چکیده مبسوط چهل و دومین کنفرانس ریاضی ایران
۱۷–۱۴ شهریور ۱۳۹۰، دانشگاه ولیعصر(عج) رفسنجان

بررسی دو روش پیشرفته تعدیل شبکه جهت تقریب معادلات میدان حالت

علیرضا سهیلی
دانشگاه فردوسی مشهد، soheili@mu.ac.ir
فاطمه امیری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان، amiri.math86@yahoo.com

چکیده

دراین مقاله دو روش قوی از دسته روشهای تعدیل شبکه جهت تقریب عددی مساله کلاسیک استفن مورد بررسی قرار می‌گیرد. مبنای کار در روش توزیع مجدد شبکه بر مبنای تفیک سازی معادله حرکت شبکه و تقریب مساله PDE (مساله کلاسیک استفن) بصورت مجزا و در روش هم‌محلی متحرک بصورت حل همزمان معادله حرکت شبکه و مساله PDE می‌باشد. نتایج عددی دقت و کارآرایی روشهای پیشنهادی را نشان می‌دهد.

واژه های کلیدی: روش هم‌محلی متحرک، روش توزیع مجدد شبکه، معادلات میدان حالت .
رده بندی موضوعی (MSC2000): .

۱ مقدمه

بسیاری از روشهای عددی برای حل معادلات میدان حالت بر روی شبکه‌های یکنواخت صورت گرفته است. نکته اساسی در این معادلات محاسبه مرز مشترکی می‌باشد که با زمان حرکت می‌کند، در نتیجه یک روش عددی برای تقریب این معادلات بایستی شامل بسیاری از روشهای تعدیل یافته باشد. اخیراً مکنزی و رابرتسون [۱] یک استراتژی حرکت شبکه را برای مسائل تغییر حالت که توسط معادلات میدان

حالت مدل بندی می‌شوند را مطرح کردند. پس از آن تائوتانگ و همکارانش [۲] یک روش حرکت شبکه ایستا با گسسته سازی حجم متناهی را برای مساله کلاسیک استفن پیشنهاد دادند. در این کارها معادلات میدان حالت به‌صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی مورد گسسته سازی قرار گرفتند. در این مقاله ما با ایده گرفتن از چنین مقالاتی روش هم‌محلی متحرک و سپس روش توزیع مجدد شبکه را با تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی میدان حالت به معادلات دیفرانسیل معمولی پیاده سازی کردیم. نتایج بدست آمده توسط این دو روش بسیار رضایت بخش و مطابق با نتایج چاپ شده [۲،۳] می‌باشد.

۲ معادلات میدان حالت

مجموعه معادلات

$$\alpha\tau^{۲}p_t = \tau^{۲}(\Delta p) + \frac{۱}{۲}(p - p^{۳}) + ۲u, \quad (۱)$$

$$u_t + \frac{L}{۲}p_t = k\Delta u. \quad (۲)$$

تحت عنوان معادلات میدان حالت شناخته می‌شوند[۲،۳].موقعیت مرزمشترک به‌صورت ضمنی توسط مجموعه نقاط زیر معین می‌شود:$\Gamma(t) = \{x \in \Omega | p(t,x) = ۰\}$. ارتباط بین معادلات میدان و مساله کلاسیک استفن به‌صورت نتیجه‌ای درارتباط بین مقیاسهای τ, α و a بیان می‌شود.

۳ روش های حرکت شبکه

۱.۳ روش توزیع مجدد شبکه

این روش که یک روش حرکت شبکه ایستا می باشد، از دو بخش مجزا تشکیل شده است، تقریب مساله PDE و توزیع مجدد شبکه.در اینجا بخش اول شامل گسسته سازی معادله میدان حالت بر اساس روش حجم متناهی و بخش دوم حل معادله غیر خطی لاپلاس توسط روش تکراری گاوس— سایدل است.
الگوریتم توزیع شبکه شامل :
۱— گسسته سازی معادله حرکت شبکه $(Mx_\xi)_\xi = ۰$. که M یک تابع نشانگراست.
۲— درونیابی جوابها رو شبکه جدید توسط درونیابی بقایی درجه دوم :

$$\Delta\tilde{x}_{j+\frac{۱}{۲}}\tilde{u}_{j+\frac{۱}{۲}} = \Delta x_{j+\frac{۱}{۲}}u_{j+\frac{۱}{۲}} - ((cu)_{j+۱} - (cu)_j),$$

بطوریکه $\Delta\tilde{x}_{j+\frac{۱}{۲}} = \tilde{x}_{j+۱} - \tilde{x}_j$ و $\Delta x_{j+\frac{۱}{۲}} = x_{j+۱} - x_j$ و $c_j = x_j - \tilde{x}_j$.
۳— هموار سازی تابع نشانگرجهت اجتناب از ایجاد خطاهای بزرگ بصورت

$$M_{j+\frac{۱}{۲}} \longleftarrow \frac{۱}{۴}(M_{j-\frac{۱}{۲}} + ۲M_{j+\frac{۱}{۲}} + M_{j+\frac{۳}{۲}}),$$

