزرگ، به‌صورت کاملا توسعه یافته و سهموی باشد. شکل (۱۱) قسمتی از بردارهای سرعت در کانال کوچک را در $\mathrm{Re} = 26$ نشان می‌دهد.

شکل پروفیل سرعت ورودی به کانال بزرگ نیز برای مقادیر مختلف رینولدز در شکل (۱۲) نشان داده شده‌است. مقادیر بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی [۳۰] مقایسه شده‌اند که بیانگر دقت عالی نتایج بدست آمده می‌باشد.

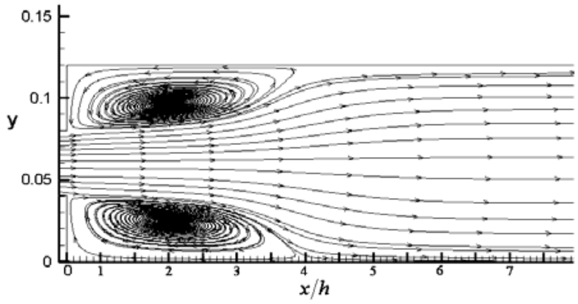


شکل (۱۱): بردارهای سرعت در کانال کوچک در $\mathrm{Re} = 26$

شکل (۱۳) نیز خطوط جریان را با $ER=3$ و رینولدز $\mathrm{Re} = 26$ نشان می‌دهد. این نتایج نشان می‌دهد که پروفیل سرعت به صورت متقارن نسبت به خط مرکزی کانال قرار دارند. توجه شود که در اینجا عدد رینولدز به صورت $\mathrm{Re} = U_{in} \times h/2\nu$ در نظر گرفته می‌شود.



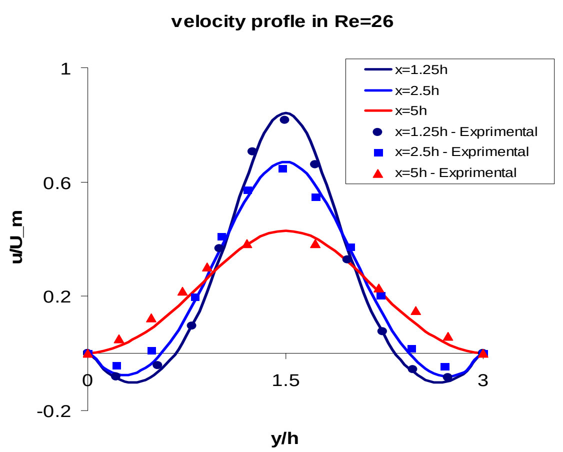
شکل (۱۲): پروفیل سرعت در ورودی کانال بزرگ در رینولدزهای مختلف و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی [۳۰]



شکل (۱۳): خطوط جریان برای $ER = 3$ در $\mathrm{Re} = 26$

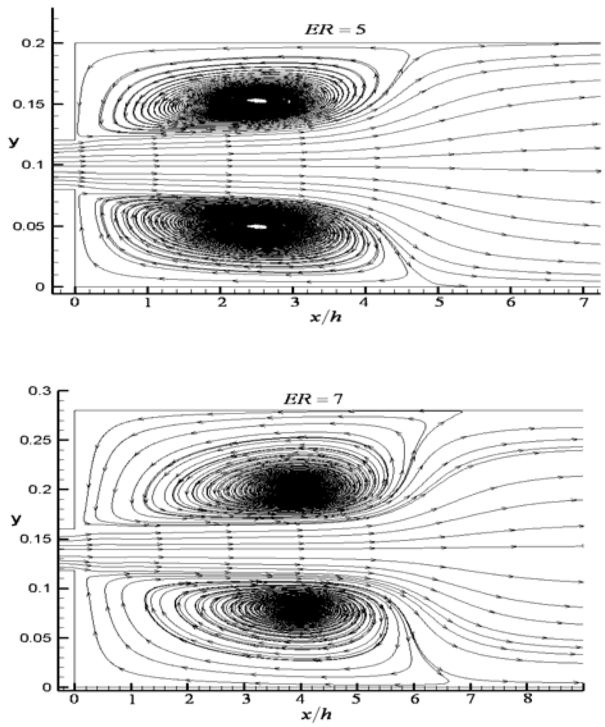
در شکل (۱۴) مقادیر سرعت در سه فاصله مختلف از مقطع انبساط با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج شبیه‌سازی دارای تطابق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی می‌باشند. ملاحظه می‌شود که قسمتی از پروفیل سرعت در فواصل $x = 1.25h, 2.5h$ دارای مقادیر منفی است که به دلیل قرار گرفتن جریان برگشتی در این مناطق می‌باشد.

شکل (۱۵) نیز خطوط جریان را برای $ER = 5,7$ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت انبساط، گستردگی جریان‌های برگشتی افزایش می‌یابد. باید توجه شود که این گستردگی در جریان با رینولدزهای پایین همواره به صورت متقارن نسبت به خط مرکزی کانال می‌باشد.

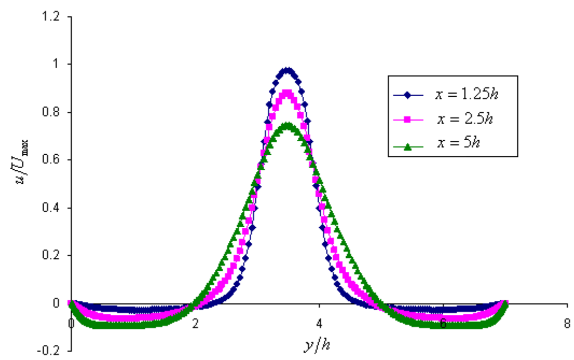


شکل (۱۴): پروفیل سرعت در $\mathrm{Re} = 26$ در سه ایستگاه مختلف و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی [۳۰]

شکل (۱۶) نیز مقادیر سرعت را در سه ایستگاه مختلف برای $ER=7$ نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که در مقایسه با $ER = 3$، مقادیر سرعت در خط مرکزی کانال افزایش پیدا کرده‌اند، که این بدلیل گسترش جریان‌های برگشتی در کانال با نسبت بازشوندگی بزرگتر می‌باشد. همچنین ملاحظه می‌شود که در $x = 5h$ نیز سرعت دارای مقادیر منفی است که بدلیل قرار گرفتن این ناحیه در محدوده جریان‌های برگشتی می‌باشد.



شکل (۱۵): خطوط جریان برای $ER = 5,7$ در $\mathrm{Re} = 26$



شکل (۱۶): خطوط جریان برای $ER = 7$ در $\mathrm{Re} = 26$

۶- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله از روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول برای شبیه‌سازی معادله شبکه بولتزمن بر روی شبکه چهارضلعی دلخواه استفاده شد. طرح گسسته‌سازی بالادست به منظور افزایش همگرایی جمله شار و از طرح‌های مرتبه بالا برای محاسبه جمله برخورد بر روی شبکه استفاده معرفی شدند. ارائه شرایط مرزی نیز با توجه به طرح مرکزیت سلول صورت گرفت و شبیه‌سازی برای چند جریان لزج انجام گرفت. نتایج بدست‌آمده که با نتایج معتبر تحلیلی یا تجربی سایر محققان مقایسه شده است، بیانگر دقت روش ارائه شده می‌باشد. با توجه به این موارد می‌توان گفت که روش ارائه شده می‌تواند به عنوان یک روش جایگزین برای روش‌های متداول در دینامیک سیالات محاسباتی معرفی شود که از دقت بالایی به منظور انجام شبیه‌سازی‌های مختلف، برخوردار می‌باشد.

۷- مراجع

[1] Succi, S., The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, Clarendon, Oxford, 2001, Chaps 1-6.

[2] Benzi, R., Succi, S., and Vergassola, M. "The Lattice Boltzmann equation: Theory and Applications", Phys. Rep., Vol. 222, 1992, pp. 145-197.

[3] Bella, G., Ubertini, S., and Bertolino, M., "Computational Fluid Dynamics for Low and Moderate Reynolds Numbers through the Lattice Boltzmann Method", Int. J. Comp. Num. Analysis Applications, IJCNAA, Vol. 3, No. 1, 2003, pp. 83-115.

[4] Rothman, D.H., and Zaleski, S., "Lattice-gas Model of Phase Separation: Interfaces, Phase Transitions, and Multiphase Flow", Rev. Mod. Phys., Vol. 66, No. 4, 1994, pp. 1417-1479.

[5] Chen, S., and Doolen, G., "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 30, 1998, pp. 329-364.

[6] Takada, N., Misawa, M., Tomiyama, A., and Hosokawa, S., "Simulation of Bubble Motion under Gravity by Lattice Boltzmann Method", J. Nuc. Sci. Tech., Vol. 38, No. 5, 2001, pp. 330-341.