۲.۳ روش هم محلی متحرک

این روش که در دسته روشهای حرکت شبکه پویا قرار می‌گیرد برای گسسته‌سازی معادله PDE از یک گسسته‌سازی منظم هرمیتی مکعبی و برای گسسته‌سازی معادله حرکت شبکه از طرح سه نقطه‌ای تفاضل متناهی استفاده می‌کند.[۱] در این روش برای معادله حرکت شبکه از $MMPDE$ هموار شده زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{M}\left(1-\lambda^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}}\right)(\tau \dot{n}+n)\right)=0\ ,$$

که $\lambda > 0$ بعنوان پارامتر انتشار می‌باشد و $n := 1/(\partial x/\partial \xi)$ تابع چگالی شبکه نامیده می‌شود.در این روش بطور همزمان معادله حرکت شبکه و معادلات میدان حالت حل می شوند.

۴ نتایج عددی

در این بخش فرایند انجماد در یک صفحه نامتناهی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شرایط اولیه و مرزی دما و میدان حالت برای معادله (۱و۲) عبارتند از:

$$u(0,t)=C_1,\quad u(1,t)=u^{(s)}(1,t),\quad u(x,0)=u^{(s)}(x,0)\quad p(0,t_0)=-1\quad p(1,t_0)=1.$$

که

$$u^{(s)}(x,t)=\begin{cases} C_1\frac{[erf(\beta/2)-erf(x/2\sqrt{t+t_0})]}{erf(\beta/2)} & ,x\le s(t),\\ C_2\frac{[erf(\beta/2)-erf(x/2\sqrt{t+t_0})]}{1-erf(\beta/2)} & ,x>s(t).\end{cases}$$

که t_0 زمان اولیه و C_1 و C_2 مقادیر ثابتی هستند. موقعیت مرزمشترک عبارتست از:

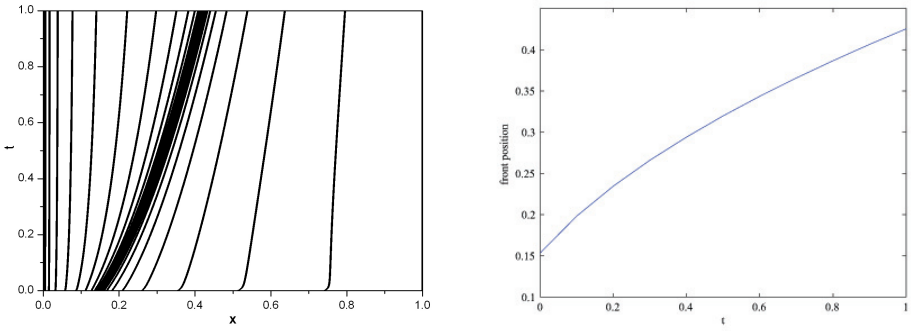
$$s(t)=\beta\sqrt{t+t_0}.$$

مقادیر ثابت $C_1=-0/085, C_2=-0/015$ و $t_0=0/15$ متناظر با $\beta=0/396618$ را درنظر می‌گیریم.

$$p(x,t_0)=\begin{cases} p(0,t_0)\tanh\left(\frac{s(t_0)-x}{2\varepsilon}\right), & x\le s(t),\\ p(1,t_0)\tanh\left(\frac{x-s(t_0)}{2\varepsilon}\right), & x\ge s(t).\end{cases}$$

روش حرکت شبکه	$norm۱$	$norm۲$	$norm\infty$
روش هم محلی متحرک	۰/۸۰۰۳	۰/۱۸۱۵	۰/۰۶۰۲
روش توزیع مجدد شبکه	۰/۷۹۳۴	۰/۱۳۷۲	۰/۰۳۶۹

خطای محاسباتی بین روش های حرکت شبکه و جواب نیومن مساله کلاسیک استفن .



شکل ۱ مسیر حرکت شبکه و موقعیت مرز مشترک برای مساله کلاسیک استفن

مراجع

[1] W.Huang and R.D.Russell, A moving collocation method for solving time dependent patial differetial equations, *Applied Numerical Mathematics* 20,101-116,1996.

[2] J.A. Mackenzie, M.L. Robertson, A moving mesh method for the solution of the one-dimensional phase-field equations, *J. Comput. Phys.* 181 (2002) 526-544.

[3] Z.Tan, T.Tang, Z.Zhang, A simple moving mesh method for one-and two - dimensional phase-field equations, *J. Computational and Applied Mathematics.* 190 (2006), 252 - 269.