[7] Bella, G., Presti, M., and Succi, S., "Mass Transfer Improvements in Catalytic Converter Channels: a Hybrid BGK-Finite Volume Numerical Simulation Method", Society Automotive Engineers Paper, No. 972907, 1997.

[8] He, X., Luo, L.S., and Dembo, M., "Some Progress in Lattice Boltzmann Method: part i. Nonuniform Mesh Grids," J Comput Phys., Vol. 129, 1996, pp. 357-363.

[9] Higuera, F., Succi, S., and Benzi, R., "Lattice Gas Dynamics with Enhanced Collisions", Europhys. Lett., Vol. 9, 1989, pp. 345-349.

[10] Peng, G., Xi, H., Duncan, C., and Chou, S.H., "Finite Volume Scheme for the Lattice Boltzmann Method on Unstructured Meshes", Phys Rev., Vol. 59, 1999, pp. 4675-82.

[11] Stiebler, M., Tolke, J., and Krafczyk M., "An Upwind Discretization Schem for the Finite Volume Lattice Boltzamnn Method," Computer & Fluids, Vol. 35, 2006, pp. 814-819.

[12] Chen, S., and Martinez, D., "On boundary conditions in Lattice Boltzmann Methods", Phys. Fluids, Vol. 8, 1996, pp. 2527-2536.

[13] Zoh, Q., and He, X., "On Pressure and Velocity Flow Boundary Conditions and Bounceback for the Lattice Boltzmann BGK Model", Physics of Fluids, Vol. 9, 1997, pp. 1591-1598.

[14] Filippova, O., and Hänel, D., "Grid refinement for lattice-BGK Models," J. Comput. Phys. Vol. 147, 1998, pp. 219-228.

[15] Sofonea, V., and Sekerka, R.F., "Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models", J. Comput. Phys., Vol. 184, 2003, pp. 422-434.

[16] Cao, N., Chen, S., and Martinez, S.D., "Physical Symmetry and Lattice Symmetry in The Lattice Boltzmann Method", Phys. Rev E., Vol. 55, 1997, pp. 136-142.

[17] Lee, T., and Lin, C.L., "A Characteristic Galerkin Method for Discrete Boltzmann Equation," J. Comput. Phys. Vol. 171, 2001, pp. 336-356.

[18] Lee, T., and Lin, C.L., "An Eulerian Description of the Streaming Process in the Lattice Boltzmann equation", J. Comput. Phys., Vol. 185, 2003, pp. 445-471.

[19] Shi, X., and Lin, Z.Yu, "Discontinuous Galerkin Spectral Element Lattice Boltzmann Method on Triangular Element", Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 42, 2003, pp. 1249-1261.

[20] Barth, T. J., and Jespersen, D. C., "The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes", AIAA Journal, Vol. 89, 1989, pp. 366-371.

[21] Tamamidis, P., "A New Upwind Scheme on Triangular Meshes Using the Finite Volume Method", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 124, 1995, pp. 15-21.

[22] Sofonea, V., and Sekerka, R.F., "Boundary Conditions for the Upwind Finite Difference Lattice Boltzmann Model: Evidence of Slip Velocity in Micro-Channel Flow", J. Comput. Phys., Vol. 207, 2005, pp. 639-659.

[23] Patil, Dhiraj V., and Lakshmisha, K.N., "Finite Volume TVD Formulation of Lattice Boltzmann Simulation on Unstructured Mesh", J. Computational Physics, Vol. 228, 2009, pp. 5262-5279.

[24] Premnath, N., Pattison, M.J., and Sanjoy, B., "Dynamic Subgrid Scale Modeling of Turbulent Flows Using Lattice-Boltzmann Method", Physica A, Vol. 338, 2009, pp. 2640-2658.

[25] Huang K., Statistical Mechanics, John Wily & Sons, Inc., 1963.

[26] Raabe, D.,. "Overview of the Lattice Boltzmann Method for Nano and Microscale Fluid Dynamics in Materials Science and Engineering", Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., Vol. 12, 2004, pp. 13-46,

[27] Hirsch C., Numerical computation of internal and external flows, Fundamentals of numerical discretization, Vol. 1, Chichester: Wiley; 1988.

[28] Simon T. E., "Benchmarking the 2D Lattice Boltzmann BGK Model", Complex Simulation Report., Universiteit van Amsterdam, Faculty of Naturrkunde, 2002.

[29] Schlichting, H., Boundary Layer Theory, 3rd Ed. Springer-Verlag, 2005.

[30] Fearn, R.M., and et al, "Nonlinear Flow Phenomena in a Symmetric Sudden Expansion", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 211, 1990, pp. 595-608